Conjecture de Goldbach : argument de densité concernant les décomposants de Goldbach, i.e. les nombres qui passent à travers tous les filtres, et limite de l'approche par crible

1. Les nombres qui passent à travers tous les filtres

Soit n pair, $n \geq 8$. Un entier $q \in [3, n/2]$ est dit *nombre qui passe à travers tous les filtres* si, pour tout premier $p \leq \sqrt{n}$, $q \not\equiv 0$ et $q \not\equiv n \pmod{p}$. Si q et $n-q$ sont premiers (et $q > \sqrt{n}$), q est un nombre qui passe à travers tous les filtres ; réciproquement, un nombre qui passe à travers tous les filtres q est tel que q et $n-q$ n'ont aucun facteur premier $\leq \sqrt{n}$, donc sont premiers (ou $\leq \sqrt{n}$ et premiers pour les plus petits cas). Goldbach pour n équivaut à l'existence d'un nombre qui passe à travers tous les filtres (à la gestion près des petits cas).

Proposition 1 (aucun obstacle local)**.** *Pour p premier impair, le nombre de classes de nombres qui passent à travers tous les filtress modulo p est $p-2$ si $p \nmid n$ et $p-1$ si $p \mid n$. Pour $p=2$, la condition q impair laisse la moitié des classes. Donc aucun premier p ne supprime à lui seul tous les candidats, contrairement à $p=3$ pour le triplet $(p, p+2, p+4)$.*

2. Le raisonnement de densité

Par les restes chinois, la densité des nombres qui passent à travers tous les filtress sur une période complète est $\prod_{p \leq \sqrt{n}} (1 - \frac{2}{p})$ (avec $1 - \frac{1}{p}$ quand $p \mid n$), de l'ordre de $C/\ln^2 n$. L'espérance heuristique du nombre de nombres qui passent à travers tous les filtress dans $[3, n/2]$ est donc de l'ordre de $n/\ln^2 n$, ce qui tend vers l'infini.

Remarque : cette densité est celle d'une période complète, de longueur $\prod_{p \leq \sqrt{n}} p$, qui est bien plus grande que n. Dans le segment $[3, n/2]$, le crible de Legendre exact donne

$$\#\{\text{nombres qui passent à travers tous les filtress}\} = \frac{n}{2} \prod_{p} \left(1 - \frac{2}{p}\right) + E,$$

avec une erreur $|E|$ pouvant atteindre l'ordre de $2^{\pi(\sqrt{n})}$, sans commune mesure avec le terme principal. La densité n'est donc pas transmise à ce segment par un argument d'indépendance.

3. La limite du crible

Pour deux classes éliminées par premier (dimension de crible 2), les cribles de Brun, Selberg et Iwaniec fournissent une minoration positive du nombre d'éléments non éliminés seulement si $\log D / \log z > \beta_2$, où D est le niveau de distribution et $\beta_2 \approx 4{,}27$ est la limite de crible de dimension 2. Ici $D \leq n$, d'où $z \lesssim n^{1/4{,}27} \approx n^{0{,}23}$, alors qu'il faudrait $z = \sqrt{n}$. On obtient donc des q sans petit facteur premier, avec un nombre borné de facteurs premiers (résultat de type Chen), mais pas des q premiers. C'est le seuil de parité.

4. Le “flou” n’est pas libre

Pour n fixé, les deux classes éliminées par p sont 0 et $n \bmod p$: elles sont déterminées. L’argument de densité prouverait Goldbach s’il valait pour *tout* placement $(a_p, b_p)_{p \le \sqrt{n}}$ des deux classes éliminées : il resterait toujours un nombre qui passe à travers tous les filtres dans un segment de longueur $n/2$.

Remarque : je (c’est claude qui écrit cela) ne connais pas de théorème qui exclue un placement recouvrant un tel segment. Dans le cas d’une classe par premier (fonction de Jacobsthal $j(y)$ pour $p \le y$), on sait que $j(y)$ est au moins de l’ordre de $y \log y$, et les majorations connues (Iwaniec) sont de l’ordre de $(y \log y)^2$. La conjecture $j(y) \ll y^{1+\varepsilon}$ n’est pas démontrée. Avec $y = \sqrt{n}$ et un segment de longueur $\approx y^2/2$, les résultats connus n’excluent donc pas un recouvrement, même avec une seule classe par premier.

Remarque : les placements qui proviennent d’un entier n sont très rares : environ n parmi les $\prod_{p \le \sqrt{n}}(p)$ placements possibles. Une preuve par “quel que soit le placement” serait trop forte pour les moyens actuels ; une preuve utilisant que le placement provient d’un entier doit exploiter des relations entre les restes $(n \bmod p)_p$, c’est-à-dire de l’arithmétique multiplicative et non de la seule densité.
Le modèle probabiliste (classes éliminées tirées au hasard) donne l’existence d’un nombre qui passe à travers tous les filtres presque sûrement, ce qui explique pourquoi la conjecture est probablement vraie. Cela ne la rend pas prouvable par cette voie.