

Quelques comètes : indicatrice d'Euler, somme des diviseurs, nombre de décompositions de Goldbach...

Denise Vella-Chemla

1.1.11

1 Cinq comètes

Les cinq graphiques ci-dessous, obtenus avec gnuplot, présentent les fonctions :

- indicatrice d'Euler (φ),
- somme des diviseurs d'Euler (σ). Une formule de calcul par récurrence de cette somme est fournie dans l'article "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs". Nous avons utilisé pour la calculer une autre formule de récurrence, fournie par Dominique Giard sur la toile dans la séquence A000203 de l'Encyclopédie en ligne des séquences d'entiers (OEIS),
- nombre de diviseurs,
- nombre de décompositions de Goldbach, i.e. nombre de façons différentes d'écrire un nombre pair $2n$ comme somme de deux nombres premiers.
- plus petit décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus petit nombre premier p tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,
- et enfin, plus grand décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n p tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,

Toutes ces visualisations ont pu être réalisées grâce à des outils spécifiques fournis par Daniel Diaz, concepteur de Gnu-Prolog, que l'on remercie vivement.

On constate que la comète de la fonction φ semble comme inversée par rapport aux comètes de σ ou *Goldbach*, des bandes de points plus concentrés apparaissant "à l'intérieur" de la comète, la "première" d'entre elles se trouvant "tout en haut" de la comète.

Les deux comètes de σ et *Nombre_de_décompositions_de_Goldbach* semblent présenter une structure similaire, même si l'apparence de celle de la somme des diviseurs est plus linéaire que celle du nombre des décompositions de Goldbach. Si on ramène les trois premières comètes sur un même graphique, la comète des nombres de décompositions de Goldbach se retrouve tout en bas, comme écrasée, car ses valeurs sont bien moindres que celles des deux autres comètes (Figure 7).

On constate que les comètes associées au nombre de diviseurs et au plus petit décomposant de Goldbach se "ressemblent". Visualisons-les sur un même graphique, la figure 8.

2 Mathématiques expérimentales

Dans la comète de Goldbach, on réussit à isoler les lignes de concentration des points qui correspondent aux nombres de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier (Figures 9, 10 et 11).

On pense qu'on obtiendra également certaines concentrations de points par l'élévation à la puissance des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation en figure 12 : les décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe.

Quant aux décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^3$ avec p premier par exemple, ils semblent se trouver sur les mêmes tiges que les nombres de la forme $2p$ ou $6p$ mais il faudrait le confirmer. Sur le graphique en figure 13, on voit les douze points rouges correspondant aux nombres de décompositions des doubles de cubes¹.

Dans la comète de la somme des diviseurs d'Euler, on réussit à reproduire les mêmes concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier (Figures 14, 15 et 16).

On reproduit également la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation en figure 17 : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe².

Dans la comète de l'indicatrice d'Euler, on réussit à produire des concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier (les $2p$ sont à peu près au milieu de la comète, les $6p$ plus bas et les $30p$ encore plus bas) (Figures 18, 19 et 20).

Ce sont les points d'abscisse p qui semblent fournir la limite haute de la comète de φ (Figure 21).

On reproduit enfin la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation en figure 22 : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la même tige de la gerbe que les $2p^3$.

Pour que ces visualisations soient lisibles, on doit comprendre que les outils permettent de n'afficher qu'un certain nombre de points pris au hasard dans un fichier de données. Si l'on choisit d'afficher tous les nombres de décompositions, on obtient le graphique de la figure 23 ci-dessous, ininterprétable.

Fournissons quelques valeurs du nombre de décompositions de Goldbach des doubles de premiers (qui fournissent les valeurs minimales, en bas de la comète).

¹Il n'y a que 12 petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$ et sur celle des $6p$ en s'arrachant un peu les yeux mais les zooms-écrans permettent de les retrouver aisément.

²Il n'y a que 25 petits points rouges à retrouver sur la tige basse ; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...

³Il y a quelques petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...

n	$NbDecompG(n)$	$Log(n)$
$9999998 \sim 10^7$	28983	7
$19999982 \sim 2.10^7$	53364	7.3
$29999962 \sim 3.10^7$	75777	7.47
$39999998 \sim 4.10^7$	97514	7.6
$49999966 \sim 5.10^7$	118760	7.69
$59999998 \sim 6.10^7$	139046	7.77
$69999938 \sim 7.10^7$	159569	7.84
$79999966 \sim 8.10^7$	179764	7.9
$89999942 \sim 9.10^7$	199455	7.95
$99999982 \sim 10^8$	218411	8

On constate que le rapport $\frac{218411}{28983} = 7.53$ semble proche du logarithme⁴.

Il semblerait également, au vu de ces seules valeurs, que la fonction $NbDecompG$ est additive mais non pas au sens habituel utilisé en théorie des nombres qui veut que $f(a.b) = f(a) + f(b)$ mais plutôt au sens général qui fait que $f(a + b) = f(a) + f(b)$. On constate non seulement que $f(a + b) \sim f(a) + f(b)$ mais également que $f(\lambda a) \sim \lambda f(a)$.

Testons si la fonction $NbDecompG$ est multiplicative. Pour cela, fournissons-en quelques valeurs :

n	$NbDecompG(n)$
$2026 = 2.1013$	32
$4054 = 2.2027$	55
$4106702 = 2.1013.2027$	13561
$8213404 = 2.1013.2.2027$	24549
$2053352 = 1013.2027 + 1$	9187

$NbDecompG(a.b)$ a une valeur différente de $NbDecompG(a).NbDecompG(b)$.

Enfin, fournissons les valeurs et la visualisation des nombres de décompositions de Goldbach de certains multiples des primorielles équitablement répartis jusqu'à 10 millions.

⁴A noter : les nombres premiers 4 999 999, 19 999 999 et 29 999 999 sont particulièrement rigolos. On peut tester la primalité des nombres en utilisant le logiciel de factorisation par la méthode des courbes elliptiques à l'adresse <http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM>

n	$NbDecompG(n)$
6	1
30	3
210	19
2310	114
30030	905
60060	1564
90090	2135
150150	3215
210210	4273
330330	6181
390390	7094
510510	9493
1021020	17075
1531530	24044
2552550	37302
3573570	49655
5615610	73205
6636630	84638
8678670	106360
9699690	124180

Comme on peut le constater, ces nombres semblent fournir les valeurs limites hautes de la comète (Figure 24).

Les outils permettent enfin, et cela n'est pas la moindre des choses, de voir si une fonction définie par l'utilisateur minore ou pas le nombre de décompositions de Goldbach (combien de fois, pour qui, etc).

J'ai choisi de visualiser sur la figure 25 la fonction de minoration suivante, découlant de la méthode dite par "pliage du tissu" dans laquelle le produit s'effectue sur les nombres p premiers impairs inférieurs ou égaux à $2\sqrt{x} + 1$:

$$MinoreGoldbach(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_p \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

Des tests plus poussés montrent que, quoique proche du nombre de décompositions de Goldbach (la différence maximum enregistrée entre le résultat de cette fonction et le nombre de décompositions de Goldbach est de 43 jusqu'à 10^7), elle ne le minore pas.

Par contre, en divisant le résultat de la fonction proposée par $\log(x)$ ou bien par $\log(\log(x))$, on obtient une minoration systématique, mais en obtenant des résultats en moyenne plus éloignés des points de la comète (les outils permettent d'obtenir un rapport moyen de 13.94 dans le premier cas et de 2.5 dans le deuxième cas). La première formule, bien que non minorante, permettait d'obtenir un rapport moyen de 0.92, qui représente le fait que la formule "collait" bien aux points de la comète.

Je remercie vivement le professeur Claude-Paul Bruter qui m'a encouragée tout au long de ces expérimentations.

