

Cette note pour garder mémoire de divers programmes trouvés au gré de lectures.

1) En lisant littéralement l'expression de ζ et en l'imaginant géométriquement comme une spirale¹, aux complexes annulant ζ correspondraient des spirales dont les côtés successifs sont de longueur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour n les entiers successifs. On a trouvé cette formule d'égalité à l'inverse d'une racine carrée :

$$\frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

avec $\psi(x)$ la fonction² définie par $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$. Le programme de vérification rapide est :

```

1 import mpmath
2 from mpmath import jtheta, sqrt, exp, pi
3 from scipy import integrate
4
5 def sommeinfinie(x):
6     somme = 0.0
7     n = 1
8     res = 1.0/mpmath.exp(n*n*mpmath.pi*x)
9     while (res > 0.000000000000001):
10        somme = somme+res
11        n=n+1
12        res = 1.0/exp(n*n*mpmath.pi*x)
13    return somme
14
15 for x in range(1,100):
16    print(str(x))
17    print("1/racine de x "+str(1.0/sqrt(float(x))))
18    res = (1.0+2.0*sommeinfinie(x))/(1.0+2.0*sommeinfinie(1.0/float(x)))
19    print("1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) "+str(res))
20    print('')
```

On modélise la convergence à l'infini comme on peut. Les résultats sont en fin de note.

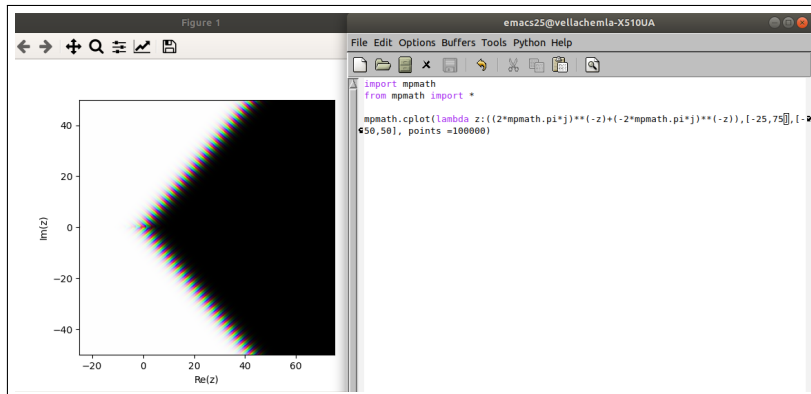
2) On a trouvé dans un article récent de Peter Luschny cette expression au sujet de ζ :

$$\zeta(1-s) = \zeta(s)\tau(s)\Gamma(s)$$

avec $\tau(s) = (2\pi i)^{-s} + (-2\pi i)^{-s}$. Voici le programme et la visualisation de la fonction τ juste après :

```

1 import mpmath
2 from mpmath import *
3
4 mpmath.cplot(lambda z:((2*mpmath.pi*j)**(-z))+(-2*mpmath.pi*j)**(-z)), [-25,75], [-50,50], points =100000)
```



1. On avait pensé à ça dans <http://denisevellachemla.eu/spirR.pdf>.
2. Ce serait une fonction theta de Jacobi notée psi ?

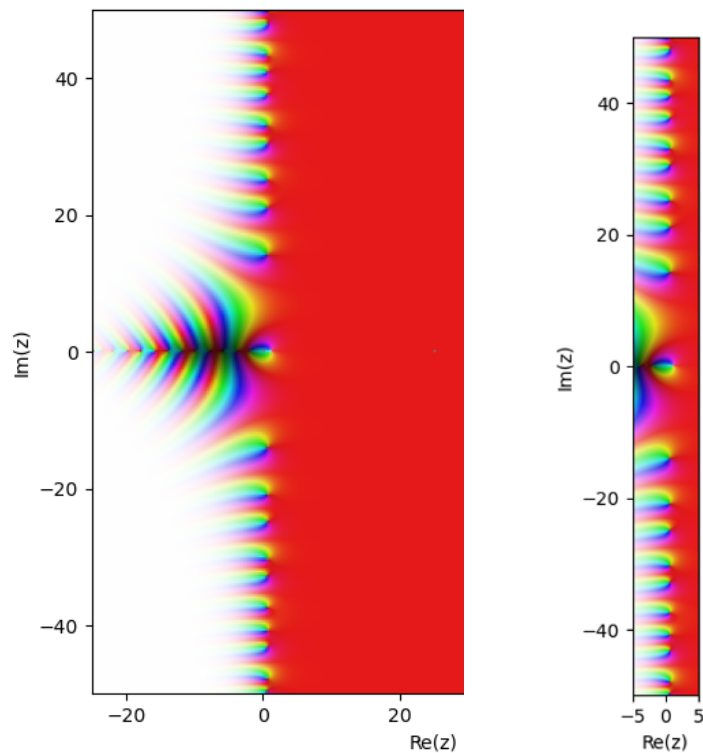
On vérifie par ce programme

```

1 import mpmath
2 from mpmath import *
3
4 def tautt(z):
5     return ((2*mpmath.pi*j)**(-z))+((-2*mpmath.pi*j)**(-z))
6
7     mpmath.cplot(lambda z:mpmath.zeta(1-z)/(tautt(z)*mpmath.gamma(z)),[-25,75],[-50,50], points =100000)

```

qu'on obtient bien la visualisation de ζ "habituelle".



