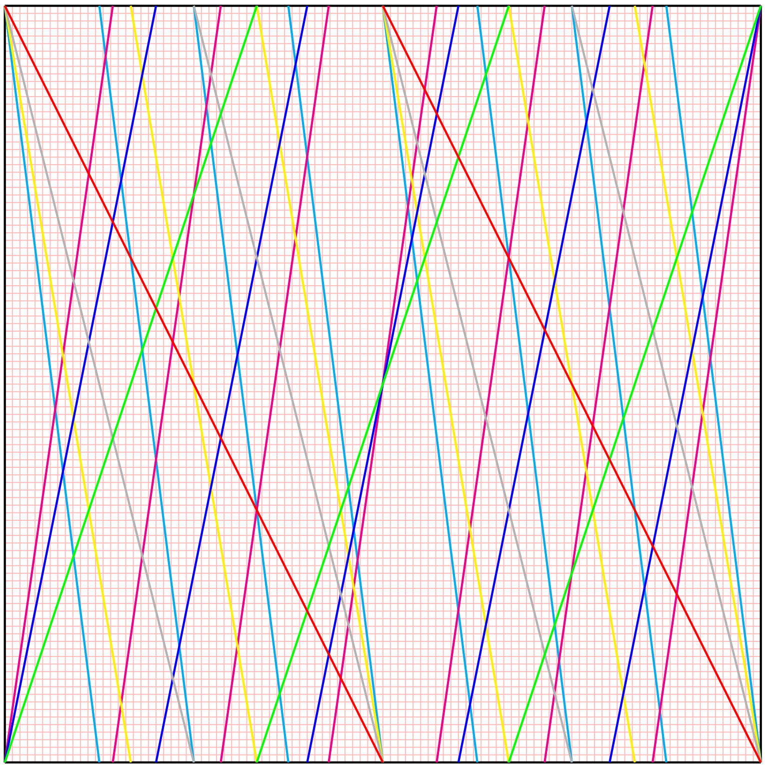
Epingler les restes modulaires sur le tore (DV, 9.7.2015)

On essaie d'appréhender l'espace des nombres premiers. On est attachée à une modélisation qui code chaque nombre entier par le n-uplet infini de ses restes modulaires selon l'infinité des nombres premiers. *Exemple* : 11 est codé par (1,2,1,4,0,11,11,11,11...).

L'objectif consiste à associer à chaque reste modulaire $a\ mod\ p$ un point du tore. Pour ça, on fixe un point du tore origine et on s'intéresse aux 2 courbes $y = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil x$ et $y = -\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor x$. Par exemple, si $p = 13$, on s'intéresse aux deux courbes $y = 7x$ et $y = -6x$. Ces 2 courbes se croisent p fois sur le tore. A chaque point d'intersection, on associe l'un des restes modulaires selon le module p.

Ci-dessous, les représentations des fonctions $y = 8x$ (cyan), $y = -7x$ (magenta), $y = 6x$ (jaune), $y = -5x$ (bleu), $y = 4x$ (gris), $y = -3x$ (vert), $y = 2x$ (rouge). Les nombres de points d'intersection sont $8+7 = 15$, $7+6 = 13$, $6+5 = 11$, $5+4 = 9$, $4+3 = 7$ et $3+2 = 5$.



Je remercie les intervenants du forum les-mathematiques.net qui ont pour pseudos *remarque* et *GaBuZoMeu* pour l'aide qu'ils m'ont apportée au sujet du tore http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,1109447.

Il y aura 2 trucs qui m'auront bien plu et issus de cette discussion :

- le fait de compter les intersections de "droites" sur le tore, qui se résume ainsi : $x, y \in [0,1[, y = px, y = -qx \implies y = px = -qx\ (mod\ 1) \implies (p+q)x = 0\ (mod\ 1) \iff (p+q)x = k, k \in \mathbb{Z} \implies k \in [0, p+q[$ si p + q $\leqslant 0$.

  Je ne sais pas si c'est bien écrit, mais ce $(mod\ 1)$ me parle enfin (je ne le comprenais pas précédemment, j'avais en tête que tout entier divisé par 1 donne un reste nul). On peut du coup (peut-être) mémoriser que les p éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ peuvent être mis en bijection avec les p intersections sur le tore des droites d'équations $y = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil x$ et $y = -\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor x$, on a ainsi une vision géométrique des éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de leur cyclicité ;
- on peut également "voir" sur le tore la divisibilité : si $d \mid n$ alors, la droite du tore $y = dx\ (mod\ 1)$ et la droite $y = nx\ (mod\ 1)$ du tore se coupent (s'intersectent ?) d fois dans un plan de coupe horizontal du tore, par exemple, le plan équatorial.

Problème : il faudrait peut-être savoir écrire ces idées matriciellement.