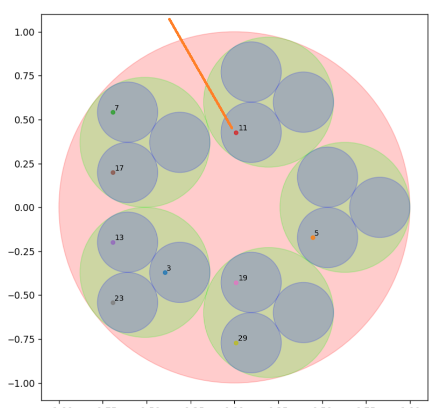
Compléments à *Snurpf et plan complexe* (Denise Vella-Chemla, janvier 2024)

On a choisi dans la note qui positionne les nombres entiers naturels, représentés par des n-uplets finis de restes modulaires dans le plan complexe selon une base de nombres premiers[1] de ranger les nombres premiers de la base utilisée dans l'ordre croissant : on a alors un premier cercle[2] en contenant 2 (tangents à son périmètre) correspondants au nombre premier 2, chacun de ces cercles en contient 3 (le nombre premier suivant) qui sont tangents à leur périmètre, chacun de ces derniers en contenant 5 (le nombre premier suivant), etc[3].

On peut considérer les nombres premiers dans l'ordre inverse (par exemple, les considérer selon l'ordre $[7, 5, 3, 2]$. Le cercle initial contiendra 7 cercles tangents à son périmètre, chacun de ces cercles en contiendra 5 tangents à leur périmètre, chacun de ces derniers en contiendra 3 et chacun de ces derniers en contiendra 2.

L'avantage de cette seconde représentation est de "disperser" les nombres un peu partout dans le cercle initial (si ce n'est vers les extrêmités droites des disques (et par extension du côté droit du disque principal), les extrémités droites des disques contiennent des nombres divisibles par les nombres premiers successifs : un nombre divisible par p est positionné sur un disque contenant p positions à une position analogue dans le disque en question à la position de $e^0 = 1$ dans le disque unité). L'inconvénient de ce choix de représentation est que si l'on modifie la base $\mathscr{B}$ contenant les nombres premiers modulo lesquels on calcule les restes, la faisant passer de $[3, 2]$, à $[5, 3, 2]$, puis à $[7, 5, 3, 2]$, puis à $[11, 7, 5, 3, 2]$ en représentant de plus en plus de nombres, la position des nombres d'une représentation à l'autre va "sauter erratiquement" d'un endroit à un autre du cercle initial (voir les positions dans les différentes bases du nombre 11, désigné par un trait orange).