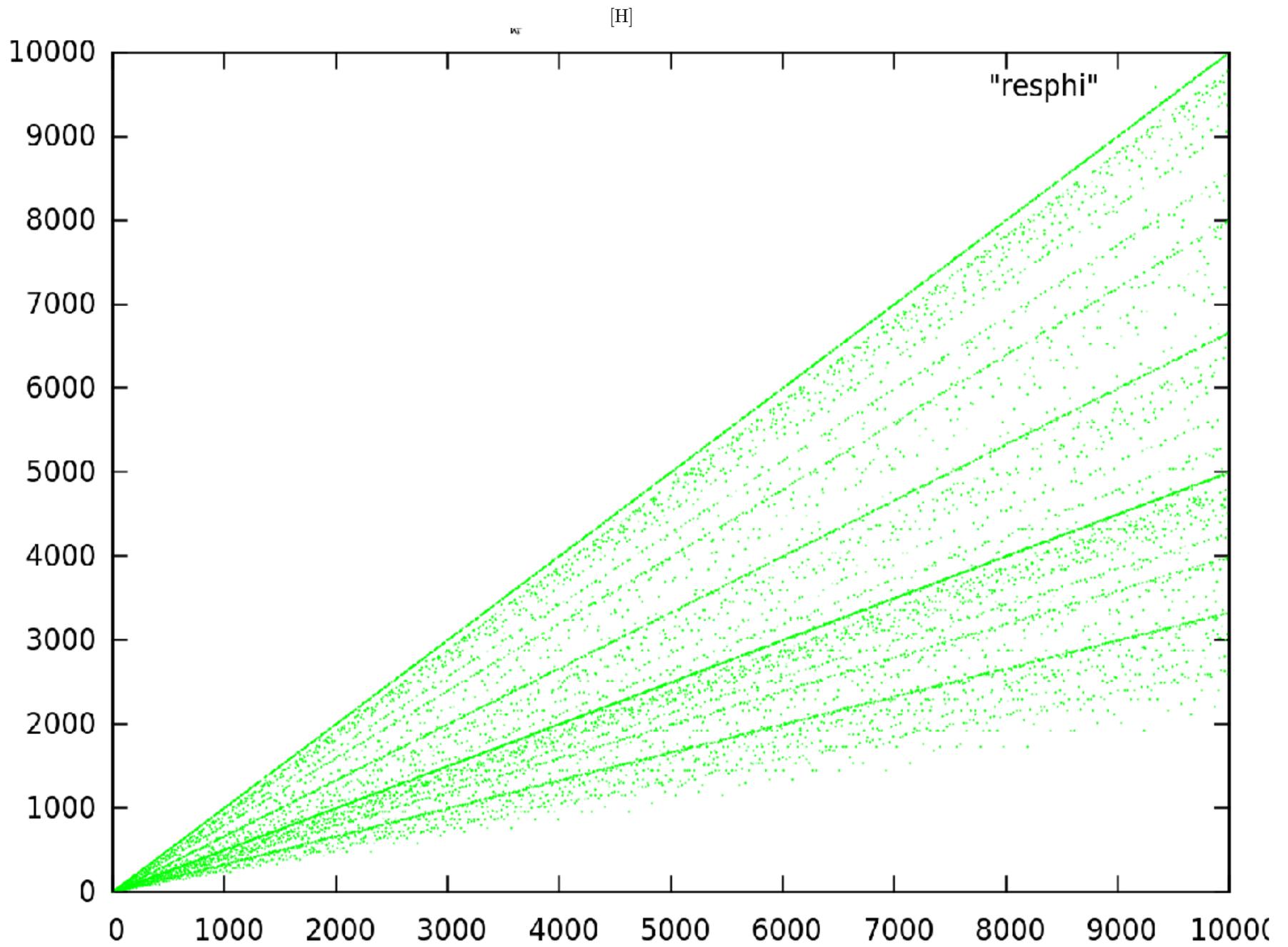


Fig. 1 : Indicateur d'Euler

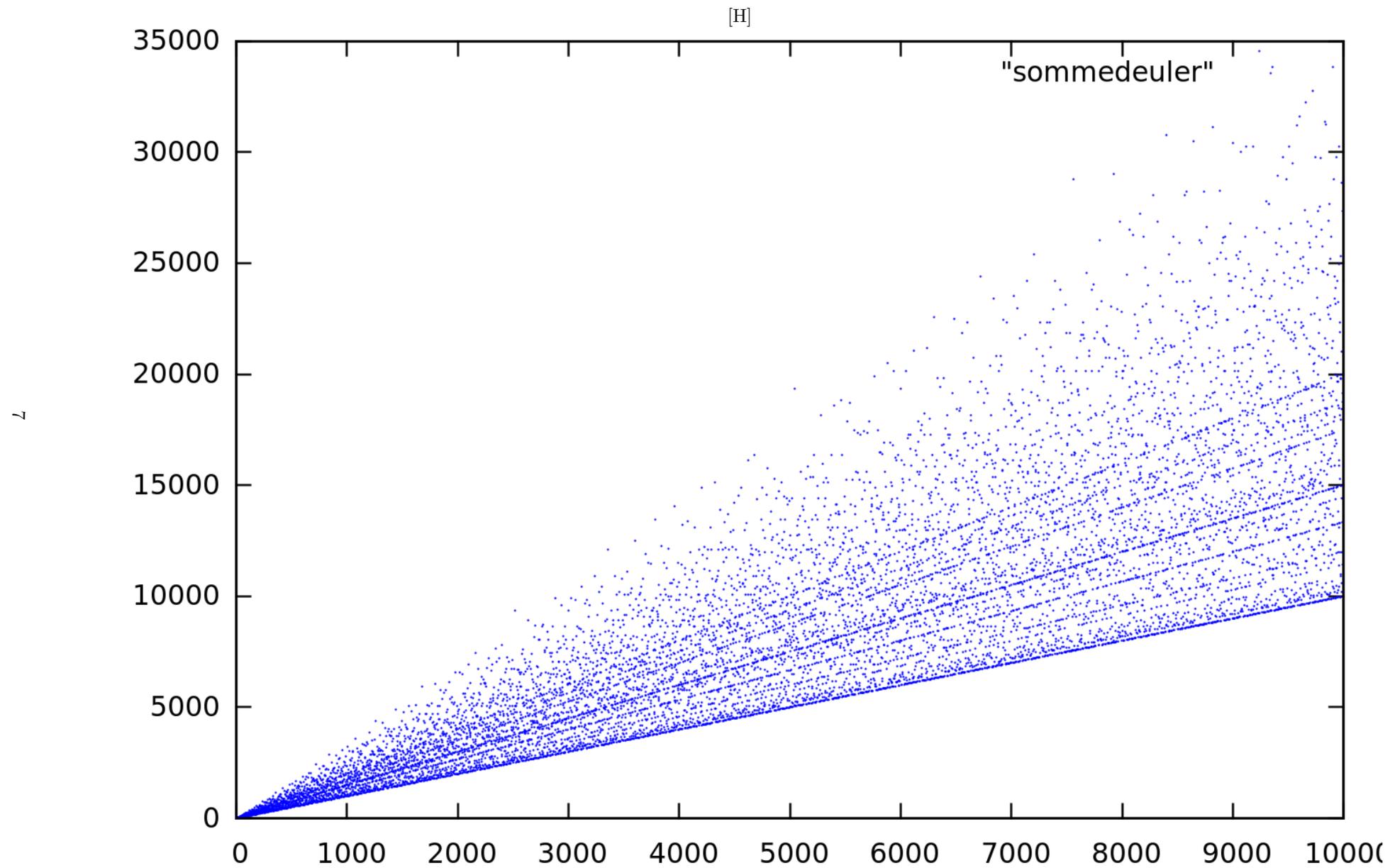


Fig. 2 : Somme des diviseurs

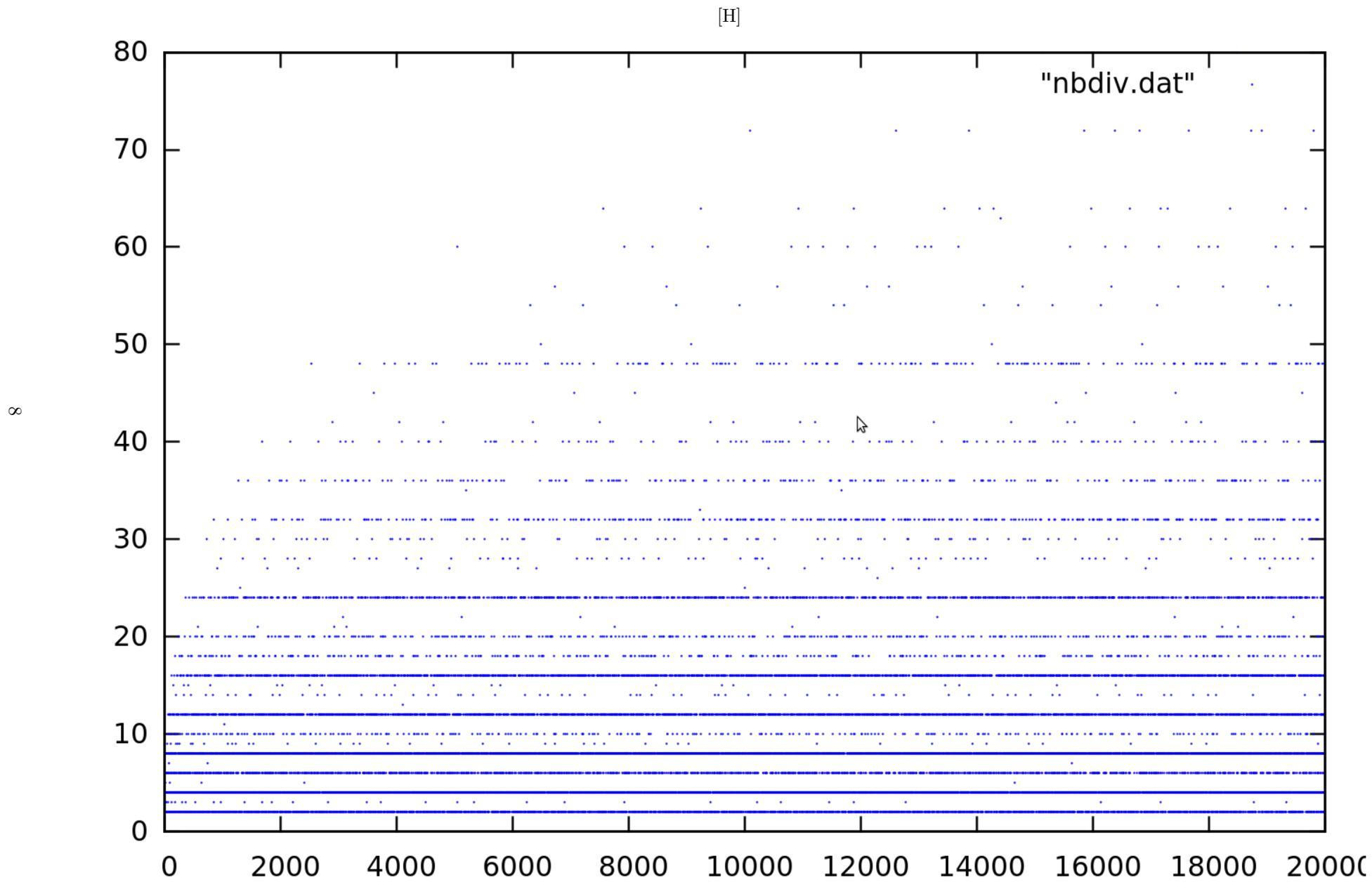


Fig. 3 : Nombre de diviseurs

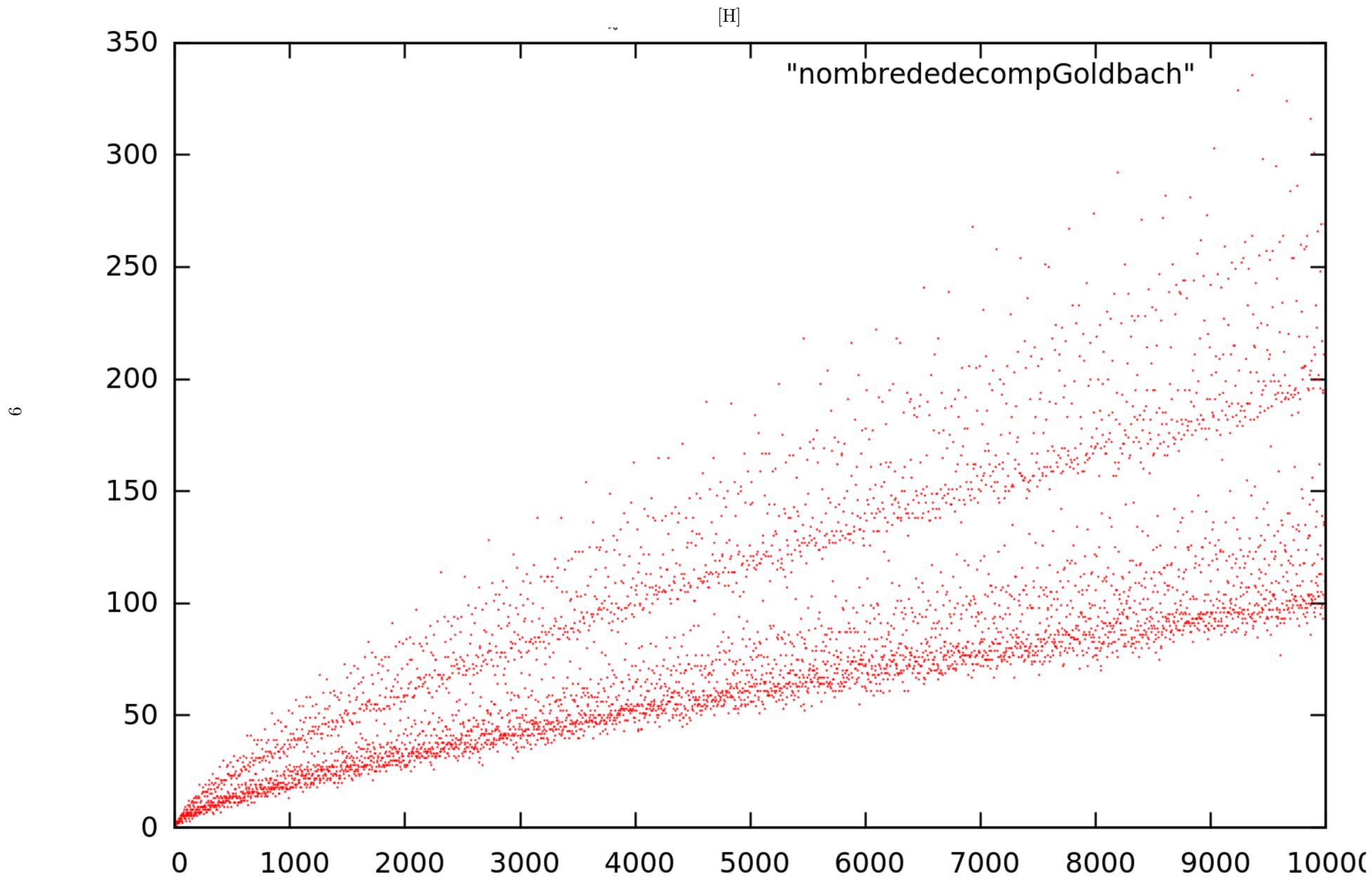


Fig. 4 : Nombre de décompositions de Goldbach

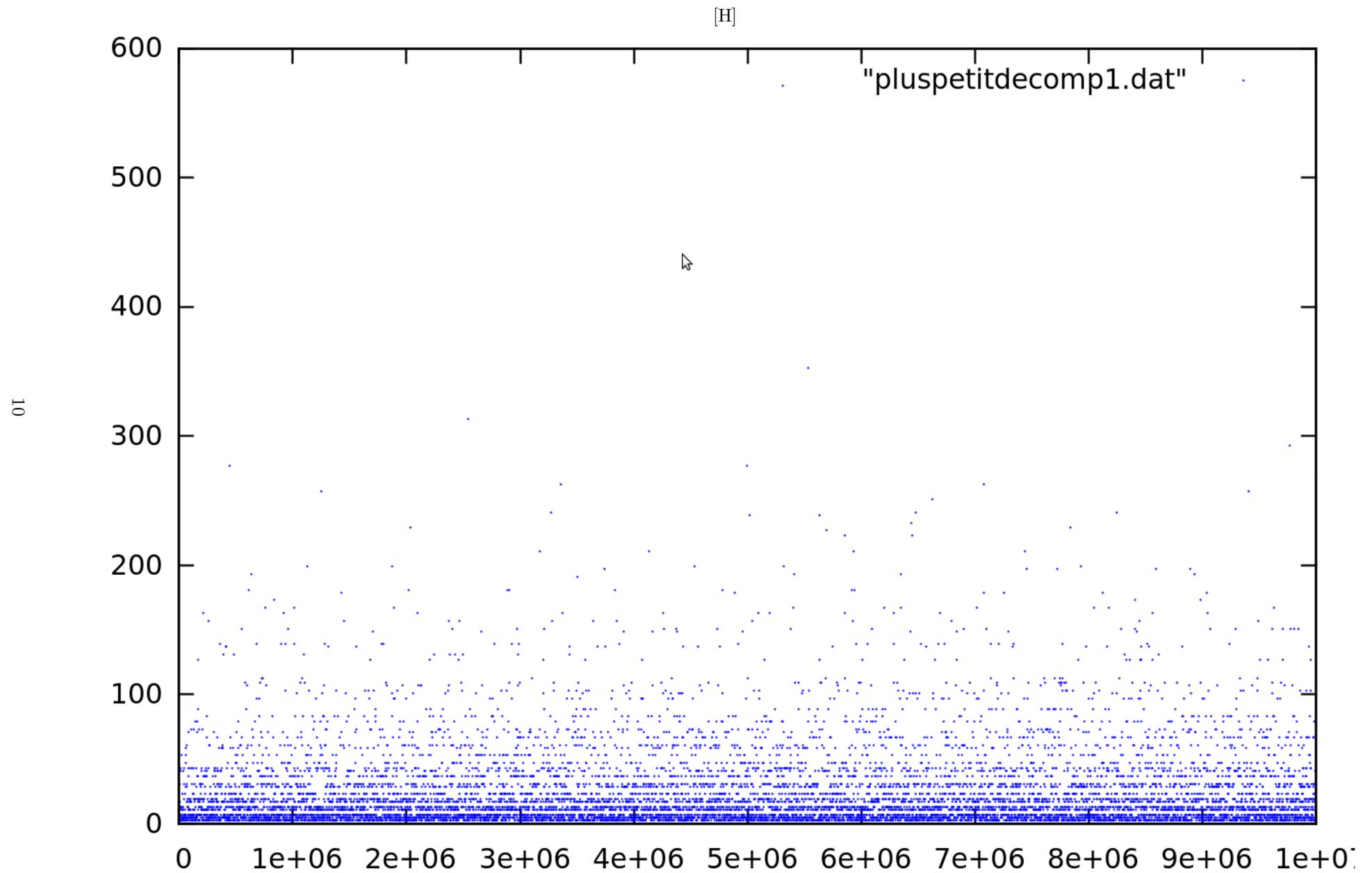


Fig. 5 : Plus petit nombre premier intervenant dans une décomposition de Goldbach

