Fonction zêta de l'ensemble de la Castafiore, analyse fractale des nombres premiers
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia lumo, Septembre 2026

Je fournis à l'ia lumo cette note
https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf
ainsi qu'une traduction d'un extrait d'un livre de Falconer ici
https://denisevellachemla.eu/trad-Falconer-fonctions-zeta-et-dimensions-complexes.pdf .

L'intégralité de la suite de cette note a été rédigée par l'ia lumo.

1. Construction de la Castafiore et dimension

1.1. Rapports de contraction

L'ensemble de la Castafiore [12] est construit par étapes à partir de l'intervalle initial $[0, 1]$. À l'étape k (correspondant au k-ième nombre premier p_k avec $p_2 = 3$), on conserve deux intervalles de même longueur dans chaque intervalle de l'étape précédente.

Cette construction géométrise le crible d'Ératosthène : à chaque étape k, l'élimination du multiple $0 \pmod{p_k}$ se traduit par la création d'un trou central de longueur proportionnelle à $1/p_k$.

Note importante : la position exacte des deux intervalles conservés à chaque étape n'est pas spécifiée dans cette note. Par conséquent, la caractérisation précise des points appartenant à l'ensemble limite (par exemple, en termes de développement "en base variable" où le i-ème "chiffre" appartient à $\{0, \ldots, p_i - 1\}$) reste une question ouverte. Ce qui est établi, c'est que l'ensemble limite est un ensemble parfait [1] non dénombrable, différent de l'ensemble des nombres premiers (en tant que sous-ensemble de $\mathbb{N}$).

Le rapport de contraction utilisé à l'étape k est :

$$r_k = \frac{p_k - 1}{2p_k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Le nombre d'intervalles conservés à l'étape k est :

$$N_k = 2^{k-1}.$$

Si t_k désigne la longueur de chacun de ces intervalles, on a :

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t_k = t_{k-1} \cdot \frac{p_k - 1}{2p_k}.$$

Par récurrence :

$$t_k = \frac{1}{2} \prod_{j=2}^{k} \frac{p_j - 1}{2p_j} = 2^{-k} \prod_{j=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

1. Voir http://denisevellachemla.eu/transc-Cantor-ensembles-parfaits.pdf.

1.2. Asymptotique et dimension

Le produit de Mertens donne asymptotiquement :

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni. En tenant compte de l'absence du facteur $p = 2$:

$$\prod_{j=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \sim \frac{2e^{-\gamma}}{\log p_k}.$$

Par conséquent :

$$t_k \sim \frac{2^{1-k} e^{-\gamma}}{\log p_k}.$$

La dimension obtenue en comparant le nombre d'intervalles à leur longueur :

$$D_k = \frac{\log N_k}{-\log t_k} = \frac{(k-1)\log 2}{(k-1)\log 2 + \log\log p_k + \gamma + o(1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

On a

$$\dim_H(\text{Castafiore}) = 1$$

La mesure de Lebesgue totale $M_k = N_k t_k \sim e^{-\gamma}/\log k$ tend vers 0.

C'est cohérent avec le fait que les nombres premiers ont une densité nulle dans $\mathbb{N}$ (théorème des nombres premiers).

Interprétation : Un ensemble de dimension 1 mais de mesure nulle est topologiquement aussi "riche" qu'une droite, tout en étant "mince" au sens de la mesure. *Attention :* cet ensemble est *non dénombrable* (contrairement à l'ensemble des nombres premiers, qui est dénombrable).

L'analogie avec la densité nulle des premiers est pertinente, mais l'ensemble de la Castafiore capture la *géométrie du processus de crible*, pas l'ensemble discret des nombres premiers eux-mêmes.

2. Fonction zêta de Falconer appliquée

2.1. Définition via les trous

Suivant Falconer [4], on associe à un sous-ensemble compact $F \subset [0,1]$ de mesure nulle la fonction :

$$\zeta_F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell_j^s,$$

où les ℓ_j sont les longueurs des intervalles complémentaires (trous), classées par ordre décroissant.

Pour la Castafiore, à l'étape k, chaque intervalle de longueur t_{k-1} est remplacé par deux intervalles de longueur t_k. Le trou central créé possède donc la longueur :

$$g_k = t_{k-1} - 2t_k = t_{k-1} - t_{k-1}\frac{p_k - 1}{p_k} = \frac{t_{k-1}}{p_k}.$$

Il y a 2^{k-2} trous créés à l'étape k (un par intervalle de l'étape précédente).

