Analyse de notes (`ia243.pdf`, `ia265.pdf` et `ia299.pdf`) par chatgpt pour Denise Vella-Chemla, 9 novembre 2026

1. Objet

L'analyse de chatgpt porte sur ces notes :

[1] https://denisevellachemla.eu/ia243.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/ia265.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/ia299.pdf

Ce complément examine trois textes : [1] : double crible, topos et parité, [2] : "Snurpf" et schéma de Grothendieck et [3] : cribles de Grothendieck et conjecture de Goldbach. Il distingue les résultats démontrés, les analogies utiles et les points qui demandent encore un argument.

2. [1] : double crible, produit de corps finis et symétrie

Pour n pair, le texte définit

$$I_n = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \leq x \leq n/2\}, \quad R_n = \prod_{\substack{q \leq \sqrt{n}, \\ q \text{ premier}}} \mathbb{F}_q, A_n = \prod_{\substack{q \leq \sqrt{n}, \\ q \text{ premier}}} (\mathbb{F}_q \setminus \{0, \overline{n}\}),$$

et l'application diagonale $\rho_n : I_n \to R_n$ par réduction modulo les petits premiers. Le produit fibré $C_n = I_n \times_{R_n} A_n$ est l'ensemble des $x \in I_n$ tels que

$$q \nmid x(n-x) \quad \text{pour tout premier } q \leq \sqrt{n}.$$

Si $x \in C_n$, ni x ni $n-x$ n'a de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. Comme ces deux entiers sont strictement compris entre 1 et n, ils sont premiers. Ainsi

$$C_n \neq \varnothing \Longrightarrow n \text{ est somme de deux premiers.}$$

C'est une implication correcte.

2.1. Une condition suffisante, non nécessaire

La réciproque ne vaut pas en général : une décomposition de Goldbach peut comporter un petit terme premier $x \leq \sqrt{n}$. Le facteur correspondant à $q = x$ divise alors $x(n-x)$ et élimine cette décomposition de C_n. Le produit fibré ne représente donc que les décompositions dont les deux termes évitent tous les petits facteurs premiers. Il faut conserver l'implication, sans la transformer en équivalence.

2.2. Pourquoi la tour modulo q^k est ici redondante

La condition $q \mid x(n-x)$ ne dépend que de la classe modulo q. Passer à $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$ n'ajoute donc rien pour ce critère précis. Une tour pourrait être pertinente pour une autre condition, mais il faudrait identifier explicitement l'information nouvelle qui dépend de k.

2.3. L'involution

L'application $\alpha_q(x) = \overline{n} - x$ est une involution ensembliste, mais n'est en général pas un automorphisme d'anneau. Ses points fixes vérifient $2x = \overline{n} \pmod{q}$.

Pour q impair, il existe un unique point fixe $x = \overline{n}/2$; selon que q divise n ou non, il peut être exclu ou admissible.

Pour $q = 2$, le résidu admissible 1 est fixe.

Exemple : pour $n = 14$ et $q = 3$, l'unique résidu admissible 1 est fixe. Il est donc faux d'affirmer que toutes les orbites ont deux éléments ou que l'involution n'a jamais de point fixe.

Cette symétrie combinatoire ne doit pas être confondue avec l'obstacle de parité des cribles, qui concerne notamment la difficulté de distinguer les entiers ayant un nombre pair ou impair de facteurs premiers.

2.4. Niveau de distribution et non-vacuité

Le texte évoque une dimension de crible $\kappa = 2$, une borne $z = \sqrt{n}$ et un niveau supposé $D \simeq n$, d'où $s = \log D / \log z \simeq 2$. Cela ne suffit pas à garantir qu'il reste une décomposition qui traverse tous les filtres et qui soit de la forme premier-premier. Il faudrait définir la suite criblée, établir le niveau de distribution, contrôler la somme des restes, vérifier les hypothèses du théorème invoqué et justifier le seuil numérique.

De même, les conditions locales admissibles ne garantissent pas que l'image diagonale $\rho_n(I_n)$ rencontre leur produit. Le théorème des restes chinois assemble des congruences modulo un produit fini, mais ne garantit pas que la classe recherchée soit représentée dans l'intervalle précis I_n. C'est justement la rencontre globale qui reste à établir.

