Compositions (Denise Vella-Chemla, 7.1.2017)

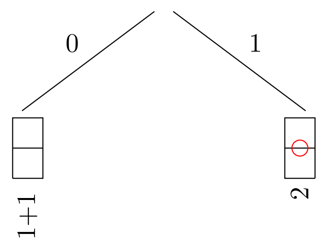
On cherche ce que les nombres premiers symétrisent.

On sait par exemple qu'un nombre premier p a exactement $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques, tandis que ce n'est pas le cas d'un nombre composé. Si on considère x et $p-x$ inférieurs à p, soit tous 2 sont résidus quadratiques de p simultanément, soit si l'un l'est, l'autre ne l'est pas et inversement. On peut voir dans ces faits une forme de symétrie.

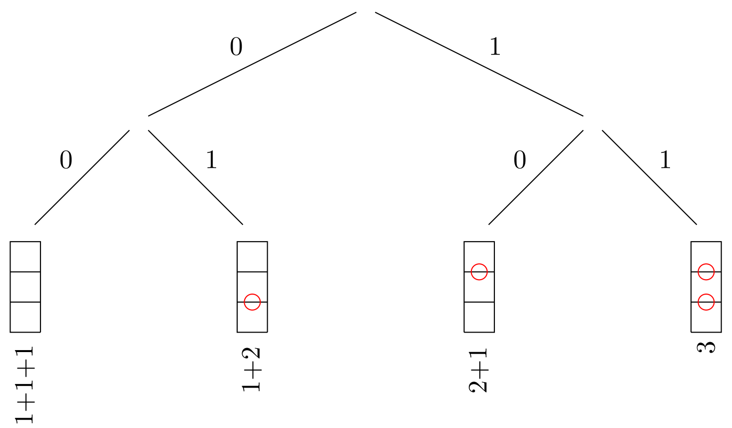
Cherchons d'autres formes de symétrie en étudiant les compositions des nombres. On prend comme référence l'article de wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Composition$_($*combinatoire*).

Un nombre n a 2^{n-1} compositions différentes. On peut voir les compositions de n comme feuilles d'un arbre binaire de hauteur $n-1$. On voit que l'ordre des sommants importe, $1+1+2+2$ et $1+2+1+2$ sont des compositions différentes de 6 (alors qu'elles correspondent à la même partition).

Arbre binaire des compositions de 2



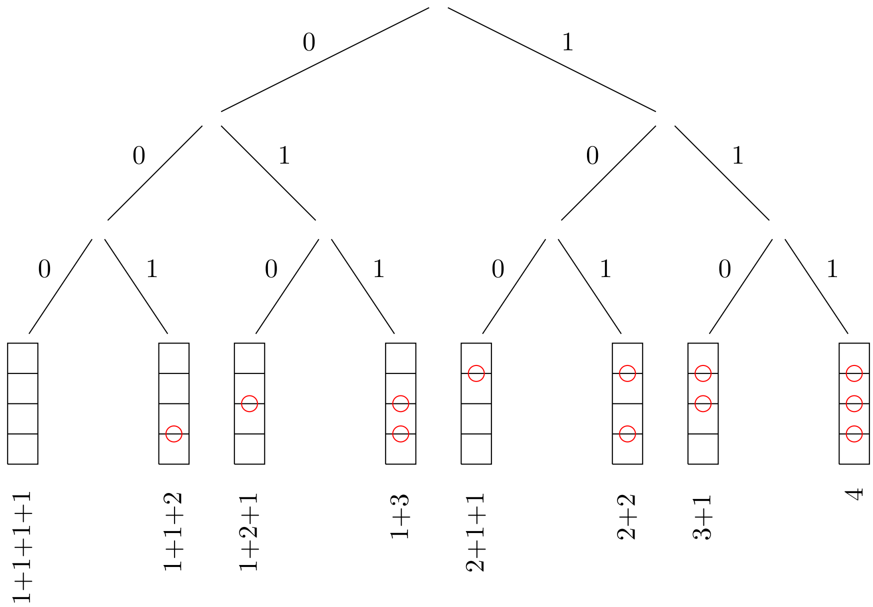
Arbre binaire des compositions de 3 (lire les dessins de haut en bas)



Pour obtenir une composition de $n+1$ à partir d'une composition de n, il suffit soit d'ajouter un sommant 1+ au début de la composition de n, soit de remplacer le premier sommant de la composition de n par son successeur, en obtenant à partir de la composition $n = s_0 + A$ la composition $n+1 = (1+s_0)+A$, le calcul entre parenthèses devant être effectivement effectué.

Voyons cela pour le passage des compositions de 3 à celles de 4 : de l'ensemble $\{1+1+1, 1+2, 2+1, 3\}$ des compositions de 3, on peut concaténer 1+ au début de chaque somme, ce qui permet d'obtenir l'ensemble de compositions de 4 $\{1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 1+3\}$; ou bien dans chaque composition de 3, on remplace le premier sommant par son successeur, ce qui permet d'obtenir l'ensemble de compositions de 4 $\{2+1+1, 2+2, 3+1, 4\}$. On réitère le processus pour passer de l'ensemble des compositions de 4 $\{1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 1+3, 2+1+1, 2+2, 3+1, 4\}$ à l'ensemble de compositions de 5 constitué de l'union des deux ensembles $\{1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+1+3, 1+2+1+1, 1+2+2, 1+3+1, 1+4\}$ et $\{2+1+1+1, 2+1+2, 2+2+1, 2+3, 3+1+1, 3+2, 4+1, 5\}$.

Arbre binaire des compositions de 4



On appelle *duales*[1] deux compositions d'un nombre dont les mots binaires ont des lettres inversées (0 à la place de 1 et 1 à la place de 0). Voyons les compositions duales pour le nombre 5.