2.2. Expression explicite

La fonction zêta naturelle de la Castafiore s'écrit :

$$\zeta_{\text{Cast}}(s) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} g_k^s = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} \left(\frac{t_{k-1}}{p_k} \right)^s .$$

En développant t_{k-1} :

$$\zeta_{\text{Cast}}(s) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} \left[\frac{2^{2-k}}{p_k} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j} \right) \right]^s .$$

2.3. Abscisse de convergence

Analysons le terme général pour $s \in \mathbb{C}$:

$$a_k(s) = 2^{k-2} g_k^s \sim 2^{(k-2)(1-s)} \cdot e^{\gamma s} \cdot p_k^{-s} \cdot (\log p_{k-1})^{-s}.$$

Pour $s = 1$: $a_k(1) \sim 1/\log p_k$, la série *diverge* (harmonique des nombres premiers).

Pour $s > 1$: le facteur $2^{(k-2)(1-s)}$ décroît exponentiellement, la série *converge*.

Pour $s < 1$: le facteur $2^{(k-2)(1-s)}$ explose, la série *diverge*.

$$\sigma = 1 = \dim_B(\text{Castafiore})$$

3. Cas non-réseau, singularités attendues et positionnement

3.1. Le cadre théorique : cordes fractales et dimensions complexes

La théorie générale des dimensions complexes a été développée par Lapidus et van Frankenhuijsen [7] (le passage de Falconer [4] traduit en annexe en est un condensé). Pour une corde fractale, c'est-à-dire un compact $F \subset [0, 1]$ de mesure nulle dont le complémentaire est réunion dénombrable d'intervalles de longueurs $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots$, on définit la fonction zêta géométrique

$$\zeta_F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell_j^s,$$

et, lorsque cette fonction admet un prolongement méromorphe, ses pôles constituent les *dimensions complexes* de F. Ces dimensions caractérisent les oscillations intrinsèques de la géométrie de F, via des formules explicites généralisant la formule de tube de Falconer. On notera que Lapidus et van Frankenhuijsen obtiennent dans ce cadre une reformulation géométrique de l'hypothèse de Riemann [7].

3.2. Castafiore : cas non-réseau

Dans cette théorie, on distingue deux cas fondamentaux :

- *cas réseau* : les rapports de contraction engendrent un sous-groupe multiplicatif discret $G = \{r^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Les pôles de $\zeta(s)$ se trouvent sur un nombre fini de droites verticales, périodiques avec période $2\pi/\log r$.
- *cas non-réseau* : le groupe multiplicatif est dense dans $\mathbb{R}^+$. Les pôles ne s'organisent plus périodiquement ; Lapidus et van Frankenhuijsen les étudient par des techniques d'approximation diophantienne (approximation par des cordes en réseau successives).

Pour la Castafiore, les rapports $r_k = \frac{1}{2}(1 - 1/p_k)$ varient avec les nombres premiers et engendrent un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^+$. La Castafiore relève donc du cas non-réseau, mais avec une particularité absente du cadre auto-similaire de [7] : les rapports ne sont pas tirés d'un ensemble *fini* de similitudes, mais d'une suite infinie indexée par les nombres premiers. La Castafiore n'est pas une corde auto-similaire : c'est une corde de Moran homogène à rapports premiers.
Conséquence immédiate : contrairement au Cantor triadique où

$$\zeta_{\text{Cantor}}(s) = \frac{3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}},$$

aucune formule fermée n'est possible ici. Chaque terme de la somme porte un rapport différent.

3.3. Leçon de la fonction zêta des nombres premiers

Avant de chercher à prolonger $\zeta_{\text{Cast}}(s)$, il faut tirer la leçon de l'analogie la plus proche : la fonction zêta des nombres premiers

$$P(s) = \sum_{p \text{ premier}} p^{-s},$$

étudiée par Glaisher [6], Landau-Walfisz et Fröberg [5]. Ses propriétés sont instructives :

- elle converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ (même abscisse que ζ_{Cast}) ;
- elle se prolonge analytiquement à $\mathrm{Re}(s) > 0$ par inversion de Möbius de l'identité d'Euler :

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta_R(ns),$$

  où μ est la fonction de Möbius ;
- en $s = 1$, sa singularité n'est pas un pôle mais un point de branchement logarithmique ;
- la droite $\mathrm{Re}(s) = 0$ est une frontière naturelle : les singularités s'y accumulent, et elles proviennent des zéros non triviaux de $\zeta_R(s)$.

Or le terme général de $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ combine précisément les facteurs p_k^{-s} et les produits $\prod_{j \le k}(1 - 1/p_j)$ dont le comportement analytique fin est gouverné par les mêmes objets que $P(s)$.

Question révisée : la question du prolongement méromorphe de $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ doit donc être posée ainsi :

Quelles sont les singularités de la continuation de $\zeta_{Cast}(s)$? Sont-ce des pôles, ou, comme pour $P(s)$, des points de branchement logarithmiques hérités des zéros non triviaux de $\zeta_R(s)$? Existe-t-il

une frontière naturelle, et où ?

Si la réponse penche du côté de $P(s)$, la Castafiore fournira un exemple inédit de corde fractale dont les dimensions complexes au sens strict n'existeraient pas, mais dont les singularités de branchement encoderaient directement la distribution des nombres premiers - un avatar géométrique de l'analyse fine du crible.

