Trouver les décompositions de Goldbach des nombres pairs entre deux nombres pairs triviaux de Goldbach (i.e. entre deux nombres pairs doubles de nombres premiers consécutifs)

Denise Vella-Chemla pilotant claude, 6 novembre 2026

1. Le point de départ

Soient $p_1 < p_2$ deux nombres premiers consécutifs. Les nombres pairs $2p_1$ et $2p_2$ ont la décomposition triviale p_1+p_1, p_2+p_2. Entre les deux, le pair p_1+p_2 admet lui aussi une décomposition de Goldbach $p_1 + p_2$, et l'on a $2p_1 < p_1 + p_2 < 2p_2$. Par Tchebychev (postulat de Bertrand), $p_2 < 2p_1$, mais l'intervalle $]2p_1,\ p_1 + p_2[$ peut contenir beaucoup de nombres pairs : ce sont les "trous" à boucher.

Lemme 1. *Soit n pair avec $2p_1 < n < p_1 + p_2$. Si $n = q + r$ avec $q \leq r$ premiers, $q, r \notin \{p_1, p_2\}$, alors $q < p_1$ et $r > p_2$.*

Démonstration. On a $r \geq n/2 > p_1$, donc $r \geq p_2$ (il n'y a pas de premier strictement entre p_1 et p_2), donc $r > p_2$ puisque $r \neq p_2$. Alors $q = n - r < n - p_2 < p_1$. □

Posons $a = p_1 - q > 0$ et $b = r - p_2 > 0$: on a $a - b = p_1 + p_2 - n > 0$.

2. Reformulation au centre

Soit $c = n/2$. Si $p_1 < c < p_2$, alors c est composé et il appartient à un unique trou (p_1, p_2) de la suite des premiers.

Proposition 2. *Pour c composé compris entre les nombres premiers consécutifs $p_1 < p_2$, le pair $n = 2c$ est somme de deux premiers si et seulement s'il existe d avec*

$$d \ \geq \ \max(c - p_1,\ p_2 - c) \quad \textit{et} \quad c - d,\ c + d \textit{ premiers.}$$

Démonstration. Si $c-d$ est premier avec $d \geq 1$, alors $c-d < c < p_2$ donc $c-d \leq p_1$, soit $d \geq c-p_1$. De même $c + d > c > p_1$ est premier donc $c + d \geq p_2$, soit $d \geq p_2 - c$. Réciproque immédiate. □

La conjecture de Goldbach équivaut donc à : pour tout trou (p_1, p_2) et tout c dans ce trou, il existe une paire symétrique de premiers autour de c, à distance au moins $\max(c-p_1, p_2-c)$. Pour exclure p_1 et p_2 eux-mêmes il faut $d > \max(c - p_1, p_2 - c)$.

3. Ce que ces données ne suffisent pas à prouver

Proposition 3 (contre-modèle)**.** *Soit S l'ensemble des premiers $\equiv 1 \pmod 4$. Soient $s_1 < s_2$ deux éléments consécutifs de S. Alors $n = 2s_1 + 2$ vérifie $2s_1 < n < s_1 + s_2$ et n'est somme de deux éléments de S d'aucune façon.*

Démonstration. Deux éléments de S diffèrent d'un multiple de 4, donc $s_2 \geq s_1 + 4$ et $s_1 + s_2 \geq 2s_1 + 4 > n$. Toute somme de deux éléments de S est $\equiv 2 \pmod 4$, alors que $n = 2s_1 + 2 \equiv 0 \pmod 4$. □

Remarque 1 : dans S, la structure des trous, la croissance de type Tchebychev, les sommes doubles $2s$ et les sommes $s_1 + s_2$ sont toutes présentes, et pourtant le raisonnement "il faut $q < s_1$ et $r > s_2$" ne mène à aucune décomposition. Une démonstration doit donc utiliser que les nombres premiers occupent toutes les classes inversibles modulo chaque petit module, ce que ne dit pas la seule disposition en trous.

Remarque 2 : exploiter cette information revient à minorer le nombre de survivants d'un crible sur les couples $(q, n-q)$ (le R_N du crible de Legendre exact), et les minorations fournies par les cribles s'arrêtent au seuil de parité. On ne voit pas de voie vers une démonstration à partir de ce seul point de départ.