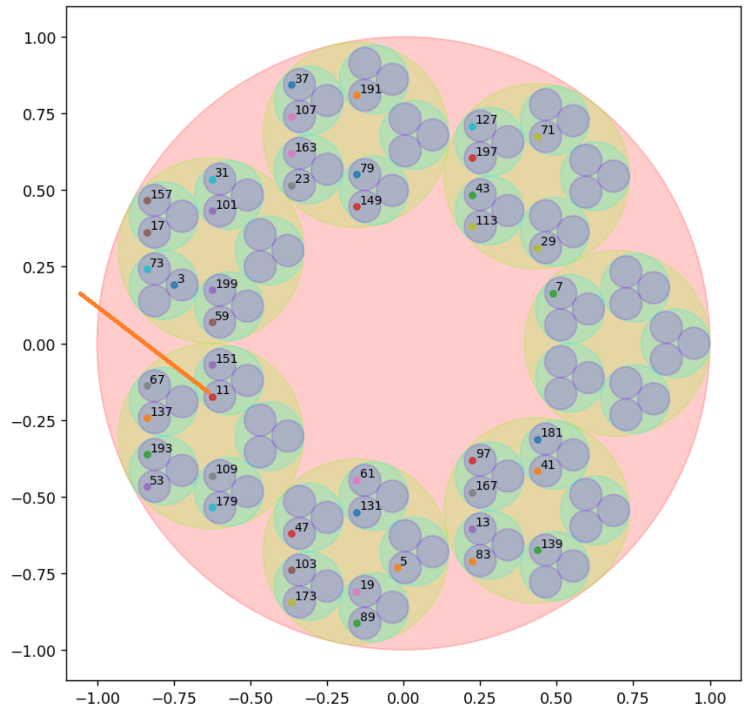


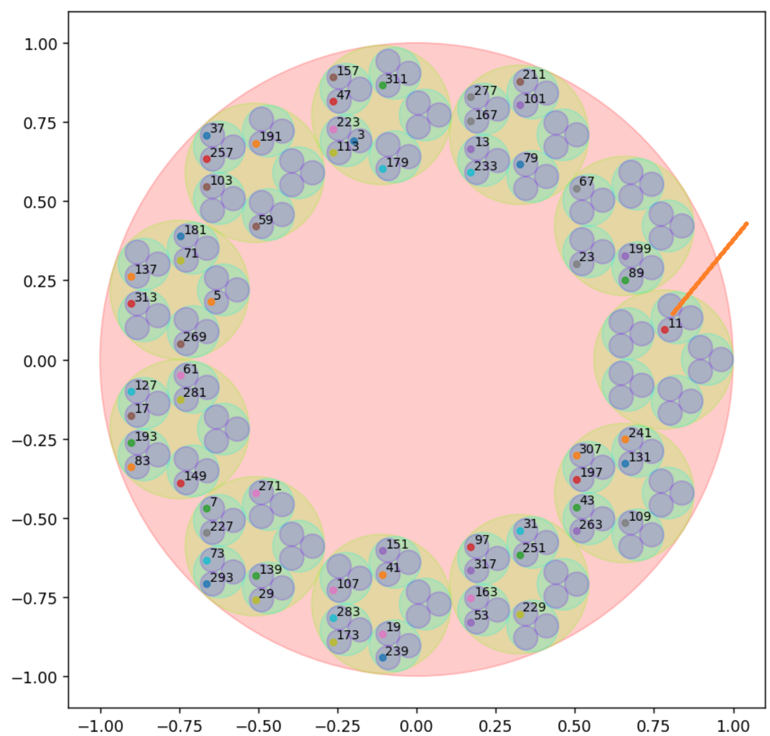
[1] Voir http://denise.vella.chemla.free.fr/snurpf-complexe.pdf.

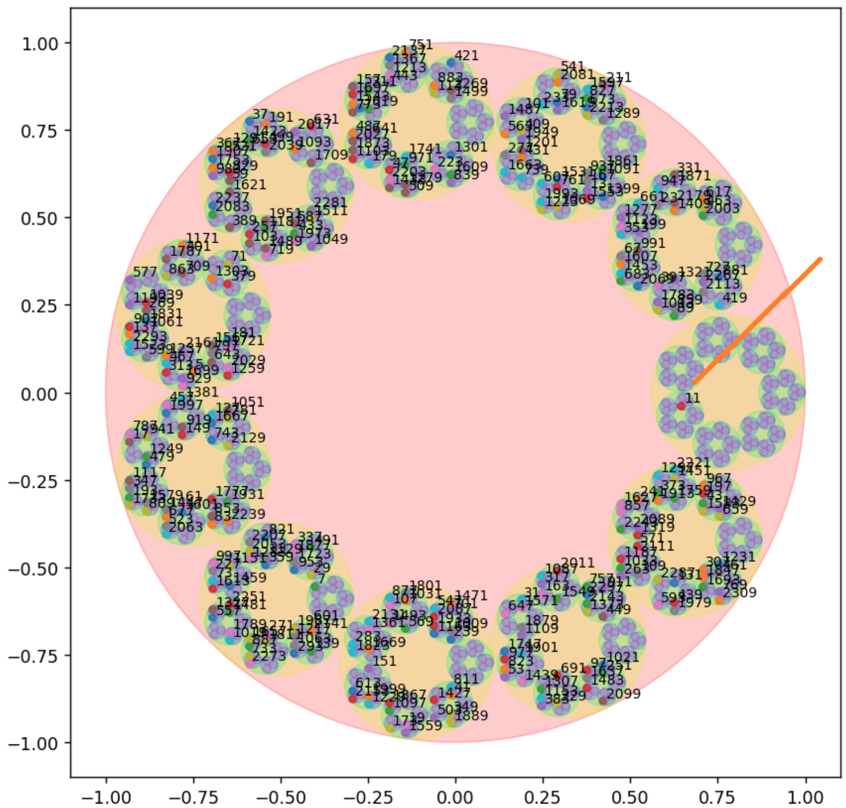
[2] Ci-après, on utilisera parfois le mot cercle, par erreur, à la place du mot disque.

[3] Les rayons des disques successifs s'obtiennent par la formule $r_k = \prod_{1 \leq j \leq k} \left(1 - \dfrac{1}{1+\sin(\pi/p_j)}\right)$; on a la formule récurrente : $R_k = \dfrac{1}{1+\sin(\pi/p_k)} r_{k-1}$ avec $1 \leq k \leq p$ et l'affixe du nombre n qui se calcule par la formule

$$z_n = \sum_{1 \leq k \leq p} R_k e^{2\pi i \frac{n}{p_k}}.$$







Ci-dessous les sauts erratiques des coordonnées[4] d'un endroit à l'autre.