Bilan. À conserver : le produit fibré, l'implication vers Goldbach, la réserve concernant les petits termes premiers et l'analyse des points fixes. À nuancer : les conclusions de densité, de transversalité ou de non-vacuité tirées des seules données locales.

3. [2] : "Snurpf" et schéma de Grothendieck

Le texte associe à un entier n la famille de ses résidus modulo tous les premiers. Cela se formalise par

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{F}_p, \quad n \longmapsto (n \bmod p)_p.$$

Cette application est injective : si a et b ont les mêmes résidus modulo tout premier, chaque premier divise $a - b$. Si $a - b \neq 0$, il n'aurait pourtant qu'un nombre fini de diviseurs premiers ; donc $a = b$.

Il faut distinguer la famille complète des résidus et une famille finie. Le théorème des restes chinois ne détermine, pour un ensemble fini de premiers, qu'une classe modulo leur produit, pas un entier unique. L'injectivité utilise la famille de tous les premiers.

3.1. Interprétation par $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$

Les points fermés de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondent aux idéaux (p) et leur corps résiduel est $\kappa((p)) \simeq \mathbb{F}_p$. Un entier, section globale de l'anneau structural, se spécialise en $n \bmod p$ au point (p). La famille des résidus est donc la famille des spécialisations d'une même section globale.

Cette lecture est exacte et féconde, sans recours nécessaire aux nombres p-adiques. Mais le schéma n'est pas réductible à une collection de résidus : sa topologie, son faisceau d'anneaux et les relations de spécialisation en font également partie. Surtout, représenter les entiers ne démontre pas qu'il existe un x tel que x et $n - x$ soient premiers.

3.2. Formule explicite de Weil

L'analogie signal/Fourier évoque utilement une dualité entre données premières et données spectrales. Mais la formule explicite n'est pas littéralement une identité de Parseval ni une conservation d'énergie. Elle dépend d'une fonction test, de normalisations et des objets considérés. Il est plus prudent de parler d'une dualité de type Fourier–Mellin. L'analogie avec le traitement du signal reste heuristique.

3.3. Morphismes géométriques

Pour un morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, on a l'adjonction

$$f^* : \mathcal{F} \rightleftarrows \mathcal{E} : f_*, \qquad f^* \dashv f_*.$$

Le foncteur f^* préserve les limites finies et, comme adjoint à gauche, les colimites. Le foncteur f_*, adjoint à droite, préserve les limites, mais pas nécessairement les colimites. Cette distinction est correcte. Les exemples ensemblistes sont pédagogiques, mais ne doivent pas être confondus avec la définition de l'image directe d'un faisceau, qui se formule avec les sections sur les ouverts correspondants.

3.4. Bases de données relationnelles

Tables/objets, clés étrangères/flèches et instances/foncteurs vers les ensembles forment une analogie pédagogique utile, notamment lorsque les clés étrangères sont des fonctions totales. Les valeurs nulles, les contraintes d'unicité, les attributs et les relations plusieurs-à-plusieurs demandent des aménagements : il ne s'agit pas d'une équivalence immédiate entre toute base SQL et une catégorie.

Bilan. Le point le plus solide est l'injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow \prod_p \mathbb{F}_p$ et sa lecture par les corps résiduels de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. La partie sur les morphismes géométriques est globalement correcte sous réserve de préciser les catégories. L'analogie avec Weil doit rester heuristique.

4. [3] : cribles de Grothendieck et Goldbach

Soit n pair et x un premier impair avec $3 \leq x \leq n/2$. Si

$$x \not\equiv n \pmod{p} \quad \text{pour tout premier } p \leq \sqrt{n},$$

alors $n - x$ est premier. En effet, $p \mid n - x$ équivaut à $x \equiv n \pmod{p}$. Aucun premier $\leq \sqrt{n}$ ne divise donc $n - x$. Si celui-ci était composé, il aurait un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée, donc à $\sqrt{n}$. Comme $n - x > 1$, il est premier.

4.1. Le candidat n'est pas produit par le lemme

Le lemme certifie un candidat, mais ne prouve pas qu'un tel premier x existe. Vérifier qu'un candidat convient et démontrer l'existence d'un candidat sont deux tâches distinctes ; la seconde est précisément la difficulté de Goldbach.