3) On peut également vérifier que la fonction en partie droite de la formule ci-dessous pour ζ fournit la même visualisation que ζ par le programme fourni.

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)\Gamma(1-s)2^s\pi^{s-1}\sin\frac{1}{2}\pi s$$

```

1 import mpmath
2 from mpmath import zeta,gamma, sin,pi
3
4 mpmath.cplot(lambda z:zeta(1-z)*gamma(1-z)*(2**z)*(pi**(z-1))*sin(0.5*pi*z),[-50,50],[-50,50], points = 100000)

```

4) On vérifie en python qu'une autre expression de Gamma visualise la fonction comme habituellement.

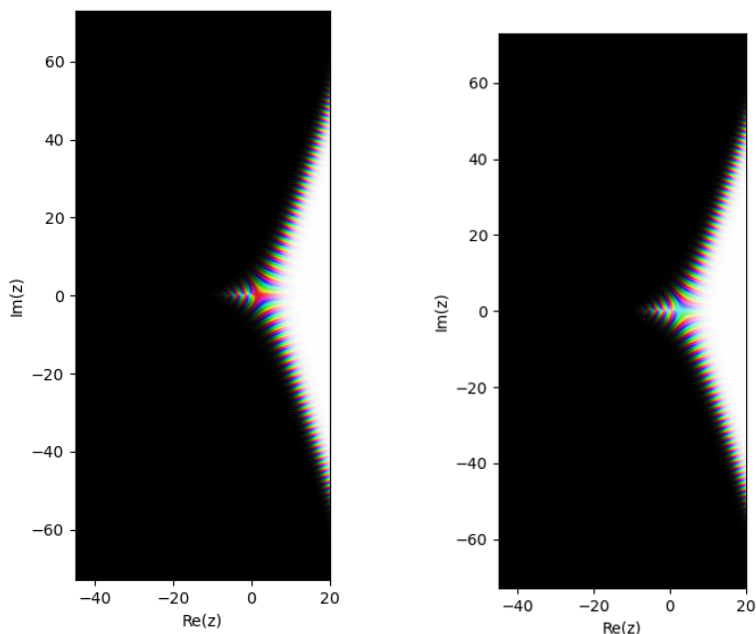
$$\Gamma(s) = 2^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}}$$

```

1 import mpmath
2 from mpmath import *
3 import math
4 from math import *
5
6 mpmath.cplot(lambda z:(2**z)*mpmath.gamma(z/2)*mpmath.gamma((z-1)/2)*(pi*(-0.5)), [-45,20], [-73,73], points =202000)

```

On n'obtient cependant pas les mêmes couleurs, ci-dessous.



Annexe : calcul de l'inverse de la racine en utilisant une fonction theta de Jacobi

1

1/racine de x 1.0

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 1.0

2

1/racine de x 0.707106781186547

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.707106781186547

3

1/racine de x 0.577350269189626

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.577350269189626

4

1/racine de x 0.5

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.5

5

1/racine de x 0.447213595499958

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.447213595499958

6

1/racine de x 0.408248290463863

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.408248290463864

7

1/racine de x 0.377964473009227

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.377964473009227

8

1/racine de x 0.353553390593274

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.353553390593274

9

1/racine de x 0.333333333333333

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.333333333333333

10

1/racine de x 0.316227766016838

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.316227766016838

11

1/racine de x 0.301511344577764

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.301511344577763

12

1/racine de x 0.288675134594813

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.288675134594813

13

1/racine de x 0.277350098112615

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.277350098112615

14

1/racine de x 0.267261241912424

$1+2 \operatorname{psi}(x) / 1+2 \operatorname{psi}(1/x)$ 0.267261241912426

15
1/racine de x 0.258198889747161
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.258198889747161

16
1/racine de x 0.25
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.25

17
1/racine de x 0.242535625036333
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.242535625036333

18
1/racine de x 0.235702260395516
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.235702260395516

19
1/racine de x 0.229415733870562
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.229415733870563

20
1/racine de x 0.223606797749979
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.223606797749979

21
1/racine de x 0.218217890235992
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.218217890235993

22
1/racine de x 0.21320071635561
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.21320071635561

23
1/racine de x 0.208514414057075
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.208514414057075

24
1/racine de x 0.204124145231932
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.204124145231932

