Snurpf sur cercle et ses cordes tendues entre décomposants de Goldbach
Denise Vella-Chemla, 3 novembre 2026

1. Le Snurpf et la propriété recherchée

Pour N primorielle, $N = \prod_{p \leq p_j} p$, le *Snurpf*[1] de n est son système de restes $\text{Snurpf}(n) = (n \bmod 2,\ n \bmod 3,\ \ldots,\ n \bmod p_j)$, et n se reconstruit par le lemme chinois. On cherche une bijection

$$f : (r_2, r_3, r_5, \ldots) \longmapsto e^{i\theta}$$

plaçant les nombres sur un *unique* cercle, telle que deux nombres diamétralement opposés aient des Snurpf de somme $(1, 0, \ldots, 0)$. Or le nombre de Snurpf $(1, 0, \ldots, 0)$ est $N/2$: la propriété exige exactement que m et $N/2 - m$ soient diamétralement opposés.

2. La fonction de placement (Claude, validée)

Le principe est une numération mixte de plus en plus fine :

- le reste r_2 choisit le *demi-cercle* : pair à droite (centre à l'angle 0), impair à gauche (centre à l'angle π) ;
- le reste r_3 choisit un tiers de ce demi-cercle, le reste r_5 un cinquième de ce tiers, le reste r_7 un septième de ce cinquième, etc. ;
- dans la moitié impaire, on lit $(-n) \bmod p$ au lieu de $n \bmod p$ (le sens de lecture s'inverse).

Posons $\sigma = +1$ si $r_2 = 0$, $\sigma = -1$ si $r_2 = 1$. La fonction d'angle d'un tuple de restes $(r_2, r_3, r_5, \ldots)$ est

$$\theta \;=\; \pi\, r_2 \;+\; \sum_{p \in \{3,5,7,\ldots\}} \frac{\pi}{3 \cdot 5 \cdots p} \left(\big(\sigma\, r_p \bmod p\big) - \frac{p-1}{2} \right), \qquad e^{i\theta} = \text{point cherché.}$$

Le chiffre $\big(\sigma r_p \bmod p\big) - \frac{p-1}{2}$ est centré : il parcourt $-\frac{p-1}{2}, \ldots, \frac{p-1}{2}$, et le pas vaut $\pi/3$, puis $\pi/15$, puis $\pi/105$, etc.

Vérification sur $N = 6$.

m	(r_2, r_3)	θ	point
0	(0,0)	$-\pi/3$	$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	(1,1)	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	(0,2)	$\pi/3$	$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	(1,0)	$2\pi/3$	$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	(0,1)	0	1
5	(1,2)	π	-1

1. Snurpf = système de numération par les restes modulaires dans les parties finies de $\mathbb{N}$.

Ce sont exactement les six positions voulues : tous les pairs à droite $(0, 2, 4)$, tous les impairs à gauche $(1, 3, 5)$, et les diamétraux $0 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 5$ ont bien pour somme de Snurpf $(1, 0)$.

Preuve de la propriété diamétrale (tout N). Soit $m' = N/2 - m$. Comme $N/2$ est impair, $r_2(m') = 1 - r_2(m)$, donc $\sigma' = -\sigma$. Pour tout premier impair p de la roue, $p \mid N/2$, donc $m' \equiv -m \pmod p$ et

$$\sigma' r_p(m') \;\equiv\; (-\sigma)(-m) \;\equiv\; \sigma\, m \;\equiv\; \sigma\, r_p(m) \pmod p :$$

tous les chiffres centrés de m' sont *égaux* à ceux de m. Le terme πr_2 passe de πr_2 à $\pi(1 - r_2)$, tous les autres termes sont inchangés, donc

$$\theta(m') \;=\; \pi - \pi r_2 + \Big(\theta(m) - \pi r_2\Big) \;\equiv\; \theta(m) + \pi \pmod{2\pi} :$$

m et $m' = N/2 - m$ sont diamétralement opposés, et leur somme de Snurpf est $(1, 0, \ldots, 0)$ puisque $\mathrm{Snurpf}(N/2) = (1, 0, \ldots, 0)$ ($N/2$ est impair et divisible par tout premier impair de la roue). En particulier les chiffres centrés sont constants sur chaque diamètre : un diamètre du cercle est une classe du crible modulo les premiers impairs, seule la parité s'échange.

