Décomposants de Goldbach sur le cercle unité et théorème 90 de Hilbert
Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, novembre 2026

1. Décomposants de Goldbach sur le cercle unité et théorème 90 de Hilbert

1.1. La représentation circulaire des décompositions

Soit n un entier pair. À chaque classe x de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, associons le point

$$z_x = \exp\left(\frac{2\pi i x}{n}\right)$$

sur le cercle unité.

Voir à cette adresse https://denisevellachemla.eu/petitvelodanslatete.pdf le placement des décomposants de Goldbach de certains nombres pairs.

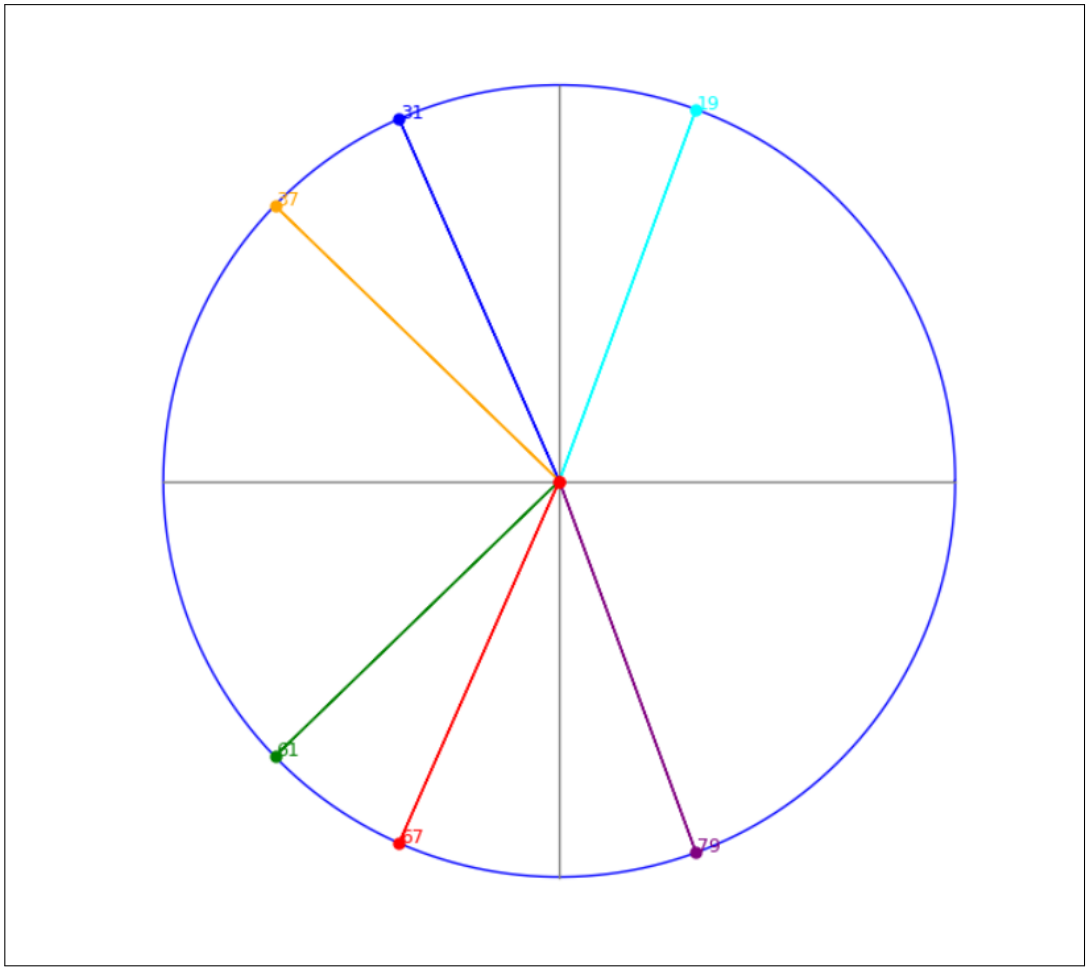


FIGURE 1 : $n = 98$ a pour décomposants de Goldbach 19 et 79, 31 et 67 ou 37 et 61.

En posant

$$\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right),$$

on peut aussi écrire $z_x = \zeta_n^x$.