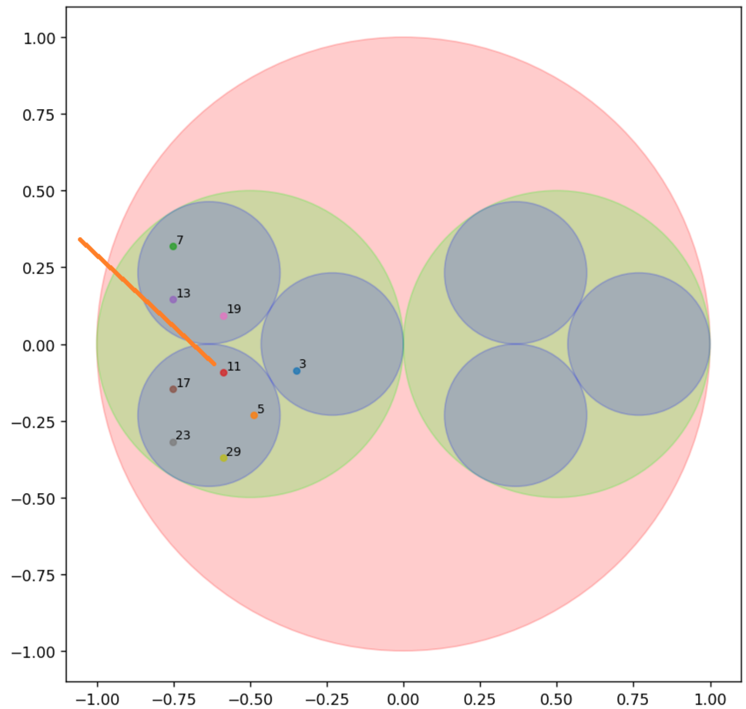
```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop>python3 change-ordre.py
(0.009525449494428 74+0.42717642727363403j)
```

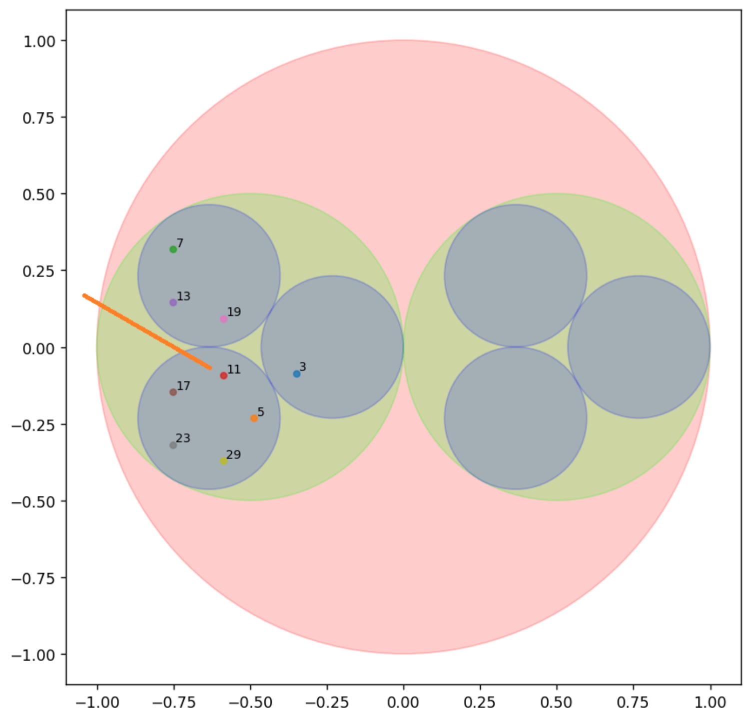
```
(-0.6254593073291511-0.17333262579722816j)
```

