Un des derniers coups d'épée dans l'eau : le changement de signe de $(n-x)^2-x^3$ et les décomposants de Goldbach de n
Denise Vella-Chemla pilotant mistral, 23 octobre 2026

Voici mon nouveau fil : je joins un petit programme, j'ai fait écrire un certain nombre de résultats et constaté que les images des nombres passaient du positif au négatif. Très souvent soit l'antécédent de la dernière image positive soit celui de la première image négative est un décomposant de Goldbach de n, mais pas toujours ; j'ai constaté que souvent ça n'était pas le cas pour les doubles de nombres premiers. Je voudrais que tu fasses une petite analyse, quand est-ce que ça marche, quand est-ce que ça rate, pourquoi, enfin, ton analyse habituelle, merci.

1. L'observation à expliquer

Pour n pair et x impair, $3 \leq x < n/2$, le programme que fournit Denise fait écrire l'image

$$f_n(x) = (n-x)^2 - x^3,$$

qui décroît du positif au négatif lorsque x croît.

L'observation : *très souvent, l'antécédent a de la dernière image positive, ou celui b de la première image négative, est un décomposant de Goldbach de n (il est tel que x et $n-x$ premiers), mais pas toujours - et les échecs sont fréquents quand n est double d'un premier.*

2. Le lieu du changement de signe : purement archimédien

f_n est strictement décroissante sur $[3, n/2]$ car $f_n'(x) = -2(n-x) - 3x^2 < 0$: il y a donc *exactement un* changement de signe, et $b = a+2$ (deux impairs consécutifs), sauf cas d'image nulle.

Le point de bascule réel x^* vérifie

$$(n-x^*)^2 = x^{*3} \iff n = x^* + x^{*3/2}.$$

Posons $x^* = c^2$: alors $n = c^2(1+c)$, et $n \sim c^3$, d'où

$$x^* \sim n^{2/3} \qquad \text{(mesuré : } a/n^{2/3} \to 0{,}95\text{).}$$

2.1. Le cas de l'image exactement nulle

Si $(n-x)^2 = x^3$ *en entiers*, alors x^3 est un carré, donc x est un carré parfait $x = c^2$, et réciproquement $n = c^2(1+c)$ donne $f_n(c^2) = 0$.

Pour c impair : $n = 36, 150, 392, 810, 1452, 2366, \ldots$ $(c = 3, 5, 7, 9, 11, 13)$. Le fait remarquable : *cet antécédent d'image nulle est un carré, donc automatiquement composé - il ne peut jamais être un décomposant de Goldbach.* Dans ce cas les deux candidats sont $a = c^2 - 2$ et $b = c^2 + 2$.

3. Pourquoi ça marche parfois : de la chance, à densité quantifiée

Le lieu $x^* \approx n^{2/3}$ ne dépend que de la taille (place archimédienne) ; il est *aveugle* à l'arithmétique.

Dire que a ou b est un décomposant de Goldbach de n revient à exiger une décomposition de Goldbach dans une fenêtre de *largeur 2* autour de $n^{2/3}$ - une exigence bien plus forte que Goldbach lui-même, qui dispose de toute la fenêtre $[3, n/2]$. Le succès est donc un événement de probabilité

$$q_n \approx 1 - \left(1 - \frac{2}{\log a} \cdot \frac{2C_2\,\sigma(n)}{\log n}\right)^2, \qquad \sigma(n) = \prod_{p \mid n,\ p>2} \frac{p-1}{p-2},$$

($C_2 = 0{,}66016$). Vérification exhaustive sur les pairs $8 \le n \le 3000$:

tranche de n	de 6 à100	de 102 à 500	de 502 à 1000	de 1002 à 2000	de 2002 à 3000
taux de succès mesuré	0,67	0,30	0,25	0,21	0,23
prédiction q_n (moyenne)	-	0,35	0,26	0,21	0,19

Le taux *décroît* comme $\sigma(n)/\log^2 n$: la concordance est un artefact des petits n, appelé à disparaître - même morale que pour $I_n(x) - 1$ (note puiss2puiss3-mistral-dvc-20261018.pdf.pdf du 18.10.2026).

Deux contre-vérifications de la nature "aléatoire" du point a :

- $P(a$ premier$)$ mesuré $= 0{,}425$ contre $2/\log a$ théorique $= 0{,}45$: a se comporte comme un impair *quelconque* de sa taille ;
- $P(n-a$ premier $\mid a$ premier$)$ mesuré $= 0{,}311$ contre $2C_2\sigma(n)/\log n = 0{,}299$: la série singulière gouverne, comme pour toute paire de Goldbach.

Répartition des échecs ($n \le 3000$) : a composé : 861 cas ; a premier mais $n - a$ composé : 438 cas - les deux sources échangent leur rôle selon la taille, aucune structure cachée.