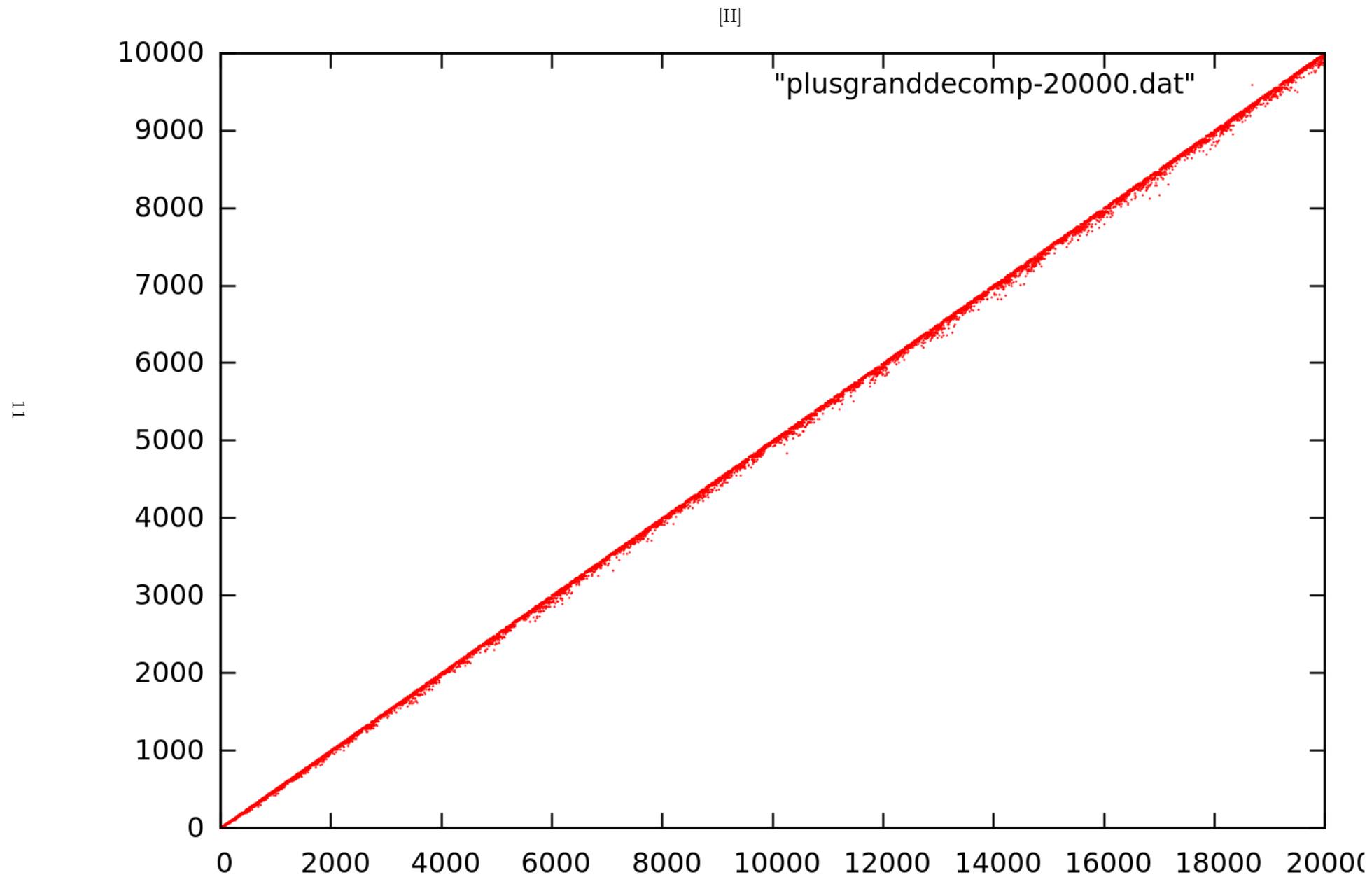


Fig. 6 : Plus grand nombre premier intervenant dans une décomposition de Goldbach

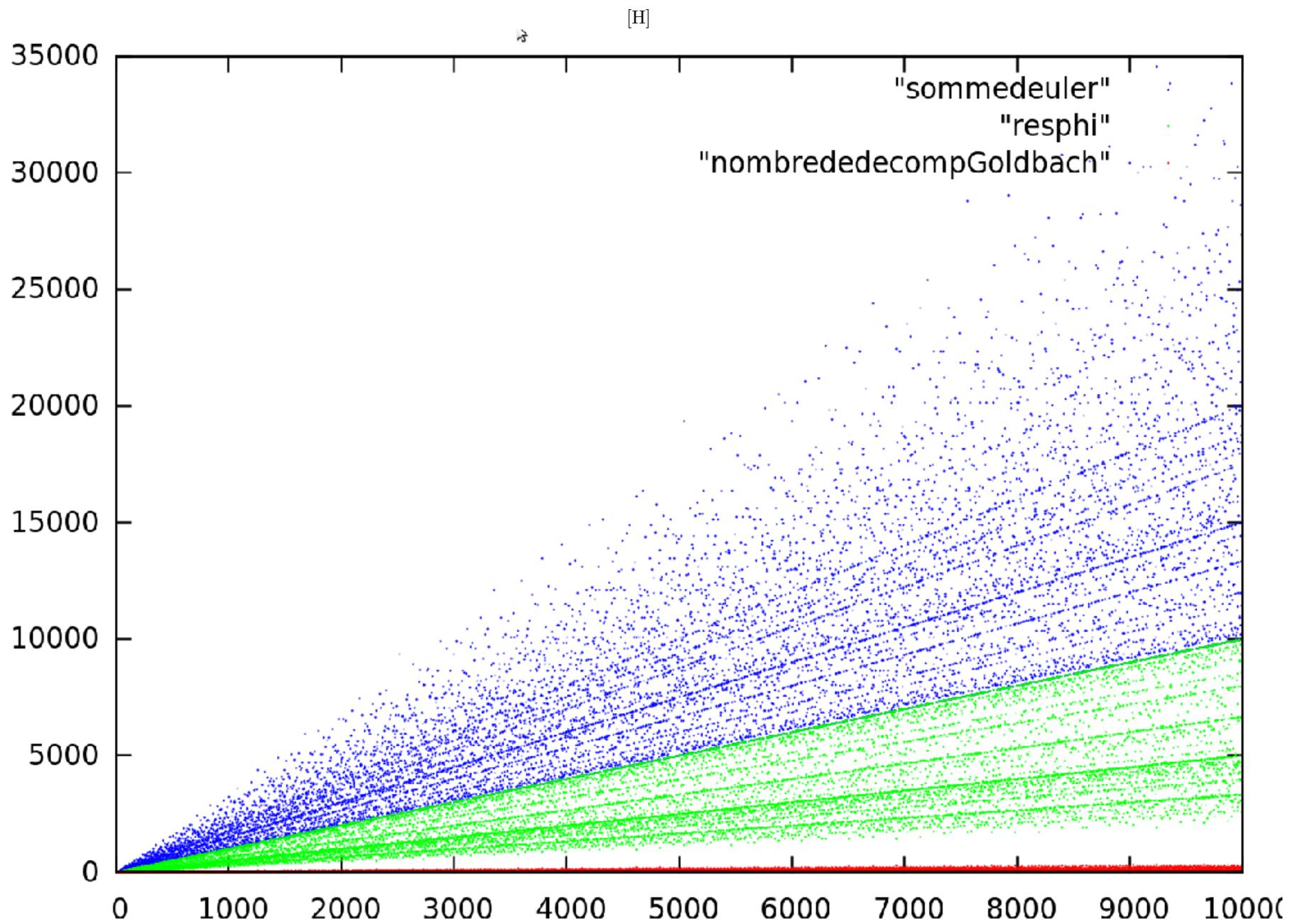


Fig. 7 : σ , φ et Nombre de décompositions de Goldbach

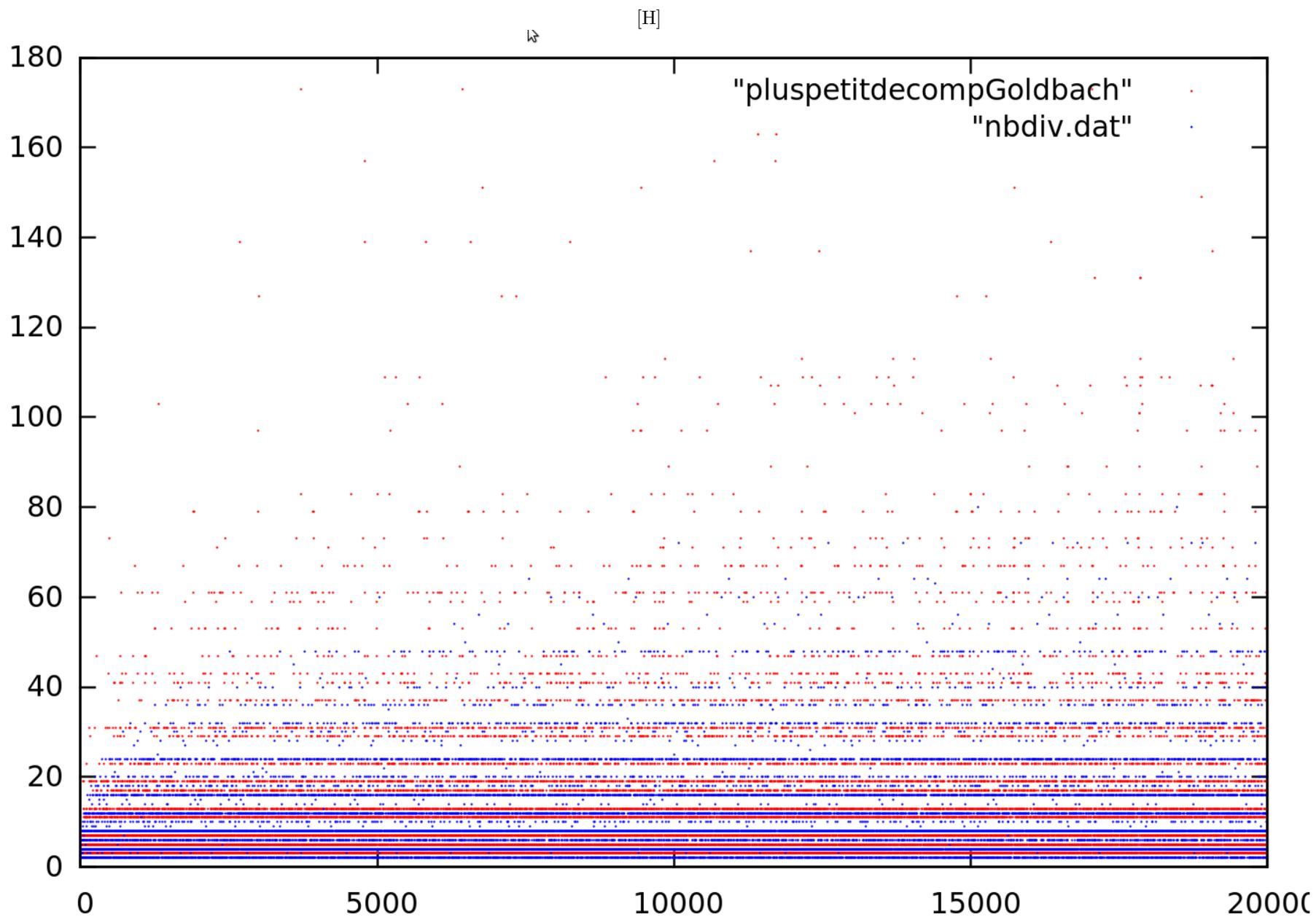


Fig. 8 : Plus petit nombre premier intervenant dans une décomposition de Goldbach et nombre de diviseurs