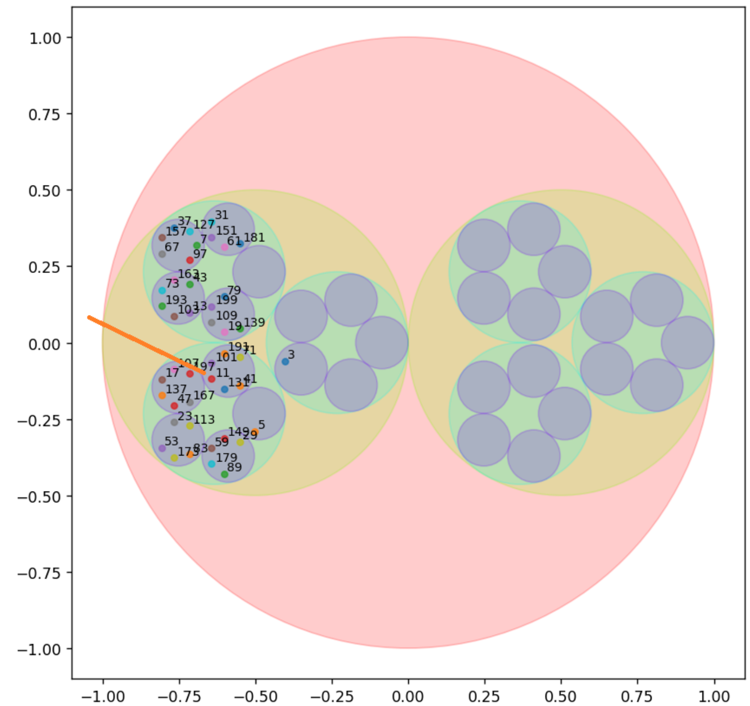
```
(0.6427142275108833-0.038099557968810586j)
```

Par opposition à cet inconvénient, l'utilisation d'une base contenant des nombres premiers croissant $[2,3]$, puis $[2,3,5]$, puis $[2,3,5,7]$, etc, va faire que la position d'un nombre va petit à petit tendre vers une position qui est en quelque sorte au centre d'une spirale logarithmique, comme en témoigne les exemples fournis ci-dessous (la position du nombre 11, selon différentes bases), dans lesquelles les nombres premiers sont rangés dans l'ordre croissant.

[4] auxquelles je m'identifie complètement.


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
7
13
19
11
3
17
5
23
29


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
7
13
19
11
3
17
5
23
29



Ci-dessous l'affixe associé au nombre 11, qui tend vers une limite.

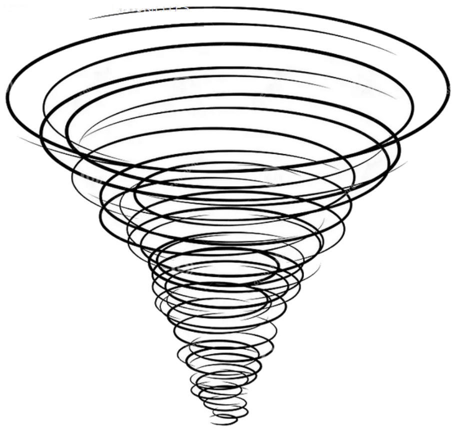
```
(-0.5888125423460718-0.09305629786972719j)
(-0.642789182842264-0.11905007794119199j)
(-0.6225089926163707-0.11905007794119199j)
(-0.6198900561645216-0.12284426242117458j)
(-0.620451740771406-0.12358805304576413j)
```

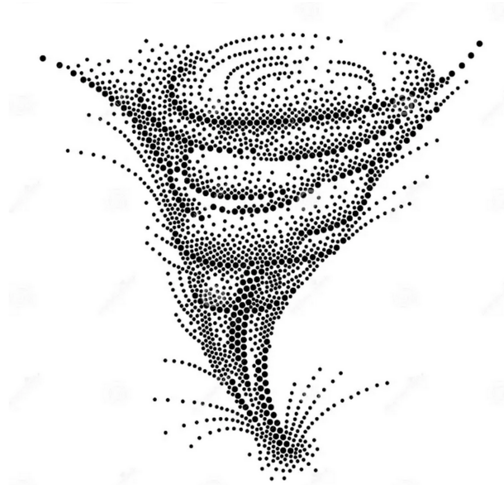
Du fait de la précision de notre ordinateur, la position de 11 semble "se fixer" dès le nombre premier 61 sur l'affixe

$$11 : (-0.620604245601167 - 0.1236531156985549j)$$

On ajoute deux dessins de spirales trouvés sur la droite pour bien faire appréhender l'idée de limite vers un point "central"[5].

[5] La suite des affixes successives d'un point dans les différentes bases répondrait peut-être à la définition de "suite centralisante" présentée dans la note http://denise.vella.chemla.free.fr/AC-pres-Schwartz-centralisante.pdf mais rien n'est moins sûr.





Avant de réaliser l'inconvénient de l'idée d'absence de limite de la représentation sur plan complexe avec base de premiers décroissant, on avait fait afficher les seuls nombres premiers, comme ci-dessous.