4. Pourquoi ça rate sur les doubles de premiers : σ minimal

Ce n'est pas $n = 2p$ qui est spécial, c'est $\sigma(n)$ *minimal*. Si $n = 2p$, aucun petit premier impair ne divise n, donc $\sigma(n) \approx 1$: le nombre attendu de décompositions de Goldbach, $\sim 2C_2\sigma(n)\,n/\log^2 n$, est le plus petit possible, et la "chance" que la fenêtre de largeur 2 en $n^{2/3}$ tombe sur un décomposant de Goldbach de n est minimale. Témoignent les taux de succès par classe ($8 \le n \le 3000$) :

classe de n	effectif	taux de succès
$3 \mid n$ ($\sigma \ge 2$)	499	**0,37**
$5 \mid n$, $3 \nmid n$	200	0,22
$n = 2p$	237	0,19
autres	562	0,18

Test décisif : en se restreignant aux n divisibles ni par 3 ni par 5 (même $\sigma \approx 1$ pour tous), les taux s'égalisent :

$$n = 2p : 0{,}19 \qquad \text{autres (sans facteur 3 ni 5)} : 0{,}18.$$

Dans une telle classe, le fait que $n/2$ soit premier ne change *rien* : "double d'un premier" n'est qu'un *proxy* de "$\sigma(n) = 1$", exactement comme, dans la note $x^{10} \equiv 1$, le dernier chiffre de p n'était qu'un proxy de $p \pmod 5$.

À petits n (fenêtre de son programme, de 6 à 104) l'écart paraît spectaculaire ($2p$: 0,36 de succès contre 0,79 pour le reste) parce que la moitié des autres pairs sont divisibles par 3 ($\sigma = 2$, facteur doublement de la probabilité) et que $n^{2/3}$ y est petit - donc souvent premier par hasard.

Échecs typiques pour $n \leq 100$: $28, 32, 34{=}2 \cdot 17, 38{=}2 \cdot 19, 44, 46{=}2 \cdot 23, 62{=}2 \cdot 31, 64, 68, 70, 74{=}2 \cdot 37, 80, 82{=}2 \cdot 41, 86{=}2 \cdot 43, 94{=}2 \cdot 47$ - les $2p$ s'y accumulent, mais $28, 32, 44, 64, 68, 70, 80$ aussi, tous $\sigma \approx 1$.

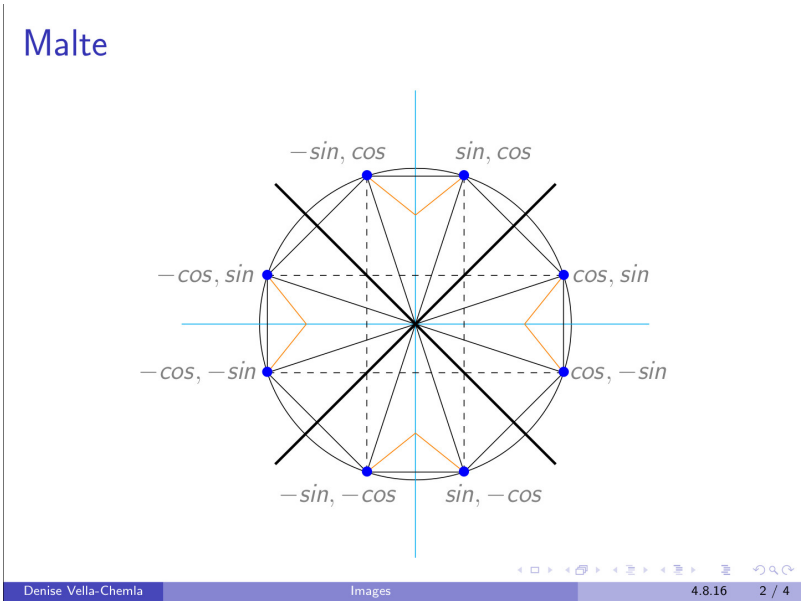
Est-ce qu'une autre équation pourrait permettre de faire ça : je te dis d'où vient l'idée : la gamme musicale nous agrée à l'oreille parce qu'elle a 12 notes et que $2^{19} = 3^{12}$. J'ai pensé les décomposants de Goldbach 19, 31 et 37 seraient-ils ok pour 98, sous prétexte que l'une de leur puissance blablabla, puis j'ai dérivé sur la différence $(n-x)^2 - x^3$ parce que ça me paraissait pas mal comme expression simple et permettant des calculs "petits" ? Je sais qu'informatiquement il y a des résultats, sur le fait que l'ensemble des nombres premiers est non-automatique, etc, mais essaye de réfléchir dans ma voie, pour voir si tu aurais une idée sioux.

