

Etude de la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

14/6/9

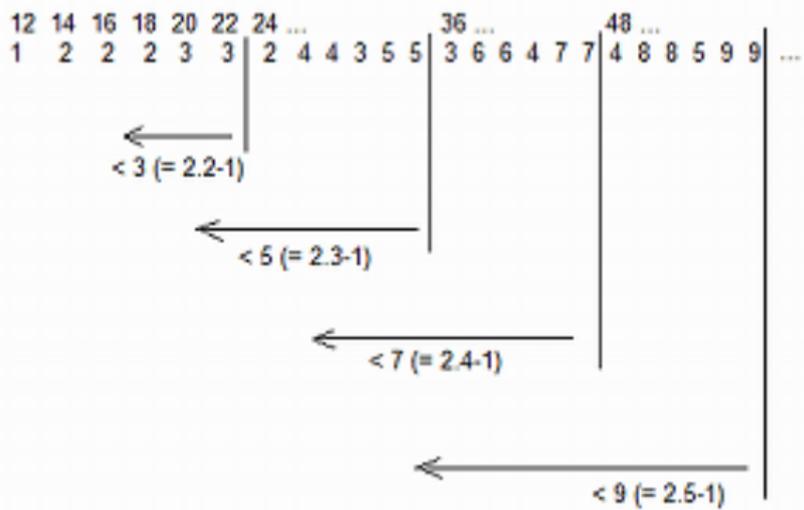
- ▶ Conjecture de Goldbach (7 juin 1742) : tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers.
- ▶ Vinogradov
- ▶ Chen Jingrun (1966)

- ▶ Euler : Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs
- ▶ Arithmétique des tissus de Lucas (Anne-Marie Décaillot)
- ▶ Trouver une méthode de comptage

- ▶ nb de lignes = $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ (il augmente de 1 à chaque fois que $2x$ est le double d'un carré)
- ▶ nb de colonnes = $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ (il augmente de 1 une fois sur deux)

- ▶ formule récursive de calcul du nombre de cases colorées d'une ligne
- ▶

$$f(4(2k+1)i+2a, k) = \begin{cases} i & \text{si } a = 0 \\ f(4(2k+1)i, k) + 1 & \text{si } a = 2k + 1 \\ 2.f(4(2k+1)i, k) & \text{si } 1 \leq a < 2k + 1 \\ 2.f(4(2k+1)i, k) + 1 & \text{si } 2k + 1 < a < 4k + 2 \end{cases}$$



► vrais nombres de cases colorées par ligne

24 : 2 2 1	52 : 8 5 3 2 2	80 : 13 4 5 4 3 3
26 : 4 2 1	54 : 5 5 3 2 2	82 : 13 8 5 4 3 3
28 : 4 2 1	56 : 9 5 2 3 2	84 : 7 8 3 4 3 3
30 : 3 2 2	58 : 9 5 4 3 2	86 : 14 8 6 4 3 3
32 : 5 3 2 1	60 : 5 3 4 3 2	88 : 14 8 6 4 2 3
34 : 5 3 2 1	62 : 10 6 4 3 2	90 : 8 5 6 3 4 3
36 : 3 3 2 1	64 : 10 6 4 3 2	92 : 15 9 6 5 4 3
38 : 6 3 2 2	66 : 6 6 4 3 2	94 : 15 9 6 5 4 3
40 : 6 2 2 2	68 : 11 6 4 3 3	96 : 8 9 6 5 4 3
42 : 4 4 2 2	70 : 11 4 3 3 3	98 : 16 9 4 5 4 3 3
44 : 7 4 3 2	72 : 6 7 5 2 3 2	100 : 16 5 7 5 4 3 3
46 : 7 4 3 2	74 : 12 7 5 4 3 2	
48 : 4 4 3 2	76 : 12 7 5 4 3 2	
50 : 8 3 3 2 2	78 : 7 7 5 4 3 2	

