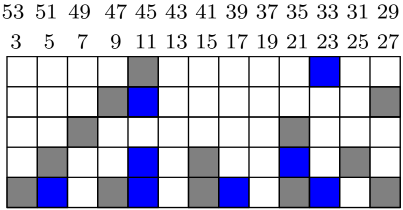
Conjecture de Goldbach et Formule du Crible de Poincaré

Denise Vella-Chemla

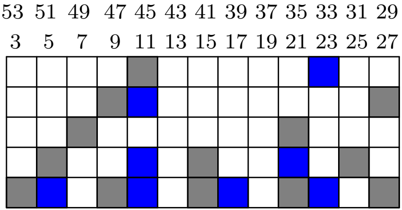
3/6/9

- Conjecture de Goldbach (7 juin 1742) : tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers.
- une méthode de calcul d'une borne inférieure pour le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné.

- $2x \ = \ 56$
- colonne 1 : divisibilité de 3 et 56-3
  colonne 2 : divisibilité de 5 et 56-5
  ...
  colonne 13 : divisibilité de 27 et 56-27=29



- nombre de lignes $= \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
- ici, $\lfloor \sqrt{28} \rfloor = 5$
- nombre de colonnes $=$ *moitié* $= \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$
- ici, $\left\lfloor \dfrac{28-1}{2} \right\rfloor = 13$

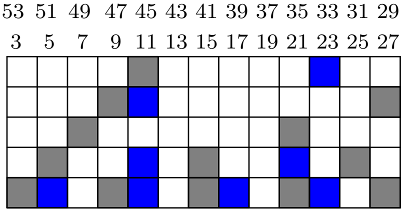
- 

- Les colonnes ne contenant aucune case colorée fournissent trivialement les décomposants de Goldbach de 56 les plus grands, puisque ces colonnes correspondent à des nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres impairs compris entre 3 et $2\sqrt{x}+1$, i.e. des nombres premiers.

- Calcul du nombre de cases colorées d'une ligne donnée j
- $f(2x, j) = \left\lceil \frac{(moitié - j + 1) * tempo}{2 * j + 1} \right\rceil$
- avec *tempo* qui vaut 1 si $2 * j + 1$ divise $2x$ ou qui vaut 2 si $2 * j + 1$ ne divise pas $2x$.

- principe d'inclusion/exclusion ou formule du crible de Poincaré
- $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \mid A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\mid\right)$

- calcul exact du nombre de cases colorées de chaque ligne
- rapporter ce nombre au nombre de colonnes
- agréger les probabilités ainsi obtenues par la formule du crible de Poincaré

- $2x = 56$


- $\left\lceil \frac{13*2}{3} \right\rceil = 9 \qquad 9/13 = 0.692308$
- $\left\lceil \frac{12*2}{5} \right\rceil = 5 \qquad 5/13 = 0.384615$
- $\left\lceil \frac{11*1}{7} \right\rceil = 2 \qquad 2/13 = 0.153846$
- $\left\lceil \frac{10*2}{9} \right\rceil = 3 \qquad 3/13 = 0.230769$
- $\left\lceil \frac{9*2}{11} \right\rceil = 2 \qquad 2/13 = 0.153846$
- L'agrégation des différentes probabilités aboutit au résultat global 0.895716
- Une borne inférieure du nombre de colonnes ne contenant aucune case colorée est donc : $13 * (1 - 0.895716) = 1$

$2x$	$cgpc$	$nb.col.blanches$	$nb.décomp.Goldbach$
22	0	1	3
24	1	1	3
26	0	1	3
28	1	1	2
30	2	2	3
32	0	1	2
34	0	2	4
36	2	2	4
38	1	1	2
40	1	2	3
42	2	3	4
44	1	1	3
46	1	2	4
48	2	3	5
50	1	2	4
52	1	1	3
54	2	3	5
56	1	2	3
58	1	2	4
60	3	5	6

$2x$	$cgpc$	$nb.col.blanches$	$nb.décomp.Goldbach$
62	1	2	3
64	1	2	5
66	3	4	6
68	1	1	2
70	1	3	5
72	2	3	6
74	1	2	5
76	1	2	5
78	3	4	7
80	1	2	4
82	1	3	5
84	3	5	8
86	1	2	5
88	1	3	4
90	4	7	9
92	1	2	4
94	1	3	5
96	3	4	7
98	1	3	3
100	2	4	6

- Pourquoi obtient-on la plupart du temps un nombre inférieur ou nombre réel de colonnes sans aucune case colorée ?
- Les probabilités ne sont pas indépendantes : le premier nombre non nul divisible par 5 est exactement égal au premier nombre non nul divisible par 3 augmenté de 2.
- Il faudrait démontrer par récurrence que le nombre de colonnes ne contenant aucune case colorée obtenu par ce calcul n'est jamais nul pour $2x$ supérieur ou égal à 36.