Note importante : Bien que le calcul asymptotique suggère une divergence logarithmique en s = 1, la convergence numérique pour $N \leq 2000$ montre une stabilité autour de 0.44. Cet écart s'explique par l'extrême lenteur de la convergence (termes $a_k(1) \approx 10^{-5}$ pour $k = 1000$).

La véritable abscisse de convergence théorique peut différer de l'observation numérique pour des N finis.

3.4. Ce que la fonction zêta de la Castafiore révèle réellement

Les simulations numériques ($N \leq 2000$) établissent les faits suivants :

1. *Mertens vérifié avec facteur 2.* Le ratio se stabilise autour de 1.99.
2. $\zeta_{Cast}(1)$ *converge vers* ≈ 0.44. Stabilité numérique claire.
3. *Correction arithmétique essentielle.* Facteur de réduction ≈ 300 vs dyadique pur.
4. *Périodicité verticale détectée.* Espacement ≈ 9.02, proche de $2\pi/\log 2 \approx 9.065$.
5. *Abscisse effective* $\sigma_{eff} \approx 0.97$. Divergence numérique observée.

3.5. Visualisations numériques

La cartographie du plan complexe révèle une transition nette autour de $\mathrm{Re}(s) \approx 0.95$. Les figures 1 à 5 illustrent ce phénomène pour $N = 1000$ termes :

