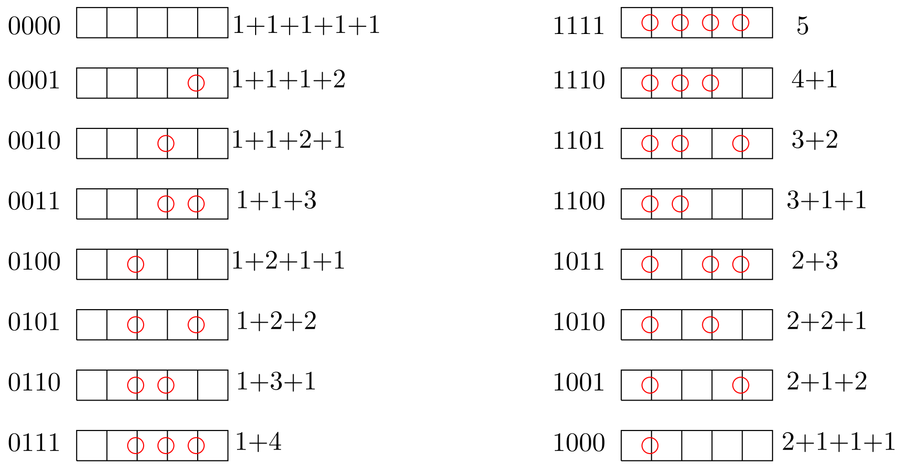
Compositions palindromiques (Denise Vella-Chemla, 29.4.2019)

Il s'agit ici de revenir à une modélisation plaisante [1], qui considère les mots palindromiques associés aux nombres entiers et qui permet de caractériser la primalité en théorie des mots.

On rappelle les mots booléens, les représentations imagées par des coupures ou au contraire accolements entre cases et les compositions additives associées au nombre 5.



Un nombre n a 2^{n-1} compositions additives (chaque séparation entre 2 cases de la représentation imagée, ou chaque booléen du mot à gauche peut prendre la valeur 0 ou 1).

On ne va s'intéresser parmi ces compositions qu'aux mots palindromiques, en quantité $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Un mot palindromique peut être lu dans les deux sens, il est égal à son image-miroir (par exemple, radar ou rotor sont palindromiques). Le nombre de mots palindromiques ($2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$) se justifie par le fait qu'il y en a autant que de mots de longueur moitié moindre, et la moitié droite du mot est alors totalement déterminée par sa moitié gauche, puisqu'elle doit en être l'image-miroir.

Voici les mots palindromiques pour l'entier 7, au nombre de 8 : les deux mots triviaux 000000 (correspondant à 1+1+1+1+1+1+1) et 111111 (correspondant à 7) ; et les moins triviaux, 001100 (correspondant à 1+1+3+1+1), 010010 (resp. 1+2+1+2+1), 011110 (ou 1+5+1), 101101 (ou 2+3+2), 110011 (ou 3+1+3) et 100001 (ou 2+1+1+1+2). Un moyen sûr d'allonger un mot palindromique en conservant sa palindromie est de le faire par les extrémités du mot, soit en ajoutant deux lettres 0, soit en ajoutant deux lettres 1 à ses extrémités.

Un nombre n est alors composé si l'un de ses mots (non triviaux) associés m_k, auquel on concatène un 0 (noté en rouge pour le distinguer du mot initial) est une puissance au moins carrée de l'un des sous-mots propres de m_k. Inversement, un nombre n est premier si aucun de ses mots associés m_k ne vérifie cette propriété.

Par exemple, aucun des mots palindromiques associés à 7 et auxquels on concatène un 0 n'est puissance de l'un de ses sous-mots propres : 0011000, 0100100, 0111100, 1000010, 1100110, 1011010.
9 est composé : son mot associé 11011011 auquel on concatène 0 est puissance cubique de 110.

$$110110110 = (110)^3$$

1. étudiée un peu en janvier 2017, voir http://denisevellachemla.eu/compo-sans-pgm.pdf.