Si $p + q = n$, alors $q \equiv -p \pmod{n}$, et par conséquent

$$z_q = \zeta_n^{-p} = \overline{\zeta_n^p} = \overline{z_p}.$$

Ainsi, deux décomposants de Goldbach complémentaires sont représentés par deux points conjugués par rapport à l'axe réel. Leur produit vaut

$$z_p z_q = 1.$$

La symétrie additive $x \mapsto -x$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devient donc l'inversion multiplicative $z \mapsto z^{-1}$ sur les racines n-ièmes de l'unité.

1.2. Exemple : la décomposition $98 = 19 + 79$

Posons

$$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{98}\right).$$

Les deux points associés à 19 et 79 sont

$$z_{19} = \zeta^{19}, \qquad z_{79} = \zeta^{79}.$$

Comme $79 = 98 - 19$, on obtient

$$z_{79} = \zeta^{-19} = \overline{z_{19}}, \qquad z_{19} z_{79} = \zeta^{98} = 1.$$

1.3. Cadre cyclotomique et conjugaison

Considérons le corps cyclotomique

$$L = \mathbb{Q}(\zeta)$$

et son sous-corps réel maximal

$$K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}).$$

Pour $n > 2$, l'extension L/K est galoisienne de degré 2.

Son groupe de Galois est engendré par la conjugaison complexe

$$\sigma : L \longrightarrow L, \qquad \sigma(u) = \overline{u}.$$

On a $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

Pour $a = \zeta^{19}$, dans l'exemple $n = 98$, on a

$$\sigma(a) = \zeta^{-19} = \zeta^{79}$$

et donc

$$a\,\sigma(a) = 1.$$

Autrement dit, la norme relative de a de L vers K vaut

$$N_{L/K}(a) = a\,\sigma(a) = 1.$$

1.4. Application du théorème 90 de Hilbert

Dans le cas d'une extension cyclique de degré 2, le théorème 90 de Hilbert affirme que tout élément $a \in L^\times$ vérifiant

$$a\,\sigma(a) = 1$$

peut s'écrire sous la forme

$$a = \frac{b}{\sigma(b)}$$

pour un certain $b \in L^\times$.

Dans notre exemple, on peut exhiber explicitement un tel élément :

$$b = 1 + \zeta^{19}.$$

Il est non nul et

$$\sigma(b) = 1 + \zeta^{-19} = 1 + \zeta^{79}.$$

Par conséquent,

$$\frac{b}{\sigma(b)} = \frac{1 + \zeta^{19}}{1 + \zeta^{-19}} = \zeta^{19}.$$

La dernière égalité résulte de la multiplication du numérateur et du dénominateur par ζ^{19} :

$$\frac{1 + \zeta^{19}}{1 + \zeta^{-19}} = \frac{\zeta^{19}(1 + \zeta^{19})}{1 + \zeta^{19}} = \zeta^{19}.$$

Nous retrouvons donc exactement le point associé au décomposant 19 comme quotient d'un élément par son conjugué.

1.5. Ce que le rapprochement établit - et ce qu'il n'établit pas

Le rapprochement avec le théorème 90 de Hilbert est exact au niveau algébrique : les points du cercle associés à x et à $n - x$ sont des éléments conjugués, et leur produit vaut 1. Dans le corps cyclotomique, cette dernière égalité est une condition de norme égale à 1.

Il faut toutefois distinguer cette propriété de la primalité. Pour tout entier x, premier ou composé, on a

$$\zeta^x\,\sigma(\zeta^x) = 1.$$

Le théorème 90 s'applique donc à tous ces éléments, et pas seulement à ceux dont l'exposant est premier.

Le théorème 90 de Hilbert décrit ainsi la structure de la symétrie entre x et $n - x$, mais ne fournit pas de critère permettant de reconnaître les décompositions de Goldbach. En particulier, il ne démontre pas l'existence d'un couple de nombres premiers complémentaires.

1.6. Une piste de recherche

Une direction possible consiste à chercher une structure qui fasse intervenir simultanément :

- la condition de norme égale à 1, qui exprime la symétrie entre les deux termes complémentaires ;
- une information arithmétique supplémentaire qui distingue les exposants premiers des exposants composés.

L'enjeu serait alors de comprendre si ces deux types d'information peuvent être combinés de manière à établir l'existence d'au moins un couple de nombres premiers p, q tel que $p + q = n$.

À ce stade, cette combinaison constitue une question de recherche, et non une conséquence du théorème 90 de Hilbert.