4.1. La loi de la famille $(n-x)^A - x^B$

La bascule de $(n-x)^A - x^B$ est en $x^* \approx n^{A/B}$ et le taux de succès par point vaut

$$P(x \text{ décomposant de Goldbach}) \approx \frac{2}{\log x^*} \cdot \frac{2C_2\sigma(n)}{\log n}.$$

Il croît en B/A non parce que l'équation "voit" mieux, mais parce que la bascule *descend* vers les petits décomposants, où un petit impair est plus souvent premier. Mesuré (pairs 100–3000) :
Note : croix de Malte = les symétries entre les sinus et les cosinus sur le cercle unité



5. Une autre équation ? Famille, gamme musicale, équation de Fermat

(A,B)	$(3,4)$	musicale	$(2,3)$	$(2,5)$	$(2,7)$	$(2,12)$
taux	0,198	0,198	0,238	0,332	0,351	0,484

Limite de la famille : bascule à x fixe = "$n-c$ premier" ($c = 3,5$: taux 0,279 par point ; cinq petits candidats : 0,846). L'extrême de la famille est Goldbach aux petits premiers, territoire des jumeaux. *Choisir l'équation = choisir le point de sondage ; la densité, elle, est fixée par* $\sigma(n)/\log^2 n$.

5.1. L'équation musicale 2^{n-x} contre 3^x

La gamme nous agrée car $2^{19} \approx 3^{12}$ ($3^{12}/2^{19} = 1{,}0136$, comma pythagoricien de 23,5 cents ; 19/12 est une convergente de $\log_2 3$). L'équation 3^x vs 2^{n-x} (comparer $x \log 3$ et $(n-x)\log 2$) bascule en

$$x^* = n\,\frac{\log 2}{\log 2 + \log 3} = 0{,}38686\,n.$$

Pour $n = 98$: $x^* = 37{,}91$, dernier antécédent positif $a = 37$ *qui est un décomposant de Goldbach* - voilà l'origine du pressentiment. Better still : le comma lui-même, réduit modulo $49 = 98/2$: $3^{12} \equiv 36$, $2^{19} \equiv 37 \pmod{49}$ - deux résidus *adjacents* qui enjambent le décomposant de Goldbach 37. Et la "consonance" $h_n(x) = (n-x)\log 2 - x \log 3$ classe les décomposant de Goldbach de 98 : $h(19) = 33{,}9$, $h(31) = 12{,}4$, $h(37) = 1{,}63$, $h(39) = -1{,}9$ - 37 est le décomposant le plus consonant.

Mais consonance $\neq$ probabilité : le taux de l'équation musicale (0,198) est légèrement *inférieur* à celui de $(2,3)$ (0,238), car le produit $\log x \log(n-x)$ y est plus grand qu'en $n^{2/3}$. Après passage aux logarithmes, il ne reste de la musique que la constante 0,38686.

Au passage : $(n-x)^2 - x^3$ est la cubique cuspidale $y^2 = x^3$ (avec $y = n - x$), paramétrée par (t^2, t^3) - octave et quinte en personne ; ses points entiers sont exactement les $n = t^2(1+t)$ du cas d'image nulle. Les virgules $|a \log 2 - b \log 3|$ sont les convergentes de $\log_2 3$; l'équation $(2, 3)$ les transpose en exposants.

5.2. L'idée sioux : mettre l'équation dans le Snurpf

Dans $\mathbb{R}$, toute équation de tailles est aveugle : le taux est la densité locale et tend vers 0. Pour voir la primalité, l'équation doit être évaluée dans le monde fini. D'où :

$$2^x \equiv 2 \pmod{x} \quad \text{et} \quad 2^{n-x} \equiv 2 \pmod{n-x}$$

L'ensemble des solutions contient *exactement* les décomposant de Goldbach, à l'erreur près des pseudopremiers base 2 (les "fausses consonances" de Fermat). Vérifié pour tous les pairs ≤ 1000 : 8220 paires vraies, 276 fausses - toutes portées par les trois pseudopremiers $341, 561, 645$. Le taux ne tend plus vers 0 : c'est l'*erreur* qui tend vers 0 (densité des pseudopremiers $\ll$ densité des premiers). L'analogie musicale est exacte : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ est la consonance parfaite ; le pseudopremier est le comma que l'oreille arithmétique tolère.

Le revers, toujours le même : l'équation de Fermat *détecte* un décomposant de Goldbach qu'on lui donne, elle ne prouve pas qu'il *existe* dans la fenêtre $[3, n/2]$ - information profinie d'un côté, contrainte archimédienne de l'autre. Goldbach reste la jonction des deux mondes ; mais la détection à bas coût (crible de Fermat