► majorations des nombres de cases colorées par ligne

24 : 3 3 1	52 : 9 5 3 3 3	80 : 13 7 5 5 3 3
26 : 5 3 1	54 : 9 5 3 3 3	82 : 13 9 5 5 3 3
28 : 5 3 1	56 : 9 5 3 3 3	84 : 13 9 5 5 3 3
30 : 5 3 3	58 : 9 5 5 3 3	86 : 15 9 7 5 3 3
32 : 5 3 3 1	60 : 9 5 5 3 3	88 : 15 9 7 5 3 3
34 : 5 3 3 1	62 : 11 7 5 3 3	90 : 15 9 7 5 5 3
36 : 5 3 3 1	64 : 11 7 5 3 3	92 : 15 9 7 5 5 3
38 : 7 3 3 3	66 : 11 7 5 3 3	94 : 15 9 7 5 5 3
40 : 7 3 3 3	68 : 11 7 5 3 3	96 : 15 9 7 5 5 3
42 : 7 5 3 3	70 : 11 7 5 3 3	98 : 17 9 7 5 5 3 3
44 : 7 5 3 3	72 : 11 7 5 3 3 3	100 : 17 9 7 5 5 3 3
46 : 7 5 3 3	74 : 13 7 5 5 3 3	
48 : 7 5 3 3	76 : 13 7 5 5 3 3	
50 : 9 5 3 3 3	78 : 13 7 5 5 3 3	

- ▶ ordre lexicographique sur les n -uplets des majorants des numérateurs
- ▶ ordre défini sur $\mathbb{N}uplets$
 Soient $a = (a_1, \dots, a_p)$ et $b = (b_1, \dots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$, et soit m le plus petit des deux entiers p et q .
- ▶ $a < b$ si et seulement si
 - $(a_1, \dots, a_m) < (b_1, \dots, b_m)$
 (*pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets_m$*)
 - ou $(a_1, \dots, a_m) = (b_1, \dots, b_m)$
 et $m < q$ (i.e. $p < q$).

- ▶ Principe d'inclusion / exclusion (ou formule de De Moivre, de Da Silva ou de Poincaré)
- ▶ formulation mathématique:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

- ▶ formulation informatique: $a = a + b - ab$

▶ **Euler**

Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs

▶ **Gauss**

Recherches Arithmétiques (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...] En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

▶ **Poincaré**

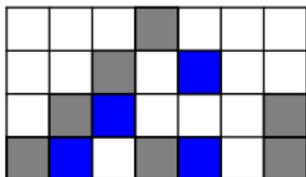
- ▶ Recherche d'une borne sur l'augmentation potentielle du résultat de la formule, à cause de l'ordre lexicographique :

$$\begin{aligned}
 \text{poincare}(2x + 2) < \text{poincare}(2x) &+ 2 \left\lceil \frac{2x}{8 \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 4} \right\rceil - 1 \\
 &+ \frac{2(\text{nombre de diviseurs de } 2x \text{ de la forme } 8x+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}
 \end{aligned}$$

- ▶ A partir d'un certain rang, on dépassera définitivement 0 pour ne jamais le retrouver
- ▶ Formule permettant une démonstration par récurrence

29 27 25 23 21 19 17

3 5 7 9 11 13 15



$$1/7 \leq 1/7$$

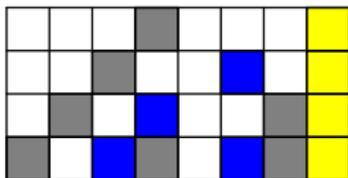
$$2/7 \leq 3/7$$

$$3/7 \leq 3/7$$

$$5/7 \leq 5/7$$

31 29 27 25 23 21 19 17

3 5 7 9 11 13 15 17



$$1/8 \leq 1/8$$

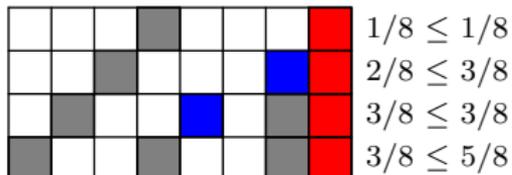
$$2/8 \leq 3/8$$

$$3/8 \leq 3/8$$

$$5/8 \leq 5/8$$

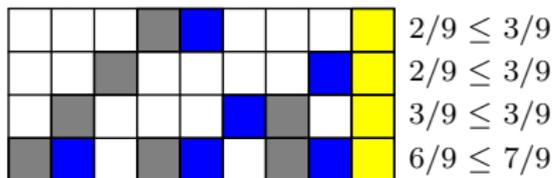
33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17



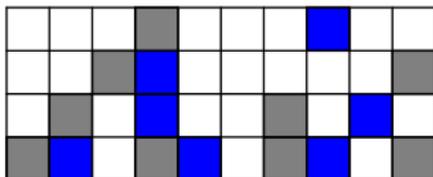
35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19