3. Application à Goldbach : $n = 98$, roue mod $(2, 3, 5, 7)$

Pour n pair, la roue est $\{p \le \sqrt{n}\}$: pour $n = 98$, $N = 210$, et tous les x impairs de $[1, n/2]$ vivent dans le demi-cercle gauche. Le programme `cercle-restes-n.py` trace une corde entre les points de chaque couple d'impairs $x, n - x$; les couples de Goldbach (x et $n - x$ premiers ; pour 98 : 19+79, 31+67, 37+61) sont en rouge gras. Pour $n = 98 \equiv (0, 2, 3, 0)$, deux extrémités d'une corde ont $r_7(x) = -r_7(n - x)$ (car $7 \mid 98$) et des restes r_3, r_5 complémentaires vers $(2, 3)$: la corde rouge est celle dont les deux extrémités évitent les classes interdites de n dans la roue.

4. Le critère combiné : la distance du point n à la corde

Les dessins (44, 62, 98) suggèrent qu'il existe toujours une décomposition de Goldbach dont les sommants sont à la fois *loin* du point z_n et joints par une corde *courte*. Ces deux paramètres se combinent en une seule fonction. Pour un couple d'impairs $(x, n - x)$, posons

$$\delta(x) \;=\; \mathrm{dist}\Big(z_n,\; [z_x,\; z_{n-x}]\Big),$$

la distance euclidienne du point bleu z_n au segment joignant les deux sommants (la corde ; si les deux sommants tombent au même point - cas limite de corde minimale - le segment est réduit à ce point). La fonction δ est croissante en l'éloignement des sommants de z_n et décroissante en la longueur de la corde : elle est maximale pour une corde courte qui serre l'*antipode* de z_n, c'est-à-dire le point $z_{N/2-n}$ dont les chiffres centrés sont exactement ceux de n (cf. preuve du §2). Maximum théorique : $\delta = 2$.

Pourquoi pas un rapport. Le critère naïf "éloignement moyen D divisé par longueur L" échoue : le rapport explose quand $L \to 0$ et son argmax n'est une décomposition de Goldbach que pour 257 des 996 valeurs $n \le 2000$ (premier contre-exemple : $n = 26$, paire $(5, 21)$). La distance au segment

est bornée et traite le cas dégénéré comme cas limite.

Ce que vérifie le programme (`goldbach-corde-optimale.py`). Pour tous les n pairs de 10 à 2000 *hors les* $n = 2p$ (p premier, cas trivial $p + p$; 830 valeurs, cordes dégénérées incluses) :

S2. sur *toutes* les paires d'impairs $(x, n-x)$: l'argmax de δ n'est une décomposition de Goldbach que dans 12,9 % des cas (107/830) - la géométrie seule ne trouve donc *pas* toujours une décomposition - mais il est toujours (830/830) soit une décomposition de Goldbach, soit une paire *interdite du crible* - $x \equiv 0$ ou $n \bmod p$ pour un premier p de la roue. Le cercle ne préfère jamais un composé "innocent" : les seules paires qui battent les décompositions de Goldbach sont précisément celles que le crible élimine.

S3. sur les paires *non interdites* : l'argmax de δ est toujours (830/830) une décomposition de Goldbach de n. Par jade1, tout $x \in [3, n/2]$ évitant les classes 0 et n modulo chaque premier $p \leq \sqrt{n}$ donne x et $n - x$ premiers ; le contenu non trivial est que la fenêtre contienne toujours une telle corde (non-vacuité, vérifiée ici empiriquement) et que ce soit la géométrie qui la désigne.

S4. l'éloignement : pour $n \not\equiv 0 \pmod 6$, le gagnant vérifie toujours $D > \pi/2$ (minimum observé $0{,}795\,\pi$, 498/498) ; pour $n \equiv 0 \pmod 6$ - le chiffre de n modulo 3 est nul, l'antipode glisse vers les classes $\equiv 0 \bmod 3$ - le gagnant peut descendre à $\approx 0{,}3\,\pi$.

Exemples : $n = 44 \to 7 + 37$ (corde dégénérée, $D = 0{,}933\,\pi$) ; $n = 62 \to 19 + 43$ ($D = 0{,}948\,\pi$, $L = 0{,}105\,\pi$) ; $n = 98 \to 37 + 61$ ($D = 0{,}933\,\pi$, $L = 0{,}038\,\pi$) - les cordes rouges des dessins.

Lecture. La fonction δ dit : "la décomposition de Goldbach se blottit contre l'antipode du point n". Le cercle ordonne les candidats par proximité archimédienne à cet antipode ; le crible élimine les classes interdites ; il reste (empiriquement, $n \leq 2000$) toujours un candidat qui maximise δ. C'est la non-vacuité sous habillage géométrique : rien n'est démontré - la barrière de parité reste le mur - mais le critère combiné ouvre la fenêtre au bon endroit, et le cas $n \equiv 0 \bmod 6$ montre que "loin de n" est une propriété du chiffre mod 3 de n, pas un théorème.