4.2. Différence avec [1]

[1] élimine les x pour lesquels un petit premier divise $x(n-x)$, donc élimine aussi certains candidats x qui sont eux-mêmes de petits premiers. [3] suppose x premier et ne teste que la divisibilité de $n - x$. Cette formulation est mieux adaptée, mais ne fournit pas l'argument d'existence.

4.3. Topos du monoïde multiplicatif

Dans le cadre du monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$, les cribles sont des sous-ensembles stables par multiplication. Or $x \not\equiv n \pmod{p}$ n'est pas stable par multiplication en général : on peut avoir $x \not\equiv n$ mais $mx \equiv n \pmod{p}$ pour un certain m. La transformation $x \mapsto n - x$ fait intervenir l'addition ; le topos multiplicatif ne traduit donc pas directement cette opération comme stabilité d'un crible. Cette conclusion vaut pour ce cadre précis, et non pour tout formalisme géométrique possible.

4.4. Inclusion-exclusion

Une formule exacte d'inclusion-exclusion peut compter les entiers qui évitent un ensemble fini de classes interdites. Mais le nombre de termes, de l'ordre de $2^{\pi(z)}$, ne permet pas à lui seul de conclure que l'erreur totale est du même ordre que le terme principal ou plus petite. Il faut calculer les densités locales, établir le terme principal, contrôler la somme des erreurs et montrer que l'erreur finale lui est inférieure.
Bilan. Le lemme de primalité est correct. Il vérifie un candidat, mais ne le produit pas. Le langage des cribles et des topos ne dispense pas de démontrer la non-vacuité.

5. Synthèse transversale

Trois niveaux doivent rester distincts.

Représentation. Un entier est déterminé par tous ses résidus premiers ; cette représentation est injective et s'interprète sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Filtrage local. Les conditions de divisibilité de x et de $n - x$ s'expriment dans les corps finis $\mathbb{F}_p$. Les produits de corps et les produits fibrés donnent un langage précis à ces contraintes.

Existence globale. Il reste à prouver qu'un entier premier x et son complément $n - x$ satisfont simultanément les conditions requises. Ni l'injectivité de la représentation, ni la compatibilité locale, ni la seule existence d'une structure catégorique ne garantissent cette rencontre.

Les résultats réutilisables sont donc : l'injection $n \mapsto (n \bmod p)_p$; son interprétation par les corps résiduels ; la description exacte du produit fibré de [1] ; l'implication de sa non-vacuité vers Goldbach ; le lemme de [3] ; l'analyse des points fixes de l'involution ; et le constat que le topos multiplicatif ne rend pas stable la condition affine étudiée.

La question reste

$$\forall n \geq 4,\ n \text{ pair}, \quad \exists x \text{ premier tel que } n - x \text{ soit premier ?}$$

Dans le langage du double crible, il faut montrer qu'un ensemble de candidats admissibles contient au moins un entier premier. Dans le langage géométrique, il faut établir une rencontre avec les points issus des entiers recherchés. Dans le langage des résidus, il faut prouver qu'une configuration de contraintes locales est réalisée par un entier convenable. Ces reformulations éclairent le problème, mais ne le résolvent pas à elles seules.

6. Conclusion

Le rapprochement le plus solide des trois textes est l'interprétation de la famille des résidus premiers comme les spécialisations d'un entier dans les corps résiduels de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. C'est une interprétation exacte, sans recours nécessaire aux nombres p-adiques, qui donne un cadre géométrique à l'intuition de "Snurpf".

Le produit fibré de [1] et le lemme de [3] sont également utiles, à condition de conserver leur portée logique. Le premier fournit un critère suffisant qui peut éliminer certains décomposants ; le second certifie la primalité du complément d'un candidat premier, mais ne prouve pas l'existence de ce candidat.

Le point décisif n'est donc pas d'ajouter du vocabulaire catégorique ou topos-théorique, mais de trouver un argument établissant une rencontre globale ou une non-vacuité que les seules conditions locales ne garantissent pas. Un formalisme de Grothendieck pourrait devenir substantiel s'il permettait de construire un tel argument ou de faire apparaître un invariant nouveau. Dans les textes examinés, cette étape n'est pas encore franchie.