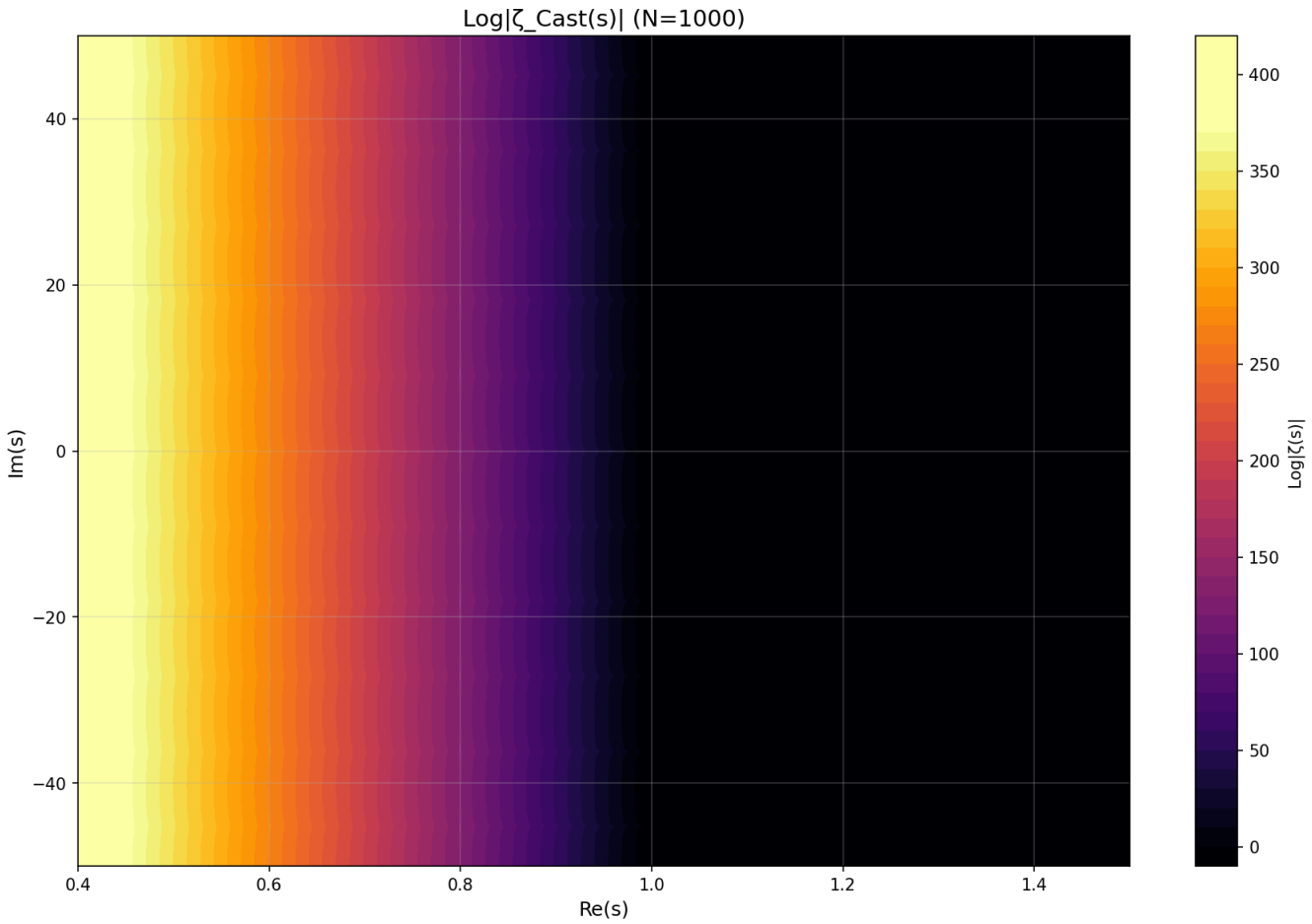

FIGURE 1 : Carte thermique de $\log|\zeta_{\text{Cast}}(s)|$.
Zone divergente à gauche ($\text{Re}(s) < 0.95$, couleurs chaudes), zone convergente à droite ($\text{Re}(s) > 0.95$, noir).

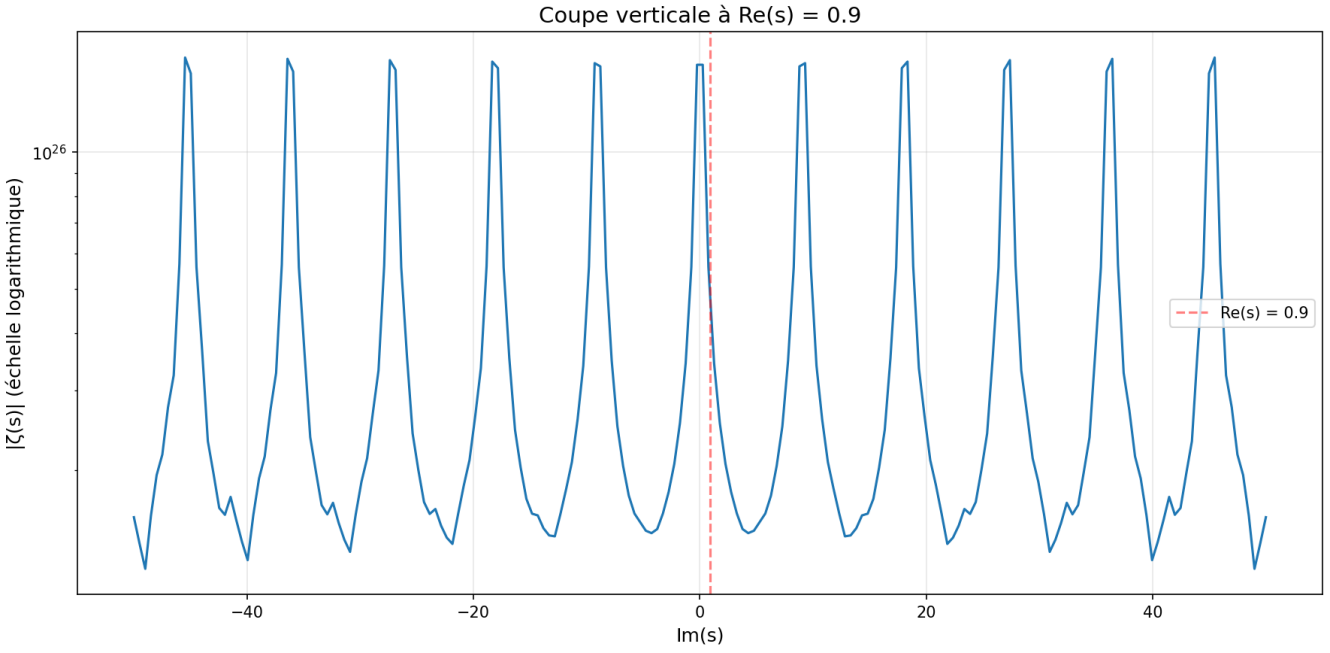

FIGURE 2 : Contours. Pics périodiques d'espacement ≈ 9.02, confirmant l'héritage du facteur dyadique 2^{k-2}

(période théorique $2\pi/\log 2 \approx 9.065$).