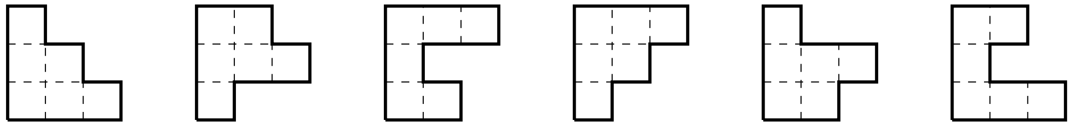
1+1+1+1+1	est duale de	5
1+1+1+2	est duale de	4+1
1+1+2+1	est duale de	3+2
1+1+3	est duale de	3+1+1
1+2+1+1	est duale de	2+3
1+2+2	est duale de	2+2+1
1+3+1	est duale de	2+1+2
1+4	est duale de	2+1+1+1

Un nombre composé est notamment caractérisé par le fait que l'une de ses compositions au moins, différente de la composition triviale composée uniquement de 1 de la forme 1+1+…+1, est telle que, quelle que soit la permutation qu'on pourrait effectuer entre 2 de ses sommants, cette composition reste identique à elle-même. Il en est ainsi de la composition 2+2+2 de 6, ou 5+5+5+5+5 de 25.

Précisons cela : il y a une correspondance bijective entre les mots booléens de $n-1$ caractères et les compositions de n. Par exemple, le mot de 5 lettres 10010 correspond à la décomposition $2+1+2+1$ de 6. Il faudrait trouver la manière dont la condition énoncée au paragraphe précédent (d'invariance syntaxique par toute permutation de deux sommants d'une composition au moins) se transfère aux mots booléens.

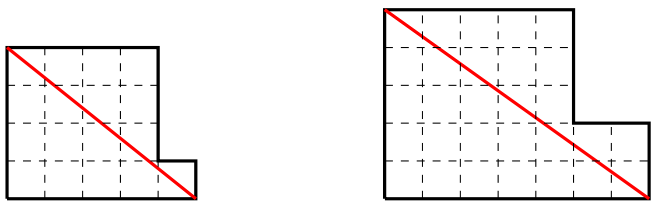
[1] On ne sait pas encore si cette définition présente une utilité.

On associe à chaque composition une surface à base de carrés qui la représente et on calcule le périmètre de cette surface. Ci-dessous les surfaces associées aux compositions à 3 sommants de 6 et leur périmètre.



$3+2+1$ $P=12$ | $1+3+2$ $P=12$ | $2+1+3$ $P=14$ | $1+2+3$ $P=12$ | $2+3+1$ $P=12$ | $3+1+2$ $P=14$

Les compositions dont les sommants sont ordonnés minimisent le périmètre (on les appelle partitions, on les représente par des diagrammes de Young). On peut calculer leur périmètre en utilisant la distance de Manhattan (ou distance associée à la norme 1). Pour les nombres composés, le périmètre minimum d'une composition vaut $2(Max(Sommants) + Nombre\_de\_Sommants)$.



17=16+1
P=18

29=25+4
P=24

Annexe 1 : les 32 compositions de 6 et leur mot booléen correspondant

$1+1+1+1+1+1$ (00000)	$2+1+1+1+1$ (10000)
$1+1+1+1+2$ (00001)	$2+1+1+2$ (10001)
$1+1+1+2+1$ (00010)	$2+1+2+1$ (10010)
$1+1+1+3$ (00011)	$2+1+3$ (10011)
$1+1+2+1+1$ (00100)	$2+2+1+1$ (10100)
$1+1+2+2$ (00101)	$2+2+2$ (10101)
$1+1+3+1$ (00110)	$2+3+1$ (10110)
$1+1+4$ (00111)	$2+4$ (10111)
$1+2+1+1+1$ (01000)	$3+1+1+1$ (11000)
$1+2+1+2$ (01001)	$3+1+2$ (11001)
$1+2+2+1$ (01010)	$3+2+1$ (11010)
$1+2+3$ (01011)	$3+3$ (11011)
$1+3+1+1$ (01100)	$4+1+1$ (11100)
$1+3+2$ (01101)	$4+2$ (11101)
$1+4+1$ (01110)	$5+1$ (11110)
$1+5$ (01111)	6 (11111)

Annexe 2 : Valeurs des majorants des périmètres minima de surface d'aire n pour n impair inférieur à 100

P(1)= 0 ( )	P(21)=20 (-)	P(41)=84 (+)	P(61)=124 (+)	P(81)=60 (-)
P(3)= 8 (+)	P(23)=48 (+)	P(43)=88 (+)	P(63)=48 (-)	P(83)=168 (+)
P(5)=12 (+)	P(25)=20 (-)	P(45)=36 (-)	P(65)=36 (-)	P(85)=44 (-)
P(7)=16 (+)	P(27)=24 (-)	P(47)=96 (+)	P(67)=136 (+)	P(87)=64 (-)
P(9)=12 (-)	P(29)=60 (+)	P(49)=28 (-)	P(69)=52 (-)	P(89)=180 (+)
P(11)=24 (+)	P(31)=64 (+)	P(51)=40 (-)	P(71)=144 (+)	P(91)=40 (-)
P(13)=28 (+)	P(33)=28 (-)	P(53)=108 (+)	P(73)=148 (+)	P(93)=68 (-)
P(15)=16 (-)	P(35)=24 (-)	P(55)=32 (-)	P(75)=56 (-)	P(95)=48 (-)
P(17)=36 (+)	P(37)=76 (+)	P(57)=44 (-)	P(77)=36 (-)	P(97)=196 (+)
P(19)=40 (+)	P(39)=32 (-)	P(59)=120 (+)	P(79)=160 (+)	P(99)=72 (-)