Conjecture de Goldbach et chip-firing games (Denise Vella-Chemla, 19.8.18)

1) *Chip-firing games* 4×4

On compte dans les coefficients de matrices 4×4 les nombres d'occurrences de certaines configurations de prédicats de primalité sur les nombres. Dans des recherches précédentes, on avait représenté pour étudier la conjecture de Goldbach les nombres pairs par des mots dans un langage à 4 lettres.

Exemple : à 40 est associé le mot *accbacdac*. On associe ainsi à 40 la matrice

$$40 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond au fait que le mot de 40 contient 3 doublons de lettres *ac*, 1 doublon *ba*, 1 doublon *cb*, 1 doublon *cc*, 1 doublon *cd* et 1 doublon *da*.

Procéder à une transformation de chip-firing-game sur une matrice consiste à la modifier de la façon suivante : le nombre d'une case (i, j) peut être diminué d'autant que sont augmentées les valeurs des cases de ses voisins directs $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i-1, j-1), (i-1, j+1), (i+1, j-1), (i+1, j+1)$.

On devrait ici parler de *nearly-chip-firing-game* car comme il s'agit de modéliser des sommes $x + y$ de deux nombres impairs égales à n (avec $3 \leq x \leq n/2$, un nombre pair qui augmente, la somme totale des coefficients de la matrice se trouve être augmentée de 1 une fois sur deux.

Observons ces transformations sur les matrices des nombres 90 à 100. On colorie les nombres qui distribuent leurs points à leurs voisins.

$$90 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 92 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$94 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 96 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$98 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 100 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis à nouveau sur les matrices des nombres 9996, 9998, 10000.

$$9996 \quad \begin{pmatrix} 9 & 16 & 31 & 199 \\ 25 & 29 & 33 & 218 \\ 30 & 43 & 56 & 283 \\ 191 & 218 & 291 & 825 \end{pmatrix}$$

$$9998 \quad \begin{pmatrix} 0 & 34 & 0 & 64 \\ 0 & 45 & 127 & 290 \\ 40 & 181 & 86 & 262 \\ 59 & 202 & 355 & 753 \end{pmatrix}$$

$$10000 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 37 & 90 \\ 37 & 42 & 123 & 231 \\ 0 & 98 & 89 & 353 \\ 90 & 293 & 291 & 724 \end{pmatrix}$$

Démontrer la conjecture de Goldbach en utilisant une telle modélisation équivaut à démontrer qu'il n'est pas possible qu'à un nombre pair soit associée par ce procédé une matrice qui contiendrait un gnomon de 0 en haut à gauche, c'est-à-dire qui aurait la configuration suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \end{pmatrix}$$

2) Chip-firing games 2×2

Concernant la conjecture de Goldbach, on peut ne s'intéresser qu'aux décompositions de n un nombre pair en sommes de deux nombres impairs $p + y$ avec p premier. Cela nous permet de travailler sur des matrices 2×2 plutôt que 4×4.

On note dans une matrice 2×2 les comptages suivants :

$$\begin{pmatrix} f_{aa}(n) & f_{ab}(n) \\ f_{ba}(n) & f_{bb}(n) \end{pmatrix}$$

avec :

- $f_{aa}(n) = \#\{(p+q=n) \ \wedge \ (p\ premier) \ \wedge \ (q\ premier) \ \wedge \ (((n+2)-p)\ premier)\}$;
- $f_{ab}(n) = \#\{(p+q=n) \ \wedge \ (p\ premier) \ \wedge \ (q\ premier) \ \wedge \ (((n+2)-p)\ compos\acute{e})\}$;
- $f_{ba}(n) = \#\{(p+q=n) \ \wedge \ (p\ premier) \ \wedge \ (q\ compos\acute{e}) \ \wedge \ (((n+2)-p)\ premier)\}$;
- $f_{bb}(n) = \#\{(p+q=n) \ \wedge \ (p\ premier) \ \wedge \ (q\ compos\acute{e}) \ \wedge \ (((n+2)-p)\ compos\acute{e})\}$.

Les matrices sont fournies en annexe pour les nombres pairs compris entre 10 et 100.

Le nombre de décompositions de Goldbach de n est égal à $f_{aa}(n) + f_{ab}(n)$. Démontrer la conjecture de Goldbach revient à démontrer qu'on a toujours $f_{aa}(n) + f_{ab}(n) > 0$.

La somme des 4 éléments de chaque matrice est égal à $\pi(n/2) - 1$, elle augmente de 1 à chaque double de nombre premier.

Annexe : matrices 2×2 associées aux nombres pairs compris entre 10 et 100

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 12 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 14 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 16 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 18 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$20 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 22 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 24 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 26 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 28 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$30 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 32 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 34 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 36 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 38 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$40 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 42 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 44 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 46 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 48 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$50 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 52 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 54 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 56 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 58 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$60 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 62 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 64 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 66 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 68 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$70 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 72 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 74 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad 76 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad 78 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$80 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 82 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 84 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 86 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad 88 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$90 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 92 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 94 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad 96 \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 98 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$100 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$