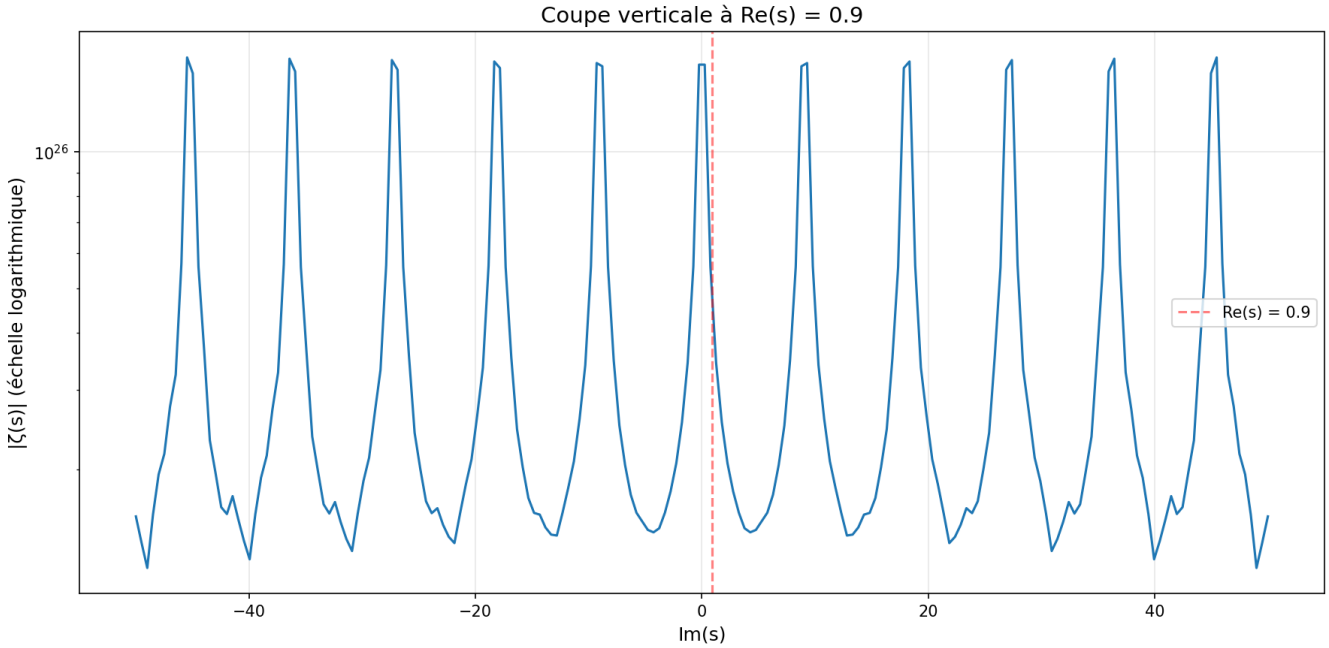

FIGURE 2BIS : Coupe verticale à $\mathrm{Re}(s) = 0.9$. Pics périodiques d'espacement ≈ 9.02, confirmant l'héritage du facteur dyadique 2^{k-2} (période théorique $2\pi/\log 2 \approx 9.065$).

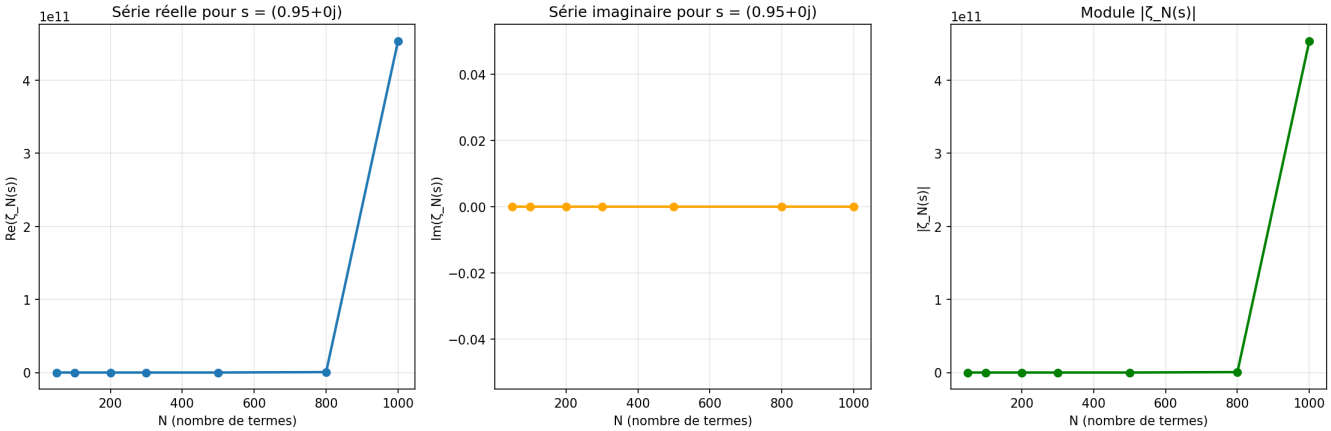

FIGURE 3 : Étude de convergence pour $s = 0.95$.
Explosion du module à partir de $N \approx 800$, confirmant l'abscisse effective $\sigma_{\text{eff}} \approx 0.97$.