41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



$$2/10 \leq 3/10$$

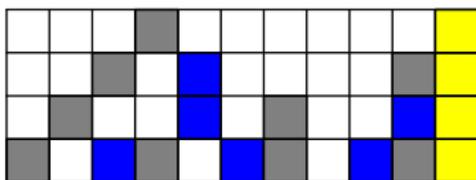
$$3/10 \leq 3/10$$

$$4/10 \leq 5/10$$

$$7/10 \leq 7/10$$

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



$$2/11 \leq 3/11$$

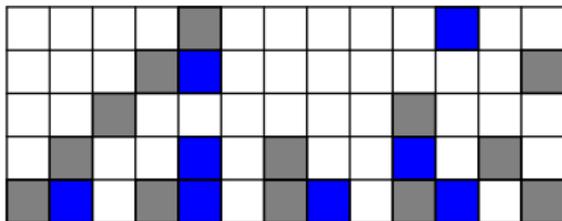
$$3/11 \leq 3/11$$

$$4/11 \leq 5/11$$

$$7/11 \leq 7/11$$

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



$$2/13 \leq 3/13$$

$$3/13 \leq 3/13$$

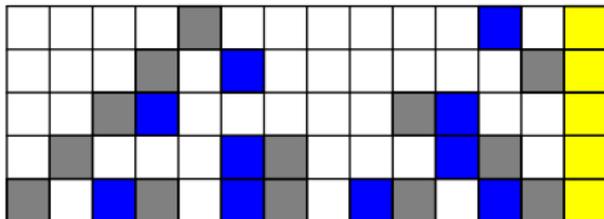
$$2/13 \leq 3/13$$

$$5/13 \leq 5/13$$

$$9/13 \leq 9/13$$

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



$$2/14 \leq 3/14$$

$$3/14 \leq 3/14$$

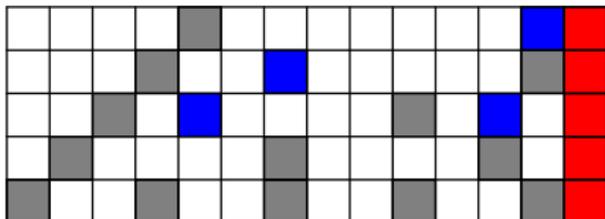
$$4/14 \leq 5/14$$

$$5/14 \leq 5/14$$

$$9/14 \leq 9/14$$

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



$$2/14 \leq 3/14$$

$$3/14 \leq 3/14$$

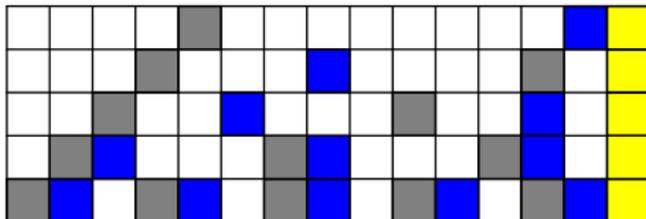
$$4/14 \leq 5/14$$

$$3/14 \leq 5/14$$

$$5/14 \leq 9/14$$

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31



$$2/15 \leq 3/15$$

$$3/15 \leq 3/15$$

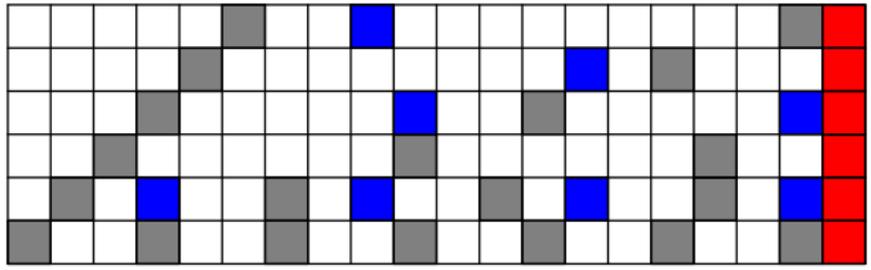
$$4/15 \leq 5/15$$

$$6/15 \leq 7/15$$

$$10/15 \leq 11/15$$



81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

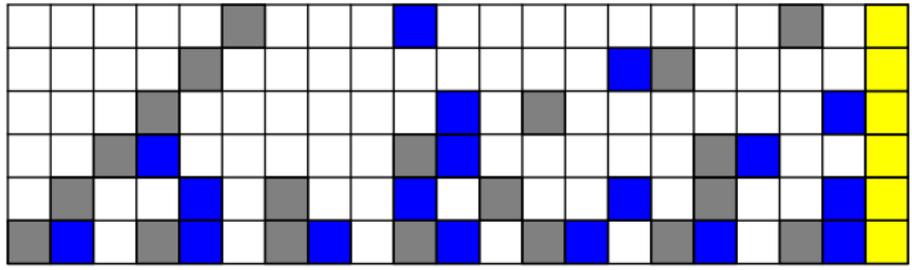


- $3/20 \leq 3/20$
- $3/20 \leq 3/20$
- $4/20 \leq 5/20$
- $3/20 \leq 5/20$