Pourquoi la géométrie seule échoue (structurellement). Sur les n pairs de 10 à 5000 hors $n = 2p$ (2131 valeurs), l'argmax de δ sur toutes les paires n'est une décomposition de Goldbach que dans 9,6 % des cas (204/2131 ; 12,9 % sous 2000) - et la proportion décroît avec n. Ce n'est pas un accident : l'optimum géométrique de δ est l'*antipode* de z_n, la classe $(N/2 - n) \bmod N$ (les cordes dégénérées $\delta = 2$: $(3, 9)$ pour 12, $(15, 15)$ pour 30, $(35, 35)$ pour 70, $(15, 45)$ pour 60). Or si un premier impair p de la roue divise n, cette classe est $\equiv 0 \bmod p$: *l'antipode est une zone interdite du crible*, peuplée de composés (7 et $91 = 7 \times 13$ pour 98, dont l'antipode est la classe $105 - 98 = 7$). La géométrie court vers l'antipode, le crible doit l'en détourner : géométrie et crible sont en conflit au même endroit dès que $p \mid n$, et la géométrie seule ne peut donc pas remplacer le crible. Elle ne réussit seule que lorsque l'antipode est propre ($n/2$ sans facteur premier impair $\leq \sqrt{n}$), ce qui recoupe largement les $n = 2p$.

Le critère affiné Σ : la géométrie seule retrouve le crible. L'objection est juste : l'antipode, optimum géométrique de δ, est peuplé de multiples dès que $p \mid n$. Mais ce "collage" a une signature géométrique exacte dans le placement lui-même. Pour un impair m et un premier p de la roue, le chiffre de lecture $u_p(m) = (-m) \bmod p$ vaut 0 exactement quand $p \mid m$ - et $u_p = 0$ signifie que

le point de m est *collé au bord gauche de son arc* de la subdivision p (chiffre centré à l'extrême $-(p-1)/2$) : le point est collé à une coche du cercle. Définissons la distance normalisée au bord

$$\omega(m) \;=\; \min_{p} \frac{\min\Big(u_p(m),\, p - u_p(m)\Big)}{p} \qquad (p \text{ parcourt les premiers impairs de la roue}),$$

nulle si et seulement si m est divisible par un premier de la roue, et le critère affiné, fonction *uniquement* des positions sur le cercle :

$$\Sigma(x) \;=\; \delta(x) \cdot \min\Big(\omega(x),\, \omega(n-x)\Big).$$

Une corde interdite a toujours un sommant collé à un bord ($x \equiv 0$, ou $x \equiv n$ c'est-à-dire $n - x \equiv 0$) donc $\Sigma = 0$: les contre-exemples de l'antipode sont éliminés *géométriquement*, non par le crible. Vérification (n pairs de 10 à 2000, hors $n = 2p$) : *l'argmax de* Σ *sur toutes les paires est une décomposition de Goldbach pour 830/830 valeurs* - $26 \to 13+13$, $44 \to 7+37$, $62 \to 31+31$, $98 \to 37+61$, $60 \to 19+41$, $70 \to 17+53$.

Honnêteté oblige : $\omega(m) > 0$ signifie exactement "m sans facteur premier $\leq \sqrt{n}$", donc les paires propres *sont* les candidats de jade1 - le crible n'est pas contourné, il est *géométrisé* : "divisible par p" se lit "collé au bord de l'arc p" sur le cercle lui-même, et la fenêtre archimédienne $x \leq n/2$ reste extérieure à la géométrie. La barrière de parité n'est pas franchie ; mais le critère Σ, une seule fonction de positions, désigne toujours (empiriquement) la bonne corde.