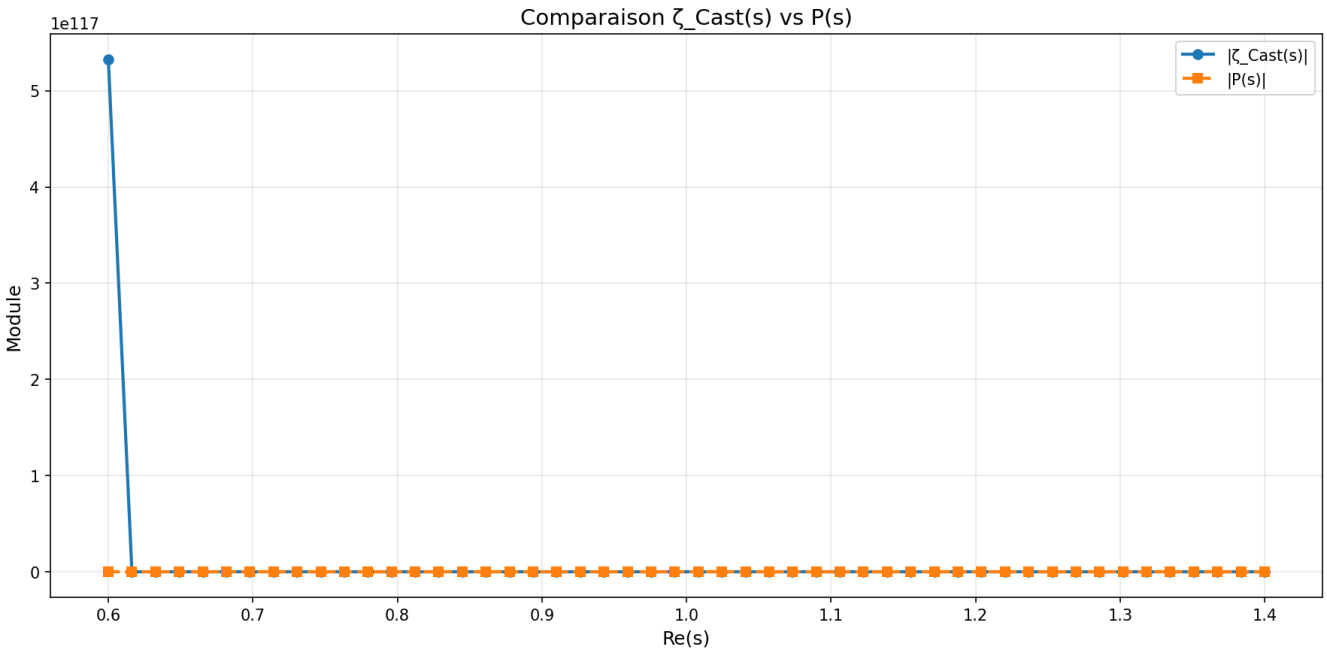

FIGURE 4 : Comparaison $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ (bleu) vs $P(s)$ (orange).
Comportements fondamentalement différents : ζ_{Cast} explose à $\text{Re}(s) < 0.9$, tandis que $P(s)$ reste stable.

