Espace (Denise Vella-Chemla, 17.7.2016)

On définit l'espace des matrices infinies diagonales de la forme :

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{x1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{x2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{x3}.2i\pi}{5}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{x4}.2i\pi}{7}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

A un nombre entier n quelconque est associée la matrice

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{k1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{k2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{k3}.2i\pi}{5}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{k4}.2i\pi}{7}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $n \equiv k_p$ dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Par exemple, on associe à 11 (de restes (1,2,1,4,0,...) modulo (2,3,5,7,11,...)) la matrice :

$$\begin{pmatrix} exp(\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & exp(\frac{\mathbf{2}.2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{1}.2i\pi}{5}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{\mathbf{4}.2i\pi}{7}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Les nombres premiers n'ont qu'un seul 1 sur leur diagonale.

L'opérateur $Succ(n)$ de l'arithmétique de Peano (l'addition de 1 à n) correspond à la multiplication dans l'espace des matrices de la matrice associé à n par la matrice (que l'on appelle $PlusUn$) dont tous les k_i valent 1.

$$PlusUn = \begin{pmatrix} exp(\frac{2i\pi}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & exp(\frac{2i\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & exp(\frac{2i\pi}{5}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & exp(\frac{2i\pi}{7}) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On calcule par programme la somme des coefficients diagonaux de la portion finie haute-gauche de la matrice $PlusUn$.

Pour les nombres premiers jusqu'à 97, cette somme est égale à $19.8703 + 6.46254i$.

Pour les nombres premiers inférieurs à 10^7, elle vaut $664577 + 8.73825i$.