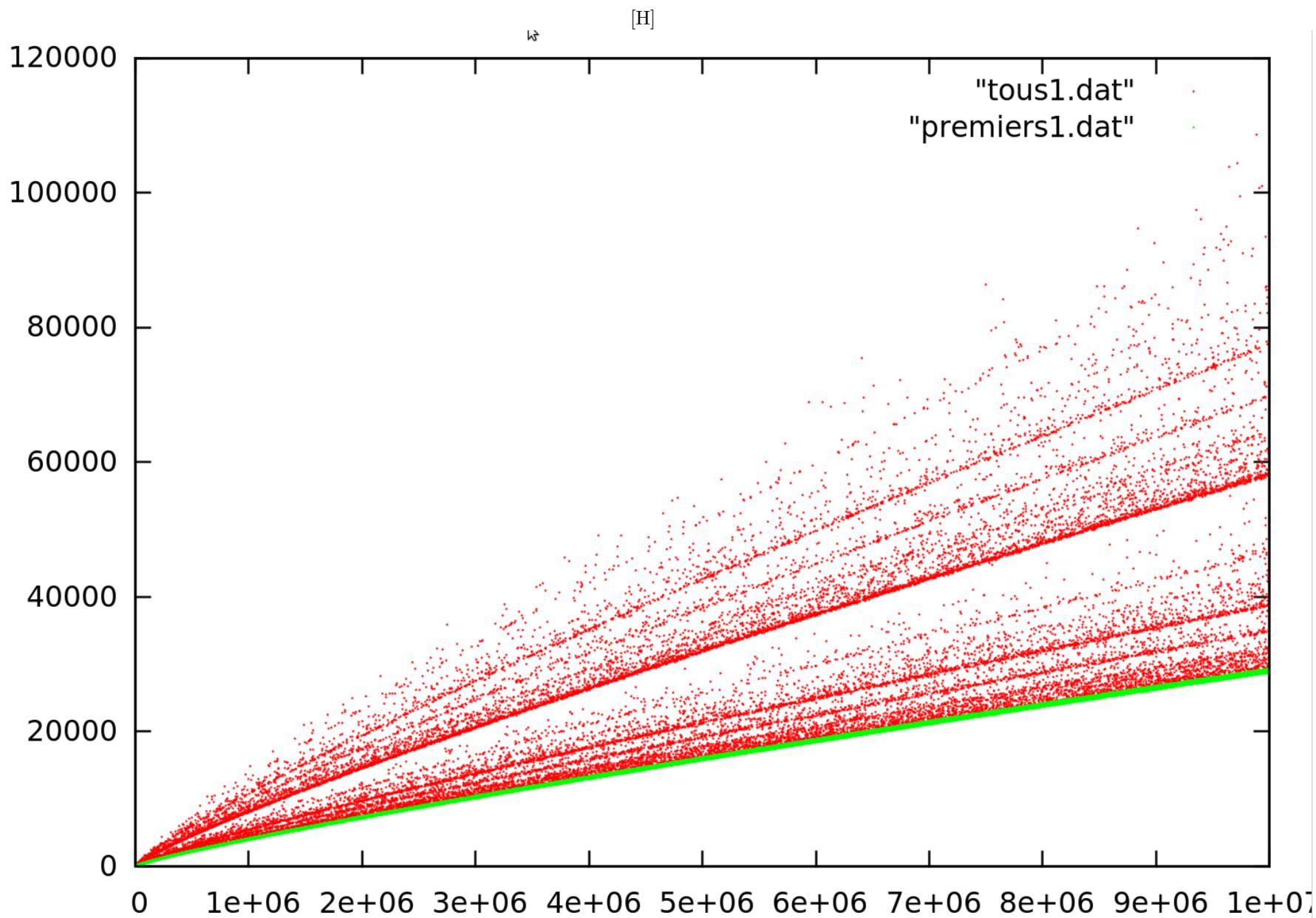


Fig. 9 : Nombre de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p$ (doubles de premiers)

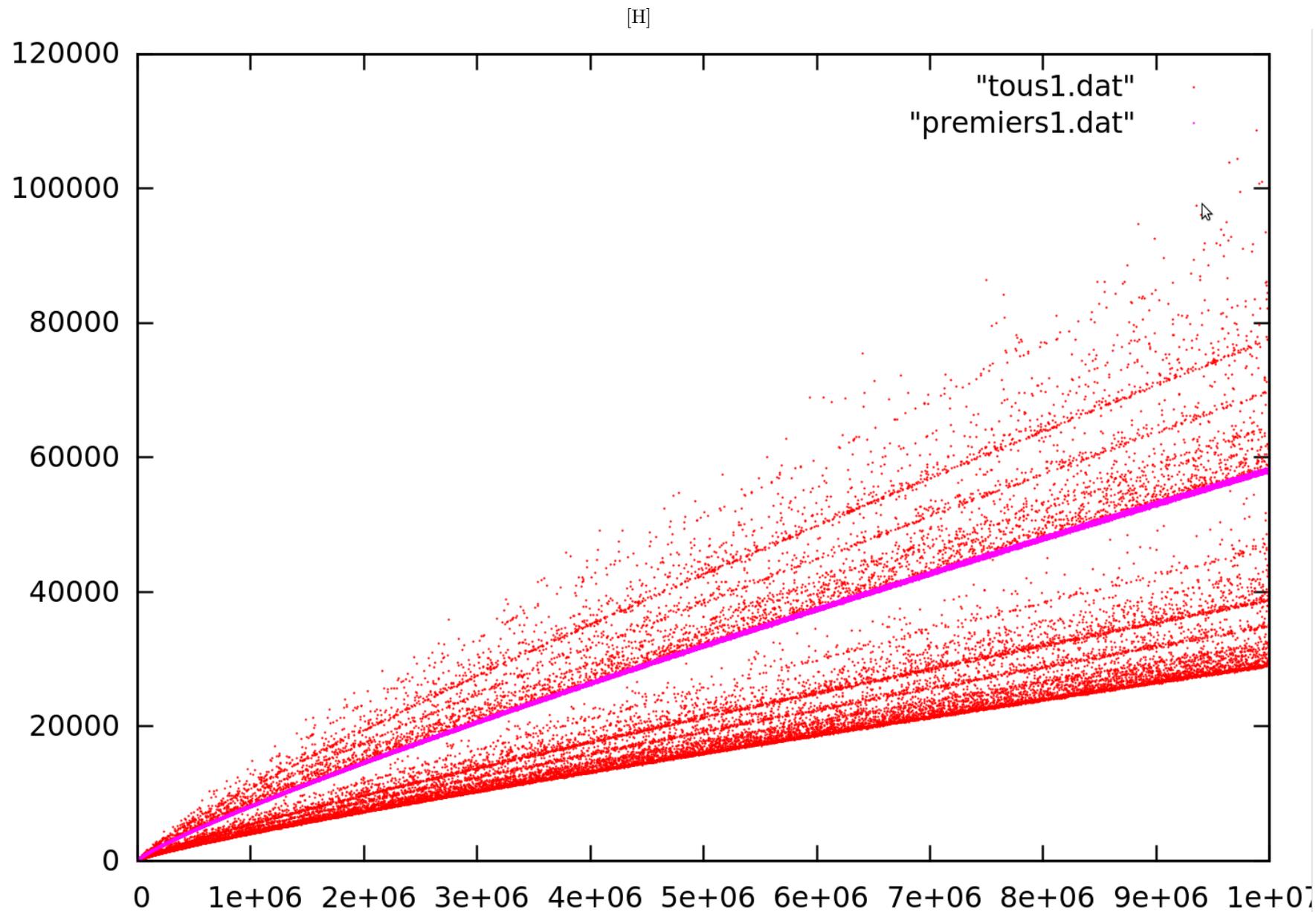


Fig. 10 : Nombre de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $6p$

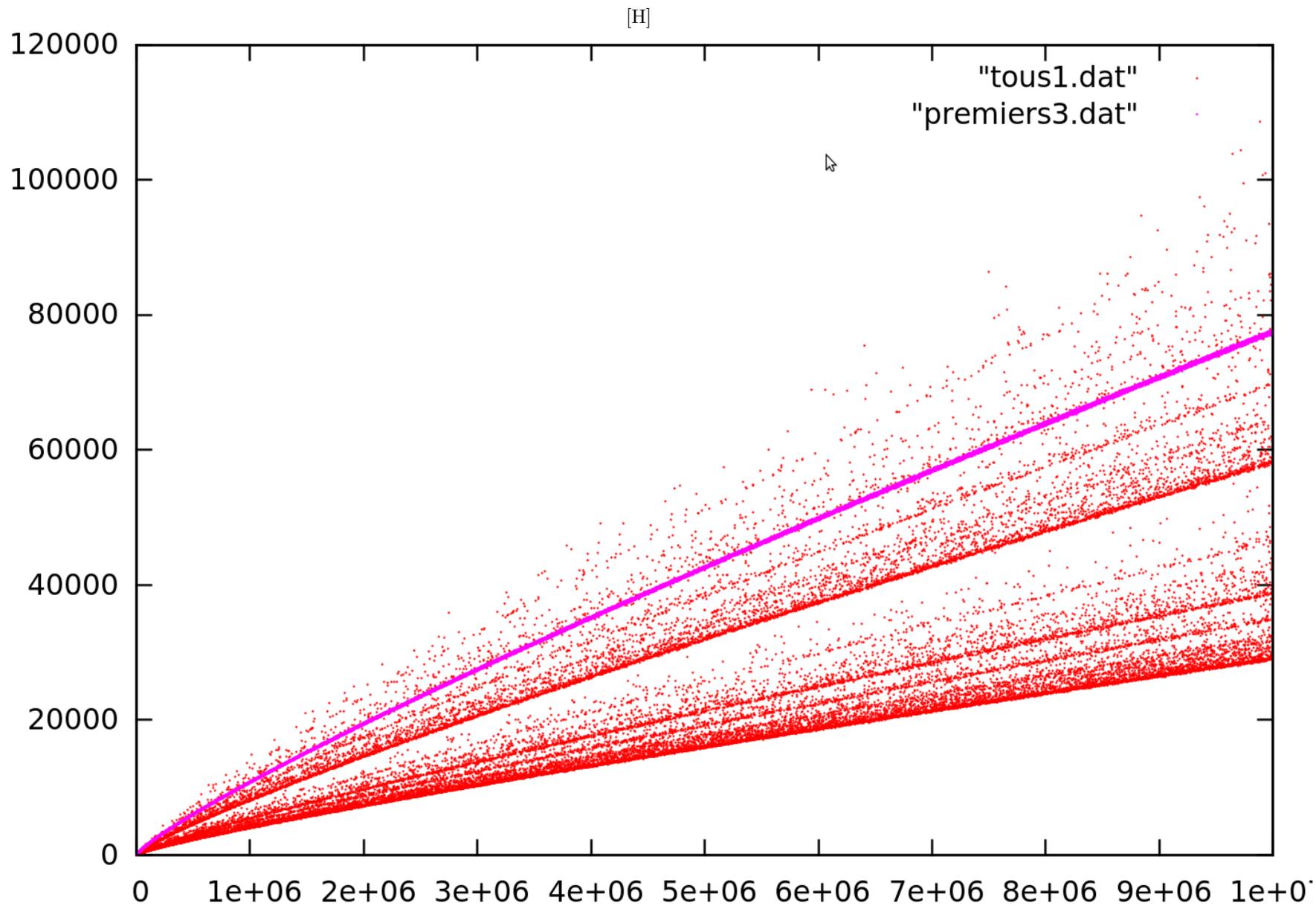


Fig. 11 : Nombre de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $30p$

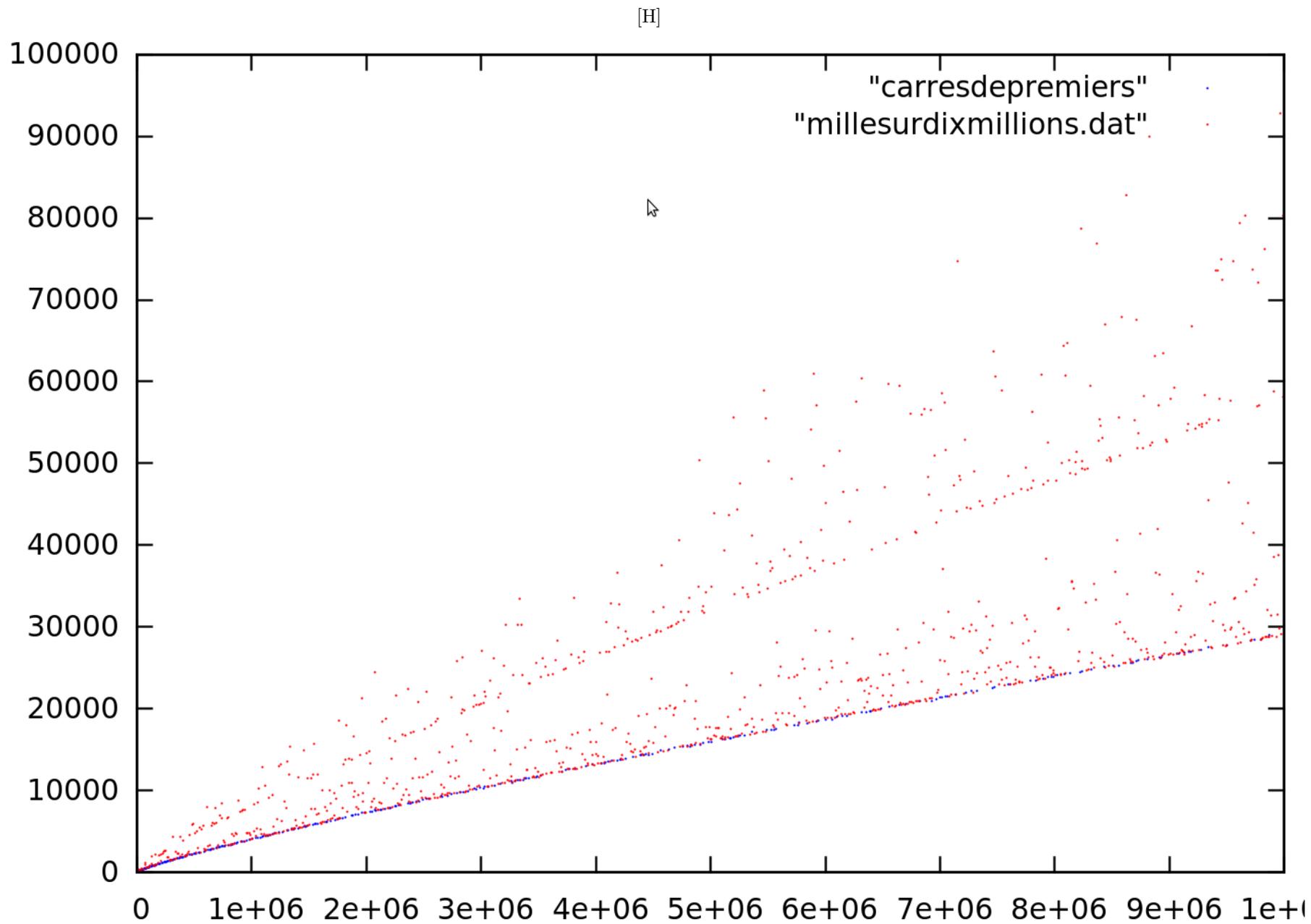


Fig. 12 : Les nombres de décompositions de Goldbach des doubles de carrés de premiers sont sur la première tige de concentration de points.