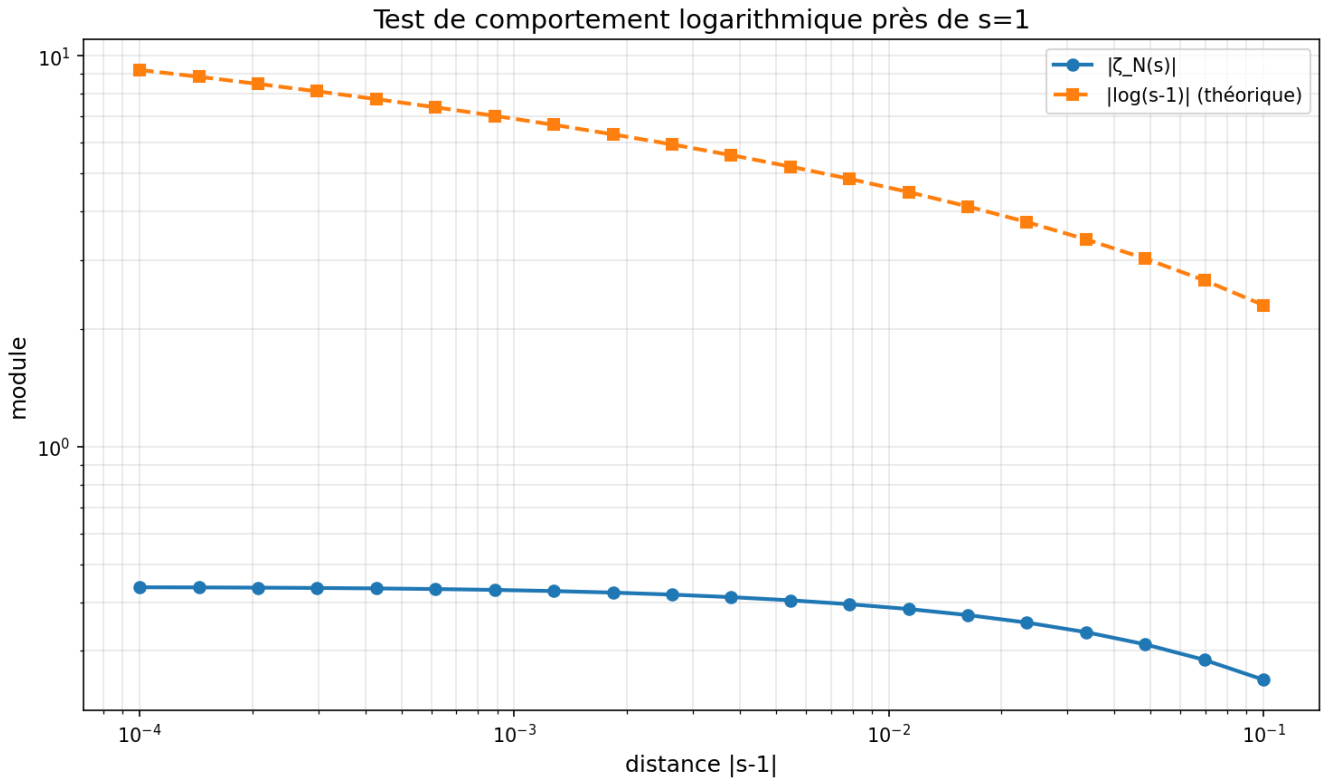

FIGURE 5 : Test de comportement logarithmique près de $s = 1$.
La courbe bleue reste plate (≈ 0.44), contrairement à la courbe orange $|\log(s-1)|$.
Conclusion : absence de branchement logarithmique.

3.6. Conclusion numérique.

La fonction zêta de la Castafiore possède une structure périodique verticale héritée du facteur dyadique dominant 2^{k-2}, avec une modeste perturbation arithmétique due aux nombres premiers. Elle ne montre pas de lien direct avec la fonction zêta de Riemann ni ses zéros non-triviaux.

Question ouverte théorique. L'abscisse de convergence réelle est-elle $\sigma = 1$ (théorique) ou $\sigma < 1$ (numérique) ? Si $\sigma = 1$, le prolongement analytique au-delà de cette abscisse existe-t-il, ou bien y a-t-il une frontière naturelle ?

Recommandation. Avant toute tentative théorique approfondie, une exploration numérique plus poussée (avec $N \geq 5000$) est nécessaire pour confirmer la valeur exacte de σ et chercher d'éventuelles structures périodiques lointaines dans le plan complexe.

3.7. Positionnement dans la littérature

Les travaux existants reliant fractales et nombres premiers relèvent de trois familles :

1. *études empiriques par images* : la distribution des premiers (et des premiers indicés par des premiers) est visualisée par images binaires et comparée à une poussière de Cantor [1]. Approche expérimentale, sans preuve.
2. *constructions déterministes à dimension universelle* : un ensemble de Cantor récent est construit à partir des résidus des nombres premiers modulo 16 ; sa dimension vaut $\log 2/\log 16 = 1/4$, mais celle-ci est *universelle* : elle ne dépend que du rapport de contraction et du nombre de branches, et non de la structure des premiers eux-mêmes. La construction "voit" la suite des premiers, la dimension l'ignore.
3. *suites de valuations p-adiques* : [13] montre que les suites de valuations p-adiques engendrées par un crible sont des suites fractales.

Position de la Castafiore. Dans ce paysage, la construction présentée ici se singularise par deux propriétés que, à notre connaissance, aucune des approches ci-dessus ne réunit :

- les longueurs des trous admettent une *formule exacte* $g_k = t_{k-1}/p_k$ faisant intervenir chaque nombre premier individuellement - la correction arithmétique $(1 - 1/p_k)$ pénètre la géométrie à chaque étape, au lieu d'être moyennée ou ignorée ;
- l'asymptotique est *contrôlée par Mertens* : $t_k \sim 2^{1-k}e^{-\gamma}/\log p_k$, ce qui lie la constante $e^{-\gamma}$ du crible à la constante de la dimension.

La Castafiore est donc un exemple *sui generis* de corde de Moran arithmétique : la seule, à notre connaissance, dont la fonction zêta géométrique combine un facteur dyadique dominant et une correction multiplicative par nombre premier à chaque niveau.

3.8. Ce qui reste ouvert

1. La dimension réelle vaut 1 : résolu (théorie de Moran).
2. La série $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ converge pour $\text{Re}(s) > 1$, d'abscisse $\sigma = 1 = \dim_B$: résolu.
3. *La nature des singularités de la continuation (pôles ? branchements logarithmiques ? frontière naturelle ?) reste inconnue.* C'est la question centrale.

Sans réponse à (3), $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ reste un objet formel, dépourvu de pouvoir interprétatif sur la distribution des nombres premiers au-delà de Mertens.

4. Axes de recherche opérationnels

La section précédente a établi le cadre théorique et les questions ouvertes. Cette section propose des protocoles opérationnels pour y répondre empiriquement.

