**Une caractérisation unifiée : primalité et classe $4k+1$ / $4k+3$**
**Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, septembre 2026**

# 1. Motivation

On cherche une caractérisation qui, à partir d'un seul objet mathématique, distingue simultanément :

- les entiers premiers des entiers composés ;
- parmi les premiers, la classe $p \equiv 1 \pmod 4$ de la classe $p \equiv 3 \pmod 4$.

# 2. Le critère d'Euler et sa réciproque

Pour $n$ impair, on note $\left(\frac{x}{n}\right)$ le symbole de Jacobi.

**Théorème 1** (Critère d'Euler)**.** *Si $n = p$ est premier, alors pour tout $x$ premier avec $p$,*

$$x^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{x}{p}\right) \pmod p.$$

**Théorème 2** (Réciproque - test de Solovay-Strassen)**.** *Si $n$ est impair composé, il existe $x$ premier avec $n$ tel que*

$$x^{(n-1)/2} \not\equiv \left(\frac{x}{n}\right) \pmod n.$$

*Plus précisément, plus de la moitié des classes inversibles modulo $n$ violent la congruence.*

**Corollaire 3.** *Pour $n$ impair,*

$$n \text{ est premier} \iff \forall x \text{ premier avec } n, \quad x^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{x}{n}\right) \pmod n.$$

Ceci caractérise la primalité par une seule famille de congruences, sans recours à un comptage séparé des résidus quadratiques.

# 3. La classe $4k+1$ / $4k+3$ : même formule, un seul point

Une fois $n = p$ connu premier, il suffit d'évaluer la congruence précédente en $x = -1$ :

$$(-1)^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{-1}{p}\right) \pmod p.$$

C'est encore le critère d'Euler, spécialisé en $x = -1$ : ce n'est pas une condition supplémentaire, mais une évaluation ponctuelle de la même formule.

**Corollaire 4.**

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 1 \pmod 4, \qquad \left(\frac{-1}{p}\right) = -1 \iff p \equiv 3 \pmod 4.$$

### Équivalence avec la formulation en termes de symétrie

La formulation "pour tout $x$, $\chi(x) = \chi(p-x)$ (ou $\neq$) selon la classe" est équivalente à l'évaluation en $x = -1$ seul, par multiplicativité du caractère $\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ :

$$\chi(p-x) = \chi(-x) = \chi(-1)\,\chi(x).$$

Donc $\chi(p-x) = \chi(x)$ pour tout $x$ si et seulement si $\chi(-1) = 1$, et $\chi(p-x) = -\chi(x)$ pour tout $x$ si et seulement si $\chi(-1) = -1$. La condition "pour tout $x$" n'apporte rien de plus que le test en $x = -1$.

## 4. Synthèse

| **Question** | **Test** |
|---|---|
| $n$ est-il premier ? | $\forall x$ : critère d'Euler + réciproque |
| $p$ premier : 1 ou 3 mod 4 ? | $x = -1$ dans le même critère d'Euler |

Un même objet - le symbole de Legendre/Jacobi via le critère d'Euler - interrogé globalement (tous les $x$) certifie la primalité, et interrogé localement (au seul point $x = -1$) donne la classe $4k+1/4k+3$.