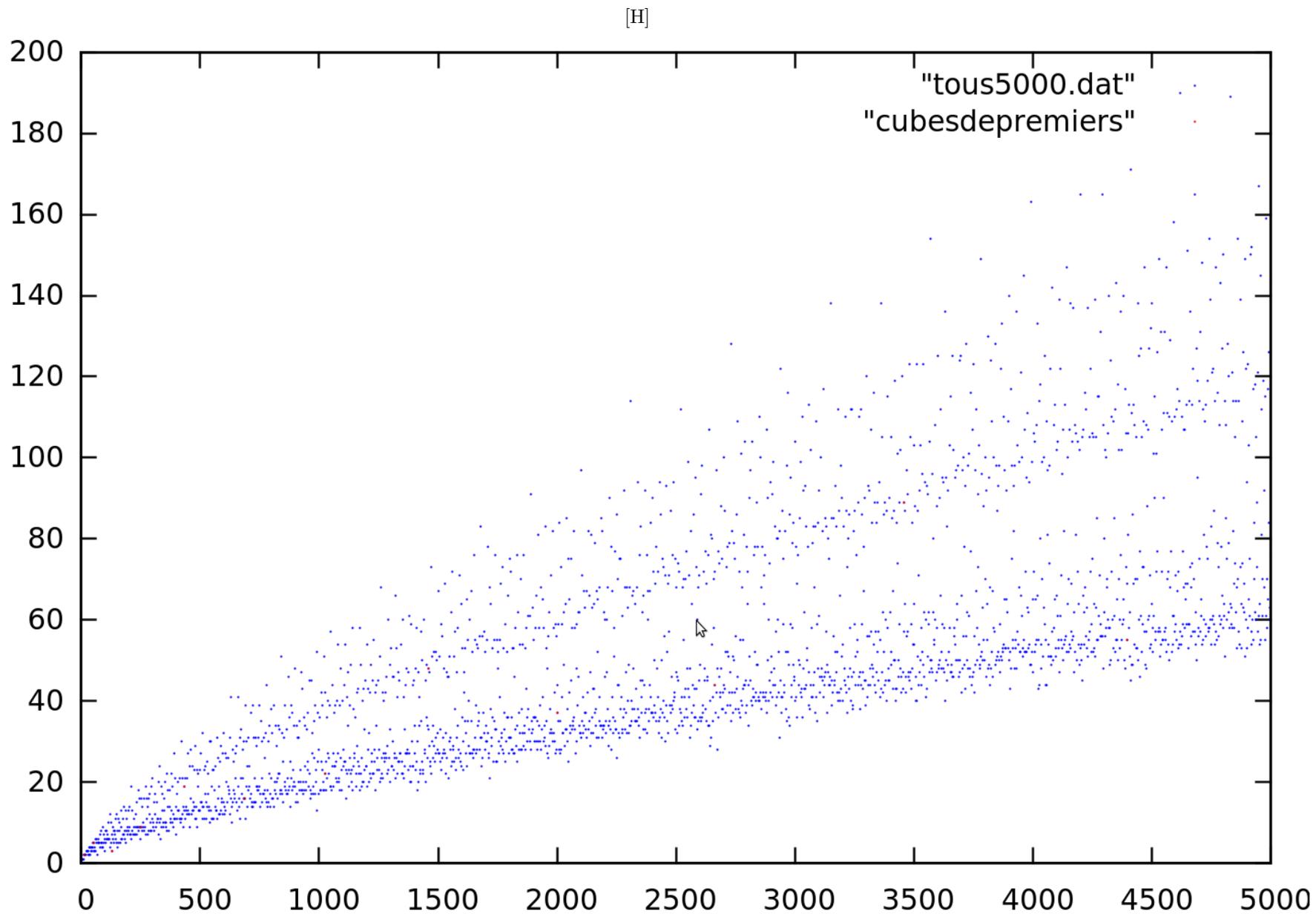


Fig. 13 : Les doubles de cubes de premiers sont sur la deuxième tige de concentration de points.

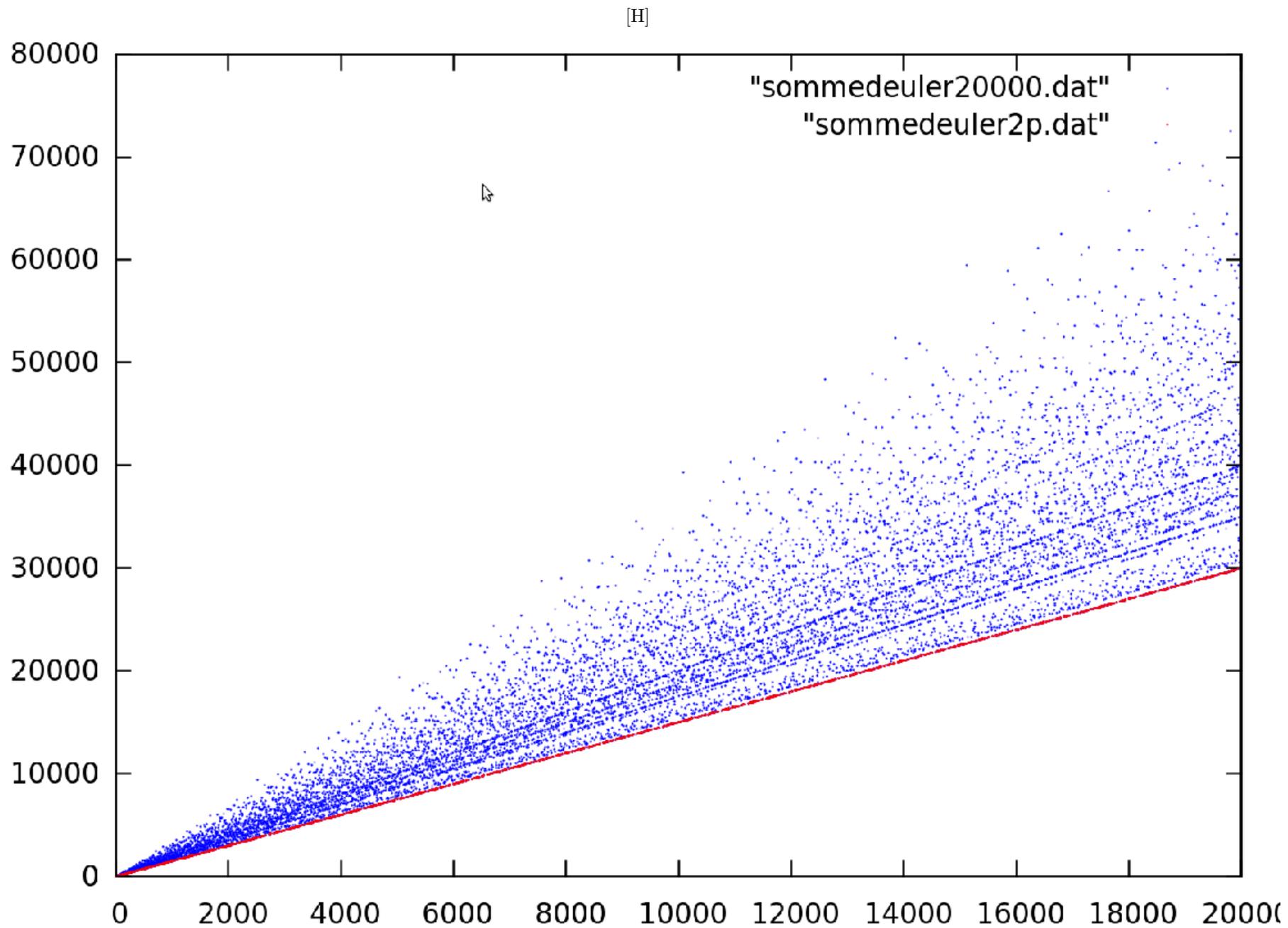


Fig. 14 : σ appliquée aux nombres de la forme $2p$ (doubles de premiers)

[H]