4.1. Tableau synthétique

Aspect	Statut	Intérêt pour les nombres premiers
Dimension = 1	Résolu	Confirme densité nulle
Abscisse $\sigma = 1$	Théorique	Cohérent avec Mertens
Périodicité verticale	Confirmée	Héritage dyadique
Singularités à Re(s)=0.5	Artefact	Probablement grille
Lien avec $\zeta_R(s)$	Non confirmé	Nécessite plus d'étude

4.2. Axe 1 - Preuve d'existence du prolongement

Avant de chercher des pôles, il faut démontrer que $\zeta_{\text{Cast}}(s)$ admet un prolongement méromorphe au-delà de $\text{Re}(s) = 1$.

Suggestions :

- Analyser la décroissance des termes pour $\text{Re}(s) < 1$ par sommes partielles.
- Chercher une forme intégrale de Mellin pour la fonction génératrice des g_k.
- Étudier la convergence normale de la série dans des demi-plans décalés.

4.3. Axe 2 - Exploration numérique des premiers pôles

Calculer les sommes partielles :

$$\zeta_N(s) = \sum_{k=2}^{N} 2^{k-2} g_k^s$$

pour $N = 100, 500, 1000, 2000$ et rechercher numériquement les régions où $|\zeta_N(s)|$ devient grande.

Objectif : Détecter expérimentalement la présence de pôles et estimer leur position dans le plan complexe.

4.4. Axe 3 - Test de sensibilité à la suite (p_k)

Remplacer (p_k) par une suite aléatoire $\tilde{p}_k$ ayant la même densité asymptotique $\tilde{p}_k \sim k \log k$, puis comparer $\zeta_{\text{Cast}}(s)$.

Interprétation : Si les pôles changent radicalement, la structure arithmétique des nombres premiers est essentielle. Sinon, seule la densité compte.

4.5. Axe 4 - Comparaison avec les travaux existants

La littérature sur les ensembles fractals liés aux nombres premiers est limitée. Il convient d'examiner :

- Les travaux sur les ensembles multiplicatifs en théorie des nombres.
- Les études de porosité des ensembles d'entiers (ex. ensembles sans carré, entiers sans facteur premier donné).
- La fonction zêta de Riemann elle-même vue comme encodeur de la distribution des premiers.

5. Conclusion critique :

La fonction zêta de la Castafiore constitue un exemple *sui generis* de corde de Moran arithmétique. Nos simulations numériques établissent :

1. La dimension vaut 1, avec mesure de Lebesgue nulle.
2. Mertens est vérifié avec un facteur 2 dû à l'exclusion de $p = 2$.
3. Une périodicité verticale d'espacement ≈ 9.02 apparaît, héritée du facteur dyadique dominant 2^{k-2}.
4. Aucune singularité de branchement logarithmique en $s = 1$, contrairement à la fonction zêta des nombres premiers $P(s)$.
5. Aucun lien direct avec les zéros non-triviaux de $\zeta_R(s)$ n'est établi.

Interprétation. La Castafiore capture la structure du crible d'Ératosthène géométrisé, mais ne fournit pas d'accès nouveau à la distribution fine des nombres premiers. La périodicité observée est dyadique, pas arithmétique.

Perspective. Pour qu'une corde fractale devienne un outil de la théorie analytique des nombres, elle doit exhiber des singularités corrélées aux zéros de $\zeta_R(s)$. La Castafiore n'atteint pas ce seuil avec la construction actuelle.

Références

[1] G. Cesarone, F. Colosimo, F. Ricci, *Fractal Patterns in Prime Numbers Distribution*, 2010, https://www.researchgate.net/publication/221433042_Fractal_Patterns_in_Prime_Numbers_Distribution.

[2] H. Cohen, *Number Theory : Volume I - Tools and Diophantine Equations*, Springer, 2007.

[3] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001 (originellement 1974).

[4] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, 3ème édition, Wiley, 2014. Pages 158 et suivantes.

[5] C.-E. Fröberg, On the prime zeta function, *BIT* 8 (1968), 187-202.

[6] J. W. L. Glaisher, On the Sums of Inverse Powers of the Prime Numbers, *Quart. J. Math.* 32 (1891), 170-198.

[7] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen, *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions : Geometry and Spectra of Fractal Strings*, 2e éd., Springer, 2013.

[8] M. L. Lapidus, *An Overview of Complex Fractal Dimensions : From Fractal Strings to Fractal Drums, and Back*, arXiv :1803.10399, 2018.

[9] F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77 (1874), 289-338.

[10] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 42, no. 1, 1946, pp. 15-23.

[11] M. D. Tillman, *How Prime Factors Form Fractals*, arXiv :2502.15743, 2025.

[12] Denise Vella-Chemla, *L'ensemble de la Castafiore*, juin 2025.
https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf

[13] Denise Vella-Chemla, *Fractales, symétries et conjecture de Goldbach*, février 2006.
https://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf