Compter les nombres composés (Denise Vella-Chemla, 19.9.2018)

On va ici étudier ce qu'il faudrait faire pour compter le nombre de nombres composés compris entre 1 et 100. On souhaite vraiment présenter quel a été notre cheminement.

On fournit d'abord le résultat attendu : de 1 à 100, il y a 25 nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, soit $\pi(100) = 25$. On oublie 1.

- on compte les puissances "pures" (au moins carrées) de 2, au nombre de 5 (les nombres 4, 8, 16, 32 et 64).
- on compte les puissances de 3, au nombre de 3 (les nombres 9, 27 et 81) ;
- on compte une seule puissance de 5 (son carré 25) ;
- on compte une seule puissance de 7 (son carré 49) ;
- à partir de 11, plus de puissances pures à compter (121 dépasse 100).

On cherche alors à dénombrer les composés, d'une manière combinatoire, en dénombrant tous les produits de 2, 3, ou 4 nombres parmi les possibilités suivantes :

- pour 2, on peut utiliser l'une de ses puissances possibles dans [1,2,3,4,5] ;
- pour 3, on peut utiliser l'une de ses puissances possibles dans [1,2] ;
- pour 5, on pense qu'on ne peut l'utiliser qu'à la puissance 1 ;
- pour 7, on pense qu'on ne peut l'utiliser qu'à la puissance 1 ;

Voici les combinaisons que l'on obtient (l'ordre est sans importance, l'essentiel est de n'oublier aucune possibilité de la combinatoire proposée ci-dessus) :

- un élément dans chacune de deux lignes sur les 4 lignes possibles :

$2\times 7 = 14$	$2\times 3 = 6$	$3\times 7 = 21$
$2^2 \times 7 = 28$	$2^2 \times 3 = 12$	$3^2 \times 7 = 63$
$2^3 \times 7 = 56$	$2^3 \times 3 = 24$	$3\times 5 = 15$
$2^4 \times 7$ *trop grand*	$2^4 \times 7 = 48$	$3^2 \times 5 = 45$
$2\times 5 = 10$	$2\times 3^2 = 18$	$5\times 7 = 35$
$2^2 \times 5 = 20$	$2^2 \times 3^2 = 36$	
$2^3 \times 5 = 40$	$2^3 \times 3^2 = 72$	
$2^4 \times 5 = 80$	$2^4 \times 3^2$ *trop grand*	

- un élément dans chacune de trois lignes sur les 4 lignes possibles :

$2\times 5 \times 7 = 70$	$2^2 \times 3 \times 7 = 84$	$2^3 \times 3 \times 7$ *trop grand*	$2^4 \times 3 \times 7$ *trop grand*
$2\times 3 \times 7 = 42$	$2^2 \times 3 \times 5 = 60$	$2^3 \times 3 \times 5$ *trop grand*	$2^4 \times 3 \times 5$ *trop grand*
$2\times 3 \times 5 = 30$	$2^2 \times 3^2 \times 7$ *trop grand*	$2^3 \times 3^2 \times 7$ *trop grand*	$2^4 \times 3^2 \times 7$ *trop grand*
$2\times 3^2 \times 7$ *trop grand*	$2^2 \times 3^2 \times 5$ *trop grand*	$2^3 \times 3^2 \times 5$ *trop grand*	$2^4 \times 3^2 \times 5$ *trop grand*
$2\times 3^2 \times 5 = 90$			

- un élément dans chacune des 4 lignes possibles :

$2\times 3 \times 5 \times 7$ *trop grand*	$2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ *trop grand*
$2\times 3^2 \times 5 \times 7$ *trop grand*	$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ *trop grand*
$2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ *trop grand*	$2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ *trop grand*
$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ *trop grand*	$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ *trop grand*

Là, on réalise qu'on a oublié de nombreuses possibilités [*], que l'on liste ci-dessous, avant de fournir le raisonnement qu'il fallait plutôt mener :

$2\times 11 = 22$	$3\times 11 = 33$	$5\times 11 = 55$	$7\times 11 = 77$	$2^2 \times 11 = 44$
$2\times 13 = 26$	$3\times 13 = 39$	$5\times 13 = 65$	$7\times 13 = 91$	$2\times 5^2 = 50$
$2\times 17 = 34$	$3\times 17 = 51$	$5\times 17 = 85$		$2^2 \times 13 = 52$
$2\times 19 = 38$	$3\times 19 = 57$	$5\times 19 = 95$		$2\times 3^3 = 54$
$2\times 23 = 46$	$3\times 23 = 69$			$2\times 3 \times 11 = 66$
$2\times 29 = 58$	$3\times 29 = 87$			$2^2 \times 17 = 68$
$2\times 31 = 62$	$3\times 31 = 93$			$3\times 5^2 = 75$
$2\times 37 = 74$				$2^2 \times 19 = 76$
$2\times 41 = 82$				$2\times 3 \times 13 = 78$
$2\times 43 = 86$				$2^3 \times 11 = 88$
$2\times 47 = 94$				$2^2 \times 23 = 92$
				$2^5 \times 3 = 96$
				$2\times 7^2 = 98$
				$3^2 \times 11 = 99$
				$2^2 \times 5^2 = 100$

Le raisonnement qu'il fallait plutôt mener est le suivant : supposons que l'on connaisse les nombres premiers (ainsi que leur nombre) qui sont compris entre 1 et $n/2$ (ici 50) et que l'on souhaite connaître le nombre de nombre composés compris entre $n/2$ et n en étudiant combinatoirement les factorisations des nombres composés inférieurs à 100, il faudrait :

- choisir un exposant α_2 pour le nombre premier 2 parmi les nombres de 0 à 6 ;
- choisir un exposant α_3 pour le nombre premier 3 parmi les nombres de 0 à 4 ;
- choisir deux exposants α_5 pour le nombre premier 5 et α_7 pour le nombre premier 7 parmi les nombres de 0 à 2 ;
- choisir 11 exposants $\alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{17}, \alpha_{19}, \alpha_{23}, \alpha_{29}, \alpha_{31}, \alpha_{37}, \alpha_{41}, \alpha_{43}, \alpha_{47}$ pour les nombre premiers 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 parmi les nombres de 0 à 1.

Le nombre de combinaisons possibles s'élève à $2^{11} \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Parmi toutes ces possibilités, seules celles vérifiant $\sum_i \alpha_i \geq 2$ et $\prod_i p_i^{\alpha_i} \leq 100$ conviennent. Le facteur premier 2 a plus de poids que les autres. On a bien dénombré tous les nombres composés entre 1 et 100 (1 (le nombre) + 10 puissances pures + 64 composés produits = 75) qui retranché de 100 fournit le nombre de nombres premiers 25 mais cette méthode est bien hasardeuse (l'hyper-volume contenant les points tels que $\prod_i p_i^{\alpha_i} \leq 100$ étant difficile à appréhender).

$*$. 39 %, sans commentaire.