- $8/20 \leq 9/20$
- $7/20 \leq 13/20$

[8



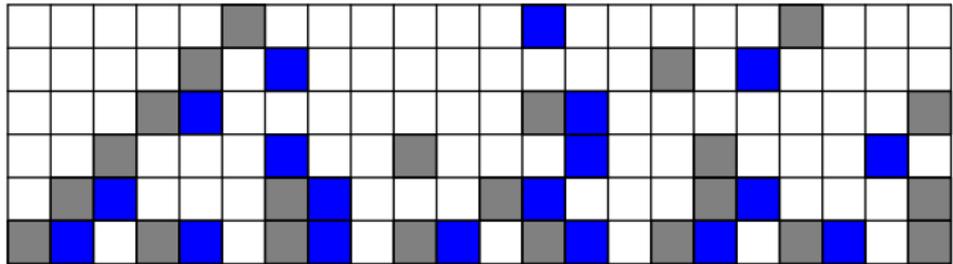
83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43



- $3/21 \leq 3/21$
- $3/21 \leq 3/21$
- $4/21 \leq 5/21$
- $6/21 \leq 7/21$
- $8/21 \leq 9/21$
- $14/21 \leq 15/21$



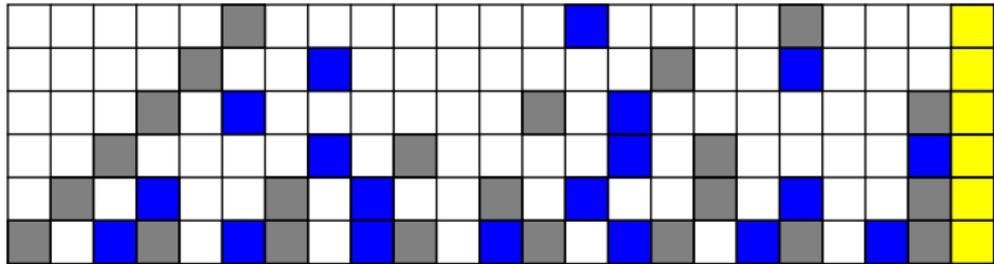
89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45



- $3/22 \leq 3/22$
- $4/22 \leq 5/22$
- $5/22 \leq 5/22$
- $6/22 \leq 7/22$
- $9/22 \leq 9/22$
- $15/22 \leq 15/22$



91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47

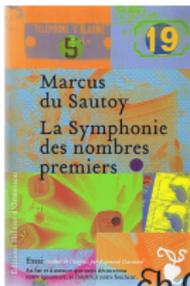


- $3/23 \leq 3/23$
- $4/23 \leq 5/23$
- $5/23 \leq 5/23$
- $6/23 \leq 7/23$
- $9/23 \leq 9/23$
- $15/23 \leq 15/23$

▶ 20.03.2003



▶ Août 2003 :



▶ Septembre 2005 :

- ▶ Montrer la praxis de l'activité de recherche (Essai d'Hadamard et Poincaré)
- ▶ <http://denise.vella.chemla.free.fr>

▶ Remerciements

▶ **Julia Robinson**

“Je souhaitais toujours à chacun de mes anniversaires et d’année en année que le dixième problème de Hilbert soit résolu.

Pas par moi, mais simplement qu’il soit résolu.

J’avais le sentiment que je ne pourrais accepter de mourir sans connaître la réponse”.

- ▶ La conjecture de Goldbach fait partie du 8ème problème de Hilbert, qui contient également l’Hypothèse de Riemann, le Graal des mathématiciens...