5. Enseignement

Pourquoi l'obstruction de parité perdure malgré le succès systématique de Σ. "Σ trouve toujours un décomposant" se décompose en deux ingrédients : (i) *propre* $\Rightarrow$ *Goldbach*, c'est le théorème jade1 (démontré, formalisé en Lean) - la géométrie l'a seulement renommé ($\omega > 0$ = pas collé à un bord) ; (ii) *il existe une paire propre dans la fenêtre* - c'est la non-vacuité, empirique, jamais démontrée. Σ détecte, il ne produit pas : si l'on savait prouver que Σ réussit pour tout n, on aurait prouvé Goldbach exactement. Trois raisons pour lesquelles la barrière demeure :

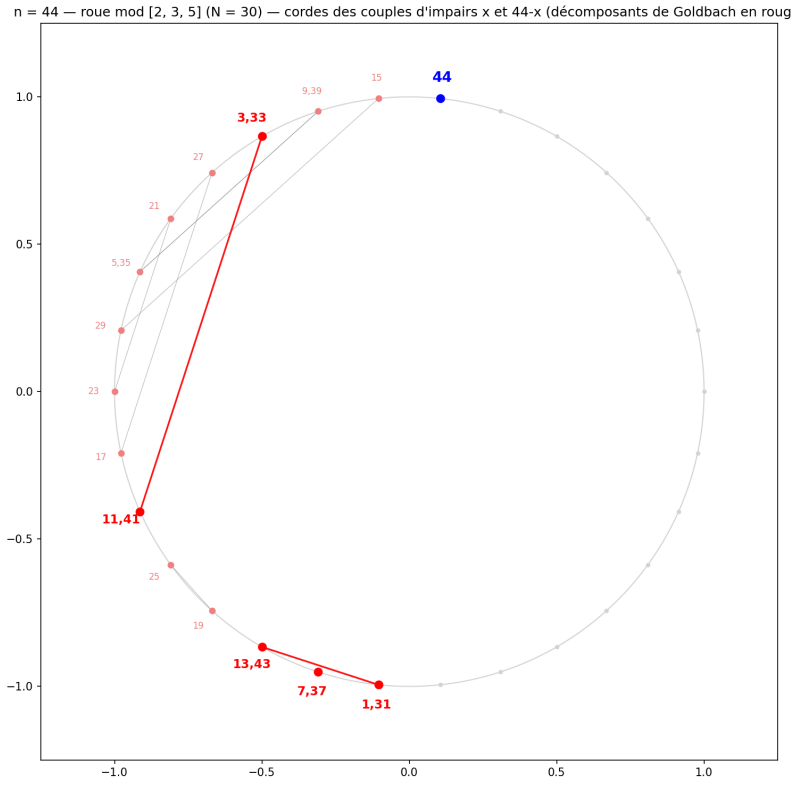
1. *aucune information nouvelle* : toute fonction des positions (δ, ω, Σ) est une fonction déterministe des classes de restes ; le Snurpf est aveugle à la fenêtre archimédienne $[3, n/2]$, et le cercle n'y ajoute rien (même structure que les revêtements : encodage fidèle, aucun mécanisme d'existence) ;
2. *limitation prouvée du crible* : il faudrait une borne *inférieure* du nombre de candidats dans la fenêtre ; le crible ne distingue pas les nombres à nombre pair/impair de facteurs premiers (problème de parité) - il borne supérieurement (Selberg) mais ne peut démontrer l'existence d'un ensemble de nombres premiers ; Chen s'arrête à "premier ou semi-premier" précisément là ;
3. *ce qui manque a un nom* : l'équirépartition des candidats dans la fenêtre (Bombieri-Vinogradov donne le niveau 1/2 en moyenne, ce qui fait passer Chen ; les paires exigeraient un niveau ≈ 1, hors d'atteinte - le même mur que les jumeaux).

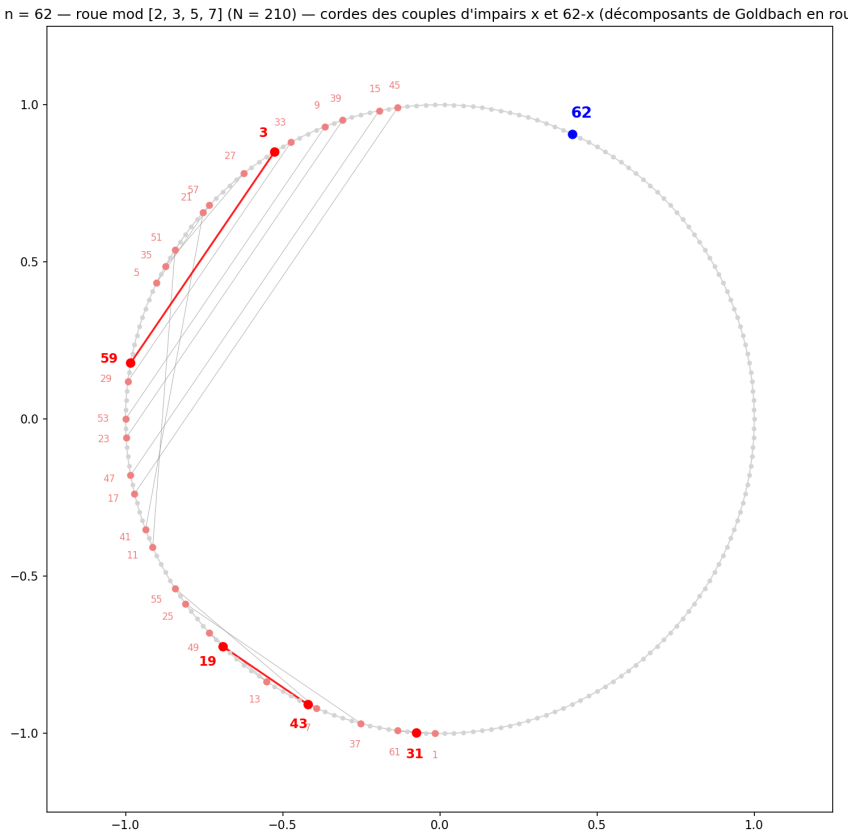
Le cercle est un objet profini ; la fenêtre est archimédienne ; Goldbach est la jonction. La géométrie vit entièrement du côté profini : elle rend le crible *lisible* (bords = classes interdites), elle ne force jamais l'existence.

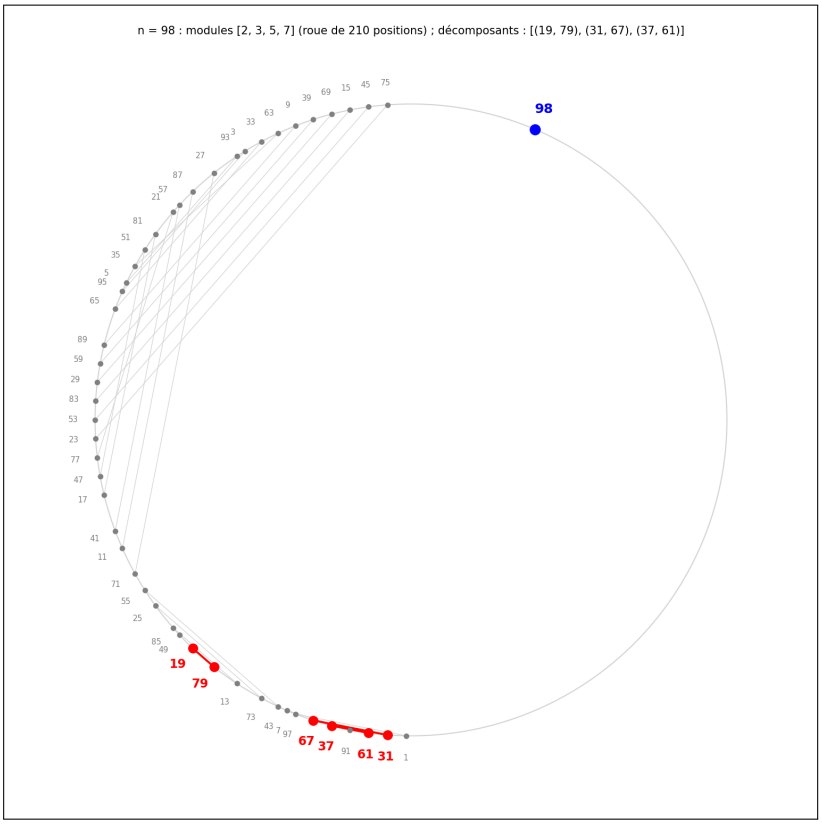
Le cercle unique porte l'involution archimédienne $m \mapsto N/2 - m$ comme sa symétrie diamétrale géométrique, et chaque diamètre est une classe du crible modulo les premiers impairs (les chiffres centrés y sont constants, seule la parité s'échange) - le même $u \mapsto -u$ que dans le fil des résidus quadratiques ($\chi(n-x) = \chi(-1)\chi(x)$). La roue profinite reste gratuite ; la fenêtre archimédienne $[3, n/2]$ reste, comme toujours, invisible pour le Snurpf.

6. Conclusion

Une corde de longueur minimale et la plus loin possible du point du cercle associé à n fournit-elle toujours une décomposition de Goldbach ? Et si oui, pourquoi ?




n = 62 — roue mod [2, 3, 5, 7] (N = 210) — cordes des couples d'impairs x et 62-x (décomposants de Goldbach en rou
62
3
59
19
43
31
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


n = 98 : modules [2, 3, 5, 7] (roue de 210 positions) ; décomposants : [(19, 79), (31, 67), (37, 61)]
98
19
79
67
37
61
31
1