25
1/racine de x 0.2
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.2

26
1/racine de x 0.196116135138184
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.196116135138184

27
1/racine de x 0.192450089729875
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.192450089729875

28
1/racine de x 0.188982236504614
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.188982236504614

29
1/racine de x 0.185695338177052
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.185695338177052

30
1/racine de x 0.182574185835055
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.182574185835055

31
1/racine de x 0.179605302026775
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.179605302026775

32
1/racine de x 0.176776695296637
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.176776695296637

33
1/racine de x 0.174077655955698
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.174077655955698

34
1/racine de x 0.171498585142509
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.171498585142509

35
1/racine de x 0.169030850945703
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.169030850945704

36
1/racine de x 0.166666666666667
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.166666666666667

37
1/racine de x 0.164398987305357
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.164398987305357

38
1/racine de x 0.162221421130763
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.162221421130763

39
1/racine de x 0.160128153805087
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.160128153805087

40
1/racine de x 0.158113883008419
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.158113883008419

41
1/racine de x 0.156173761888606
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.156173761888606

42
1/racine de x 0.154303349962092
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.154303349962092

43
1/racine de x 0.152498570332605
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.152498570332605

44
1/racine de x 0.150755672288882
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.150755672288882

45
1/racine de x 0.149071198499986
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.149071198499986

46
1/racine de x 0.147441956154897
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.147441956154897

47
1/racine de x 0.145864991497895
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.145864991497895

48
1/racine de x 0.144337567297406
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.144337567297406

49
1/racine de x 0.142857142857143
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.142857142857143

50
1/racine de x 0.14142135623731
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.14142135623731

51
1/racine de x 0.140028008402801
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.140028008402801

52
1/racine de x 0.138675049056307
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.138675049056307

53
1/racine de x 0.137360563948689
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.137360563948689

54
1/racine de x 0.136082763487954
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.136082763487954

55
1/racine de x 0.134839972492648
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.134839972492648

56
1/racine de x 0.133630620956212
 $1+2 \psi(x) / 1+2 \psi(1/x)$ 0.133630620956213

57
1/racine de x 0.132453235706504
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.132453235706504

58
1/racine de x 0.131306432859723
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.131306432859723

59
1/racine de x 0.130188910980824
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.130188910980824

60
1/racine de x 0.129099444873581
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.129099444873581

61
1/racine de x 0.128036879932896
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.128036879932896

62
1/racine de x 0.127000127000191
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.127000127000191

63
1/racine de x 0.125988157669742
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.125988157669743

64
1/racine de x 0.125
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.125

65
1/racine de x 0.124034734589208
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.124034734589209

66
1/racine de x 0.123091490979333
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.123091490979333

67
1/racine de x 0.122169444356305
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.122169444356305

68
1/racine de x 0.121267812518166
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.121267812518167

69
1/racine de x 0.120385853085769
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.120385853085769

70
1/racine de x 0.119522860933439
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.11952286093344

71
1/racine de x 0.118678165819385
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.118678165819386

72
1/racine de x 0.117851130197758
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.117851130197758

73
1/racine de x 0.117041147196131
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.117041147196131

74
1/racine de x 0.116247638743819
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.116247638743819

75
1/racine de x 0.115470053837925
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.115470053837925

76
1/racine de x 0.114707866935281
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.114707866935281

77
1/racine de x 0.113960576459638
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.113960576459638

78
1/racine de x 0.11322770341446
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.11322770341446

79
1/racine de x 0.112508790092602
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.112508790092602

80
1/racine de x 0.111803398874989
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.11180339887499

81
1/racine de x 0.111111111111111
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.111111111111111

82
1/racine de x 0.110431526074847
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.110431526074847

83
1/racine de x 0.10976425998969
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.10976425998969

84
1/racine de x 0.109108945117996
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.109108945117996

85
1/racine de x 0.108465228909328
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.108465228909328

86
1/racine de x 0.107832773203438
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.107832773203439

87
1/racine de x 0.107211253483779
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.10721125348378

88
1/racine de x 0.106600358177805
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.106600358177805

89
1/racine de x 0.105999788000636
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.105999788000636

90
1/racine de x 0.105409255338946
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.105409255338946

91
1/racine de x 0.104828483672192
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.104828483672192

92
1/racine de x 0.104257207028537
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.104257207028537

93
1/racine de x 0.103695169473043
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.103695169473043

94
1/racine de x 0.103142124625879
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.103142124625879

95
1/racine de x 0.102597835208515
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.102597835208515

96
1/racine de x 0.102062072615966
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.102062072615966

97
1/racine de x 0.101534616513362
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.101534616513362

98
1/racine de x 0.101015254455221
1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.101015254455221

99

1/racine de x 0.100503781525921

1+2 psi(x) / 1+2 psi(1/x) 0.100503781525921