20

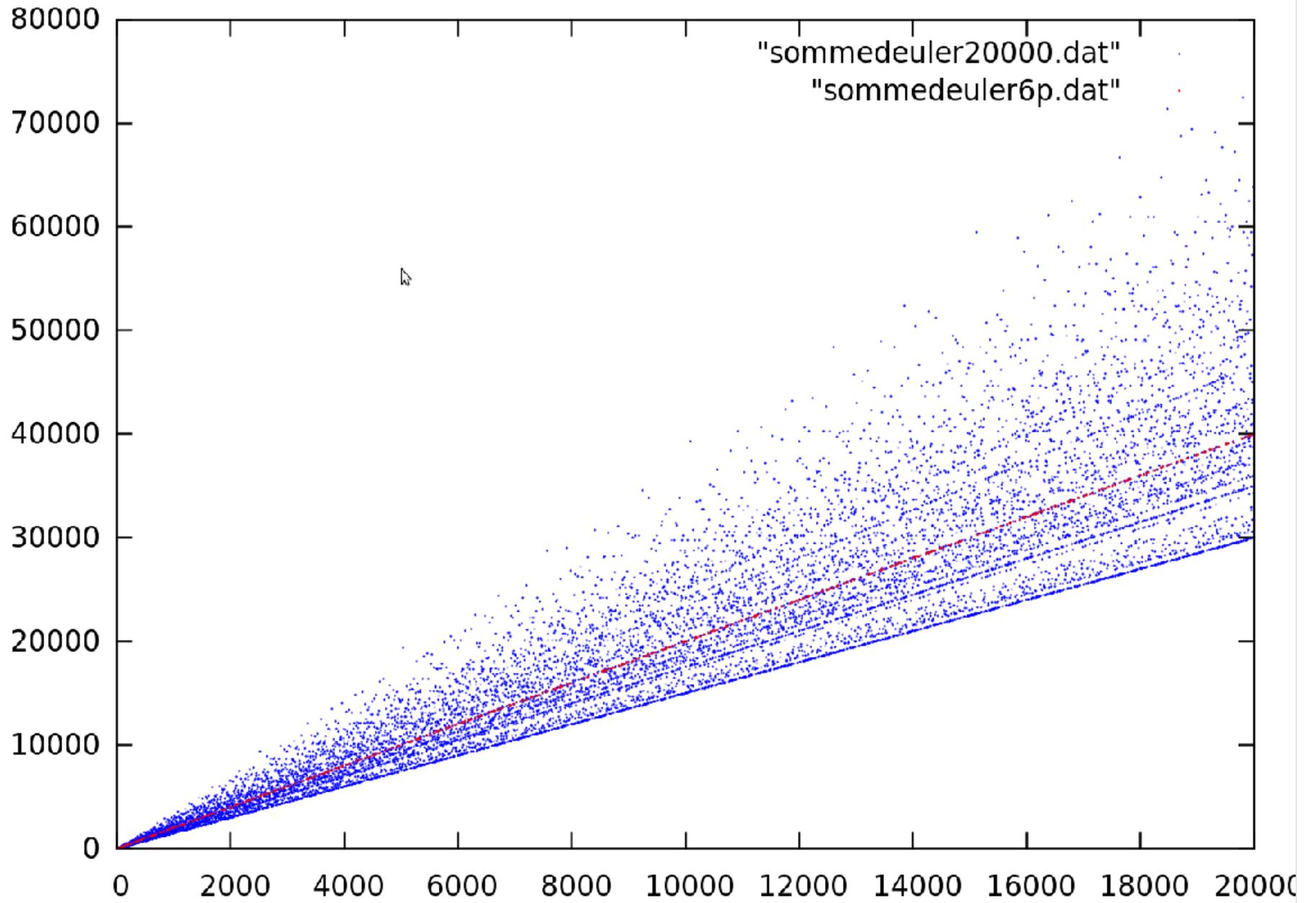
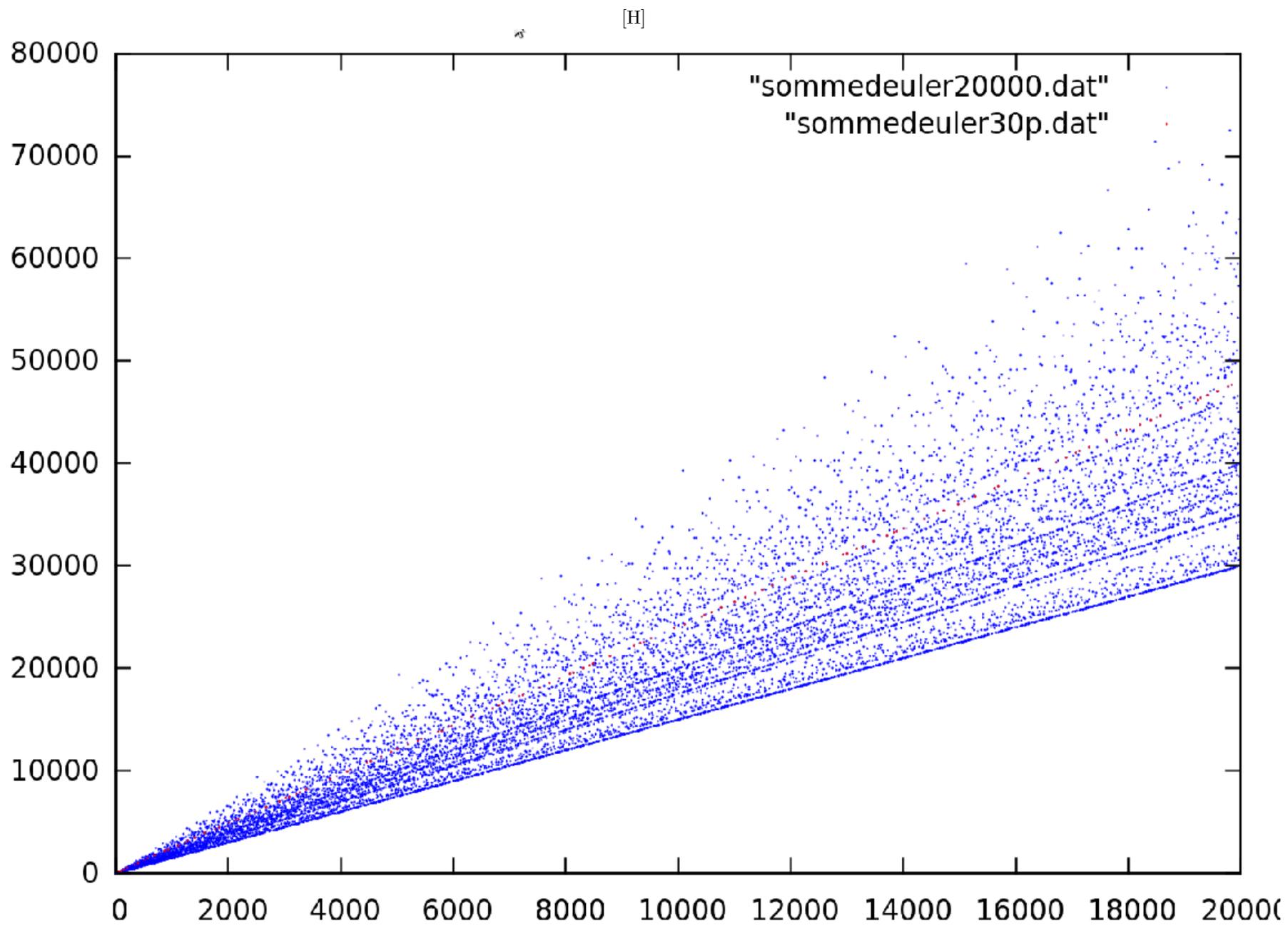


Fig. 15 : σ appliquée aux nombres de la forme $6p$

Fig. 16 : σ appliqué aux nombres de la forme $30p$

[H]

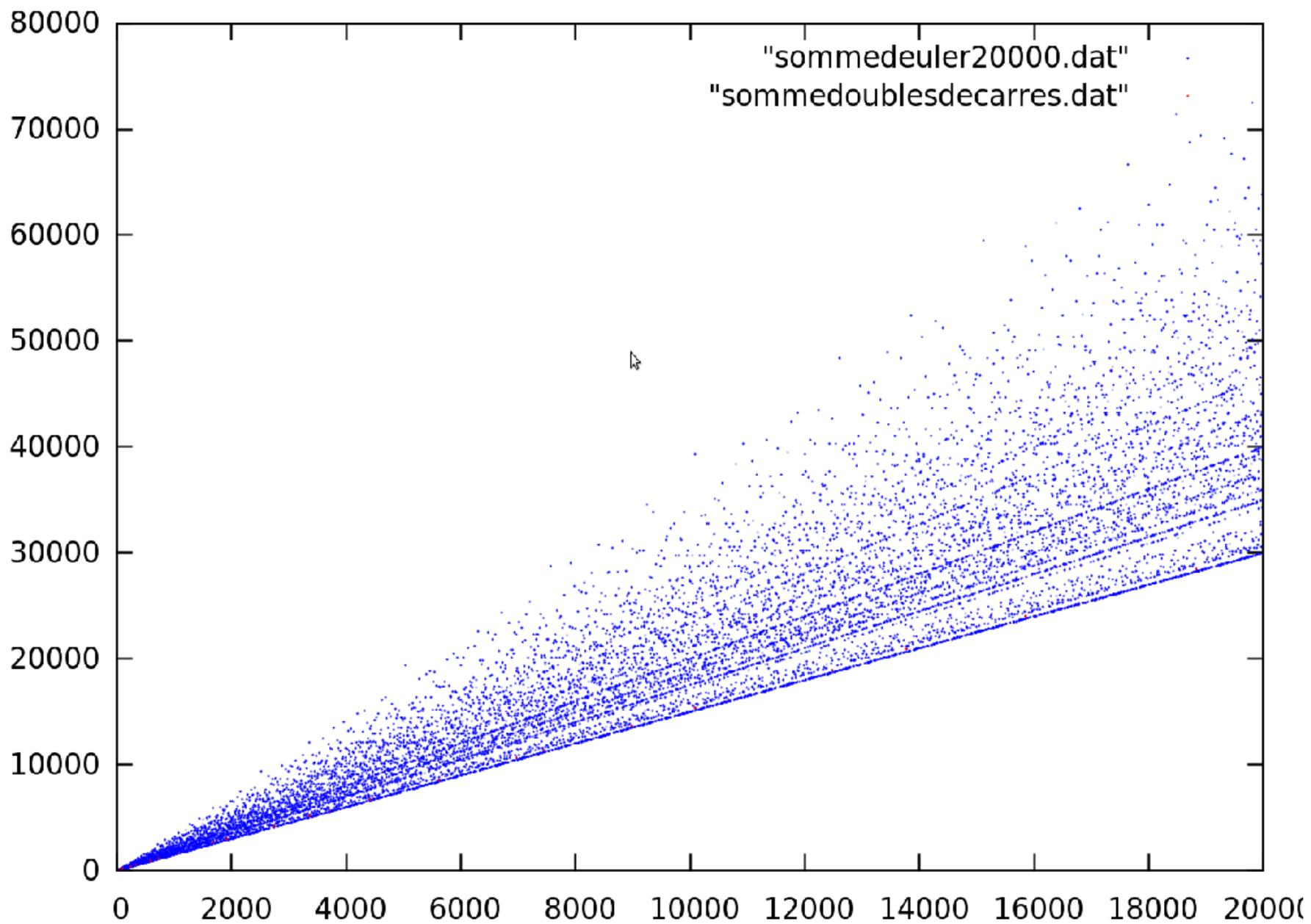


Fig. 17 : σ appliquée aux doubles de carrés de premiers

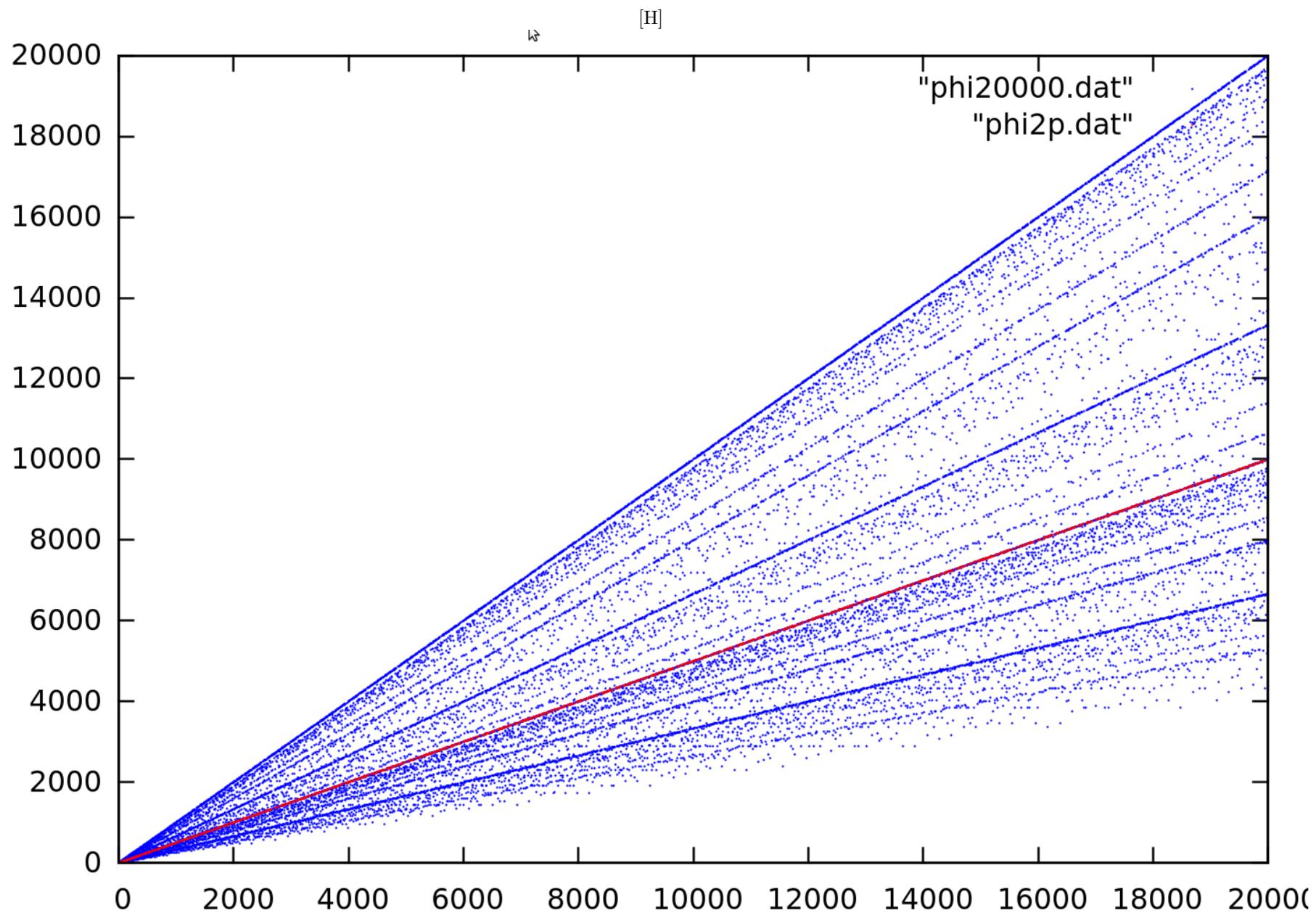


Fig. 18 : Indicateur d'Euler appliqué aux nombres de la forme $2p$ (doubles de premiers)

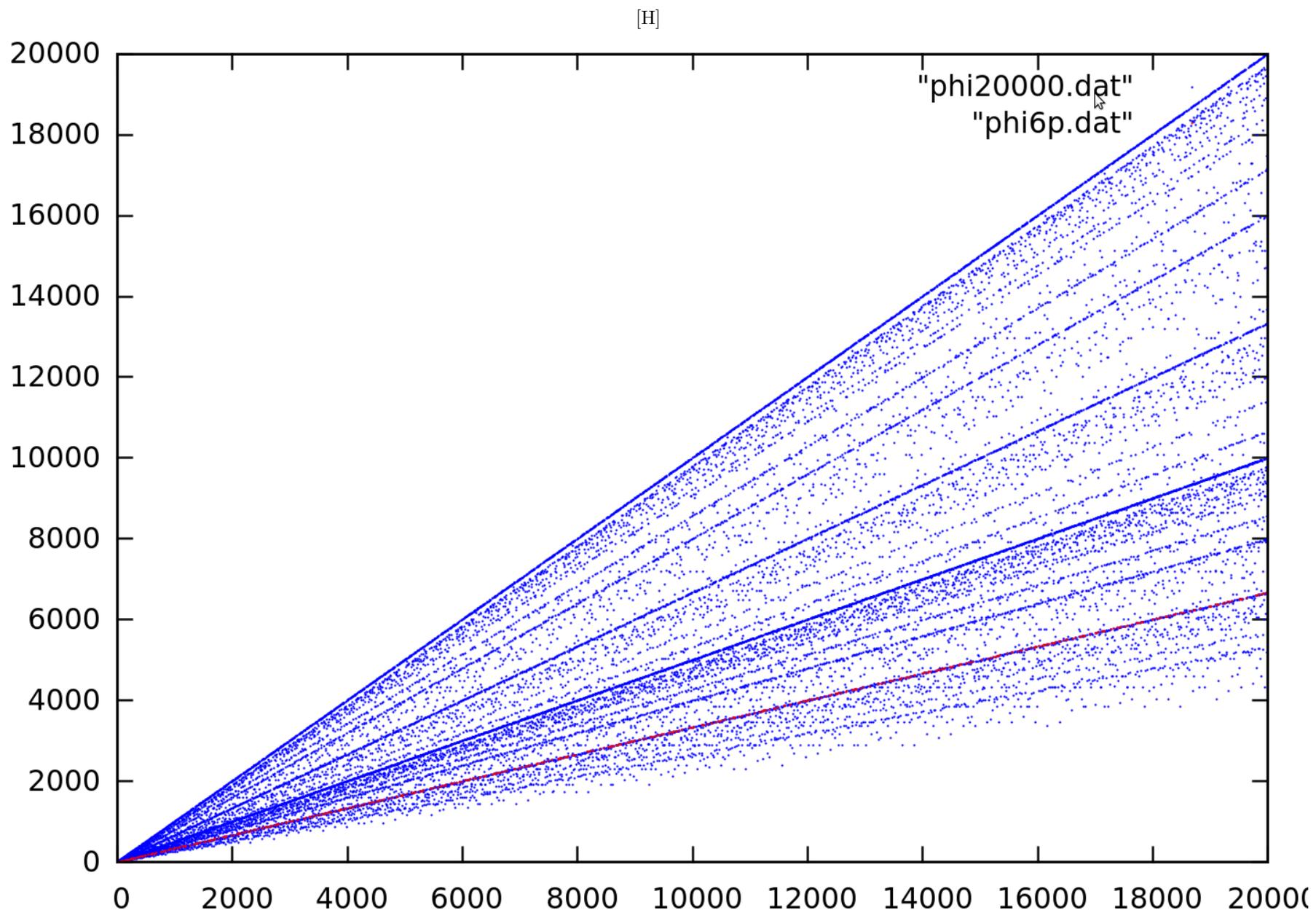


Fig. 19 : Indicateur d'Euler appliqué aux nombres de la forme $6p$

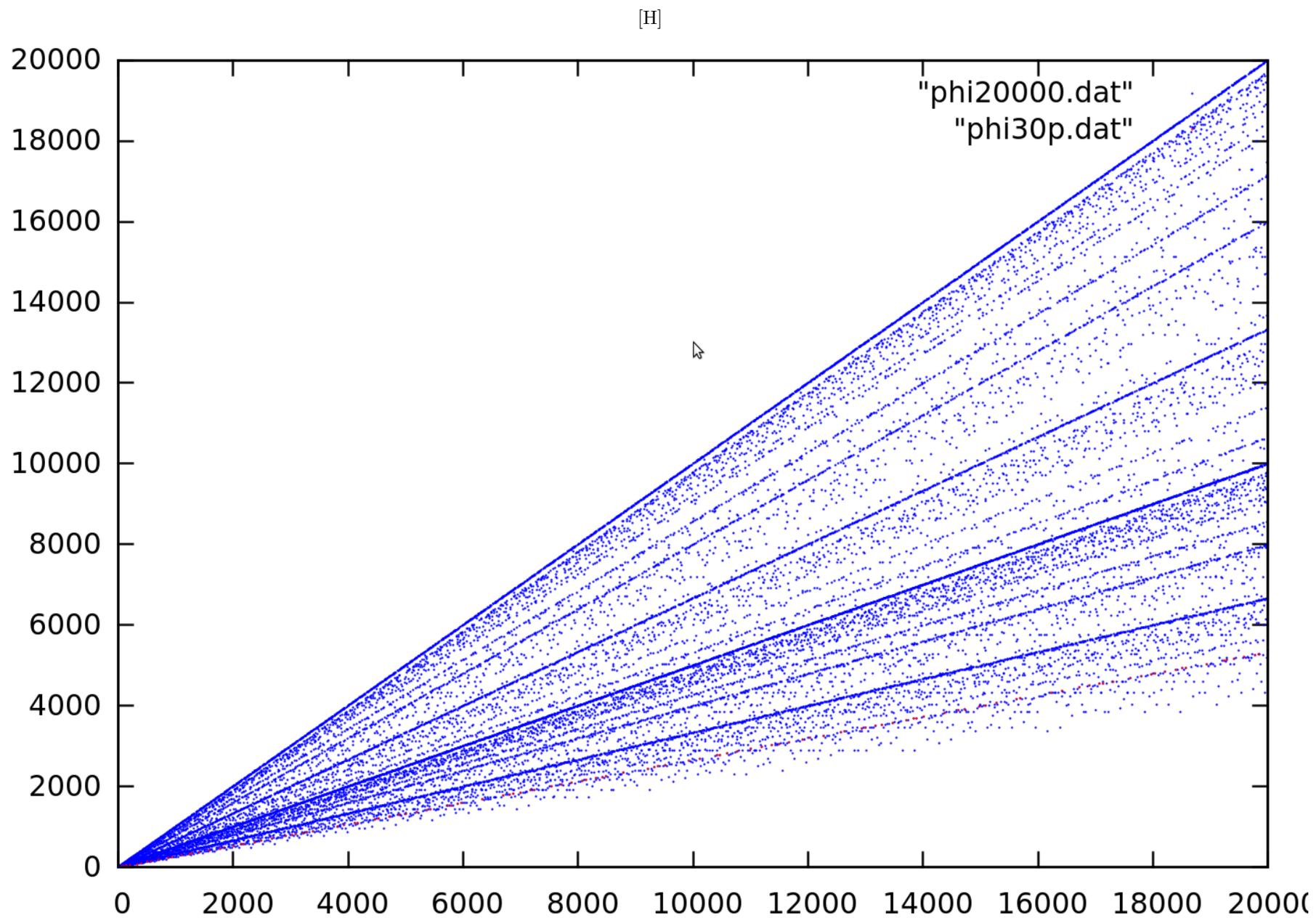


Fig. 20 : Indicateur d'Euler appliqué aux nombres de la forme $30p$

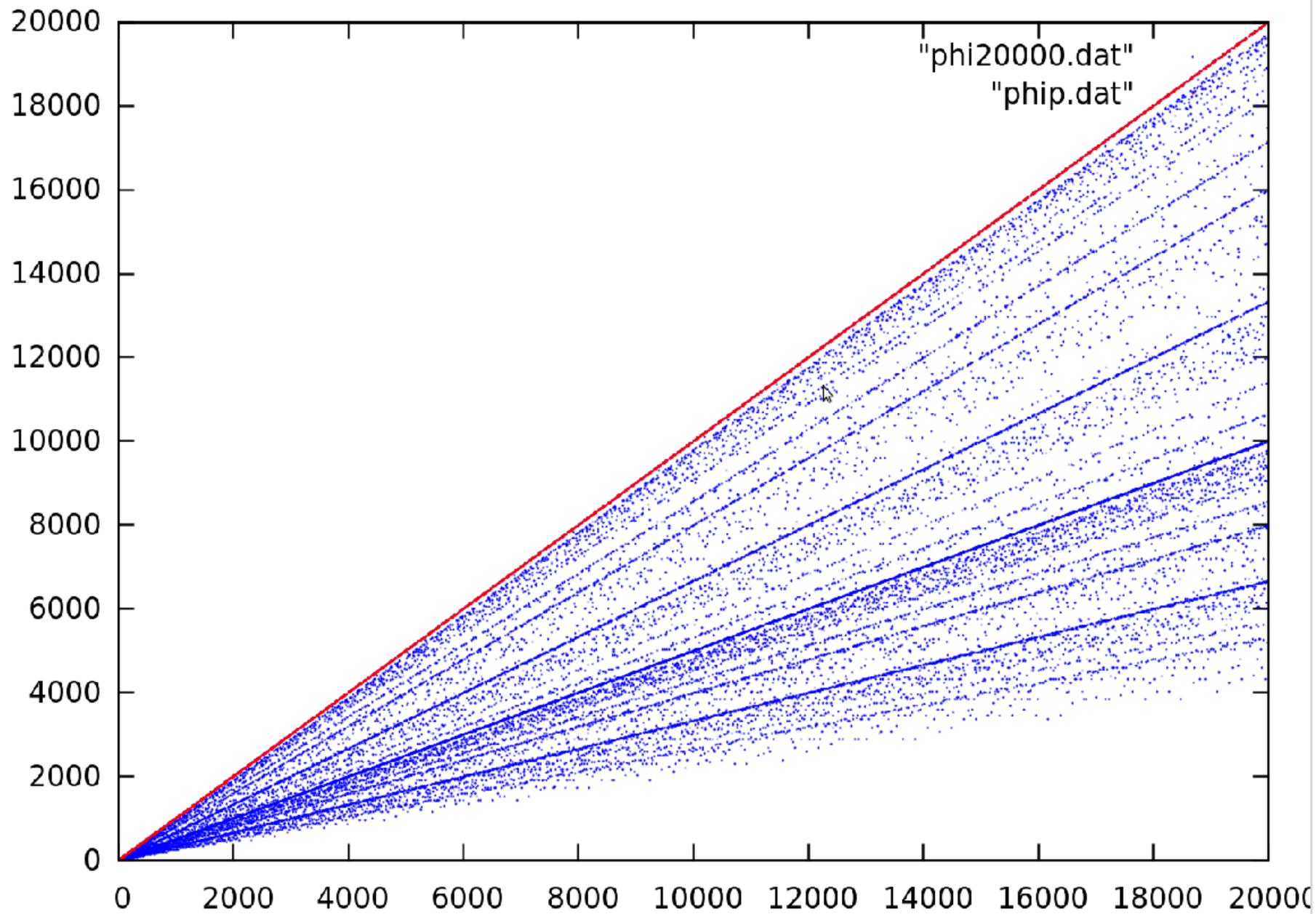
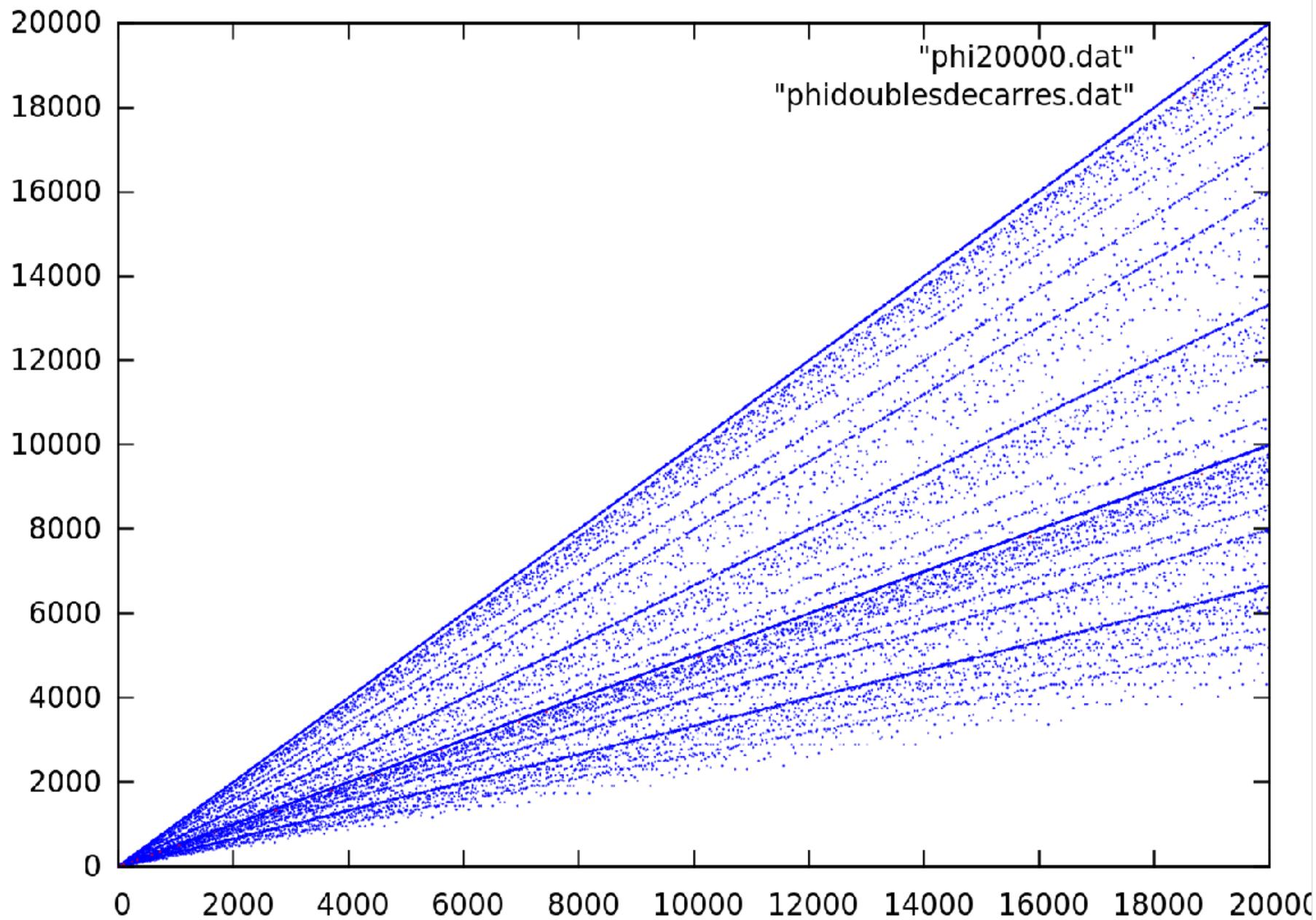


Fig. 21 : Indicateur d'Euler appliqué aux nombres premiers

Fig. 22 : φ des doubles de carrés de premiers

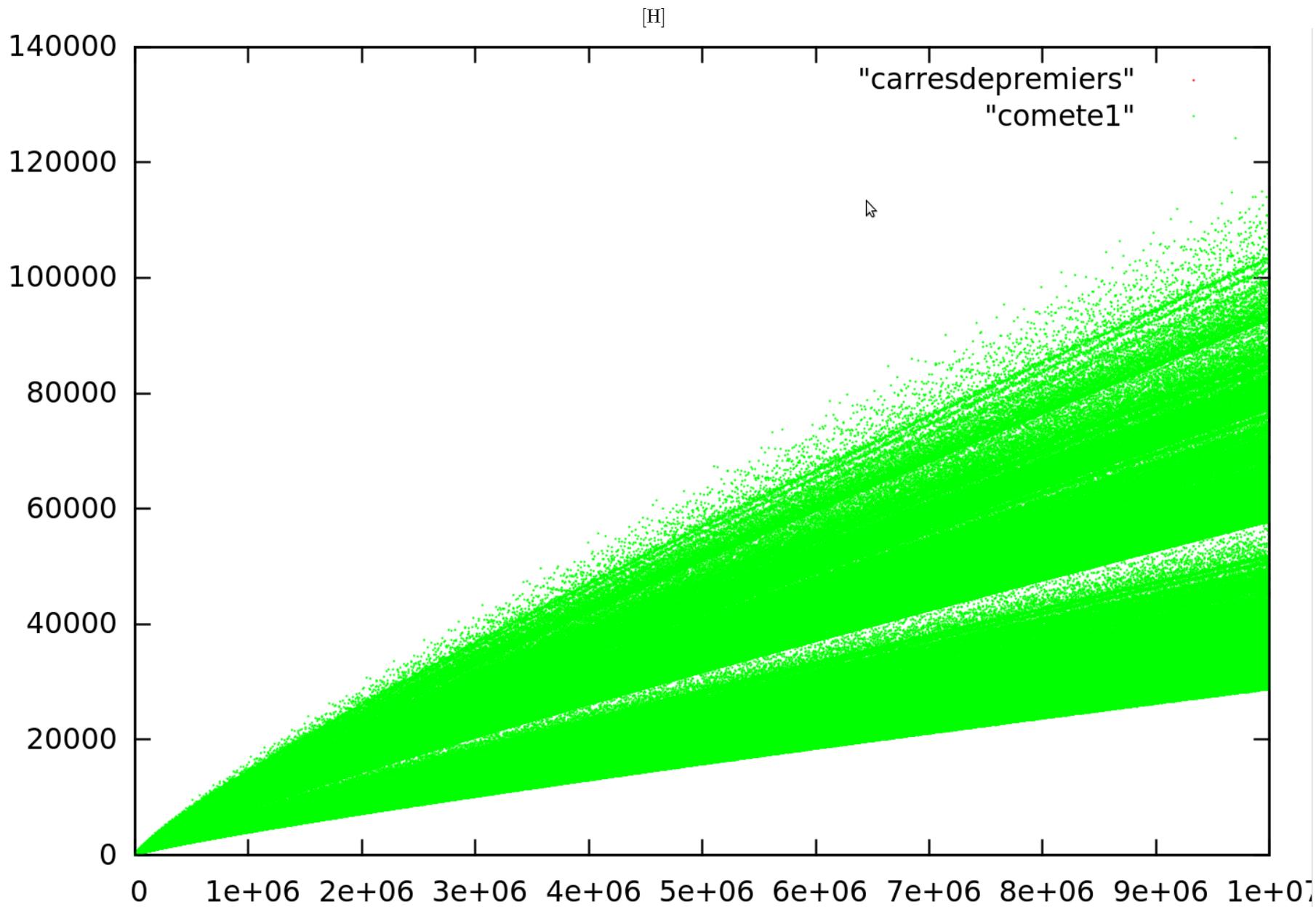


Fig. 23 : Nombres de décompositions de Goldbach sans tirages aléatoires

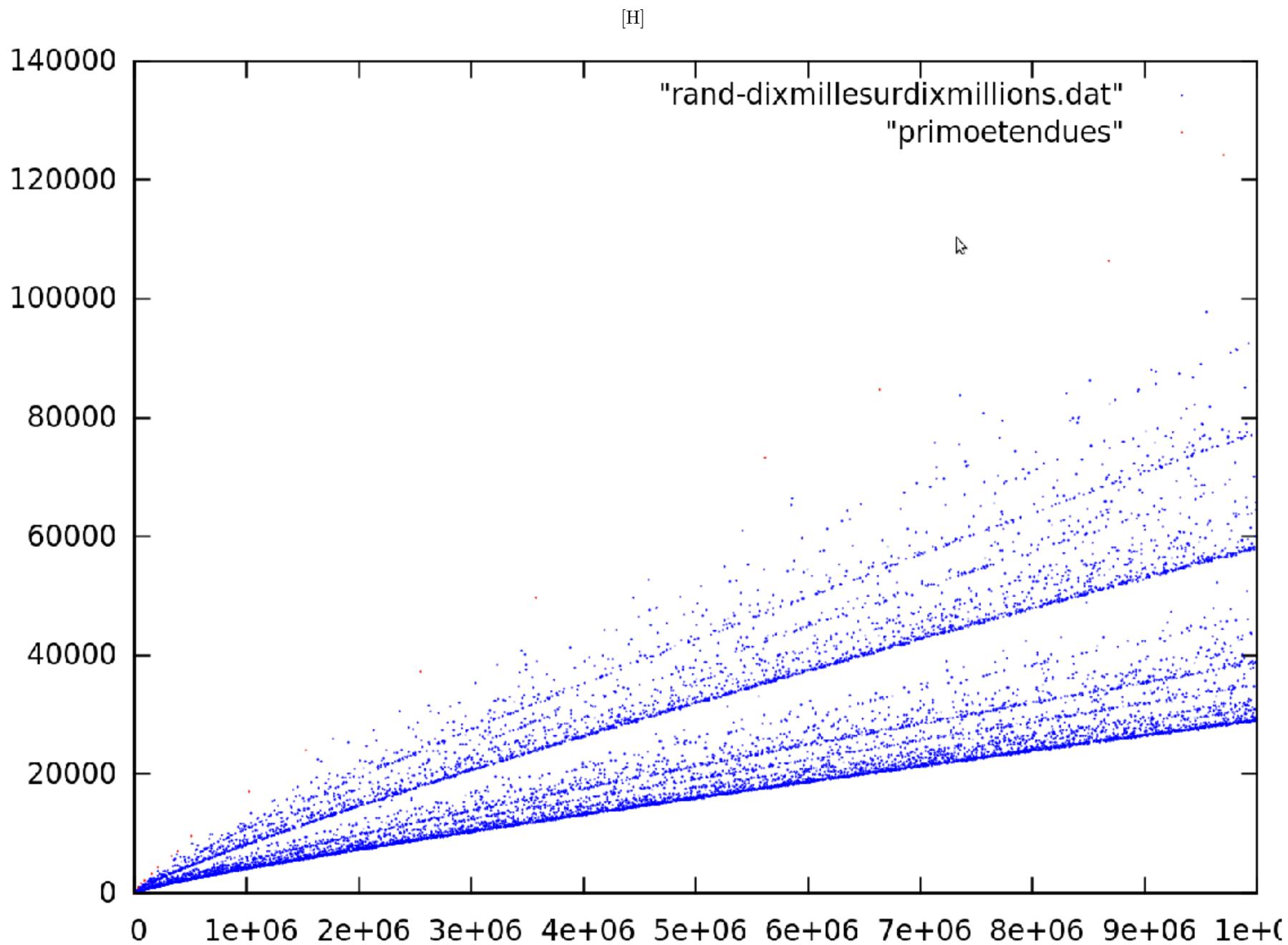


Fig. 24 : Nombres de décompositions de Goldbach des multiples de primorielles

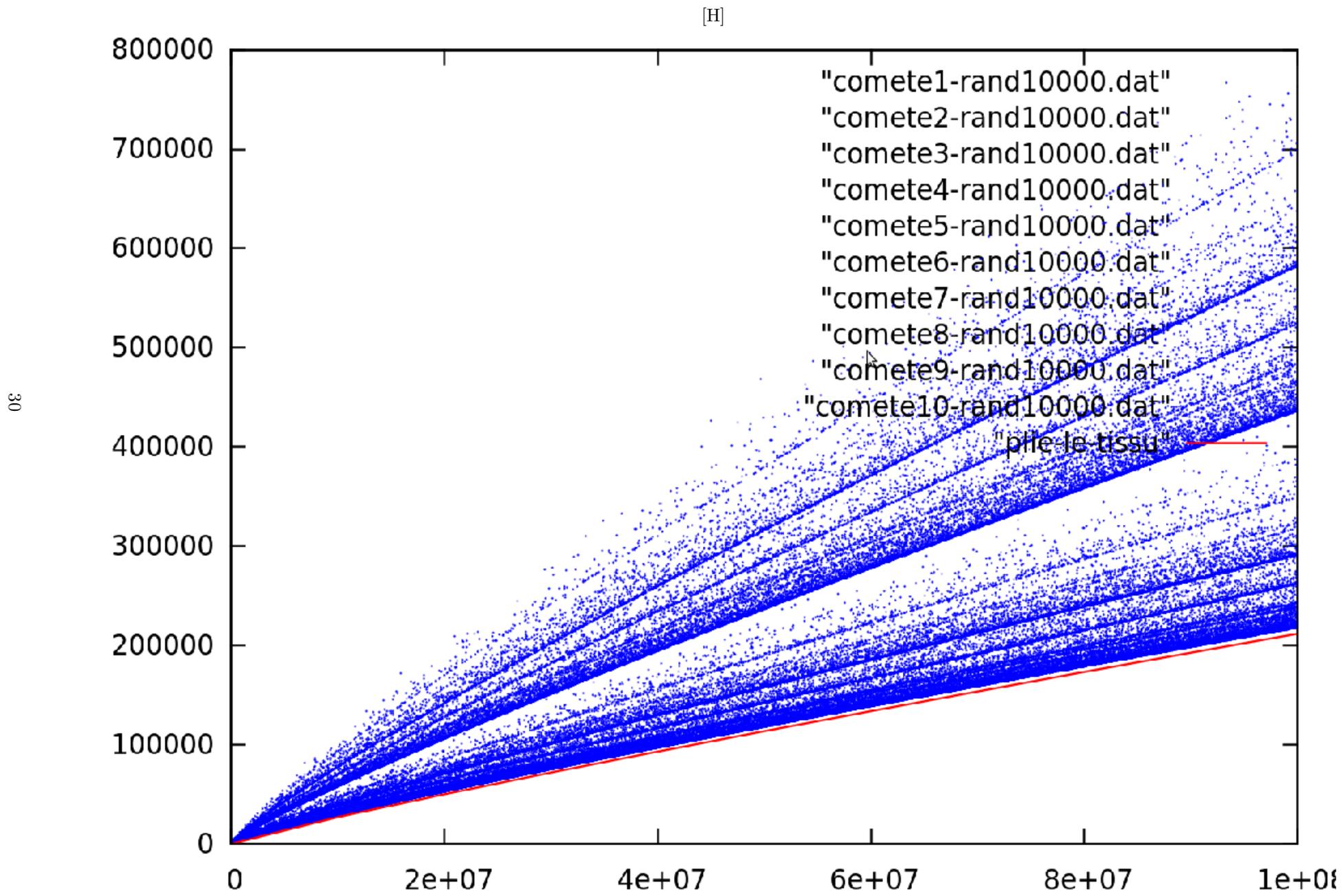


Fig. 25 : Minoration du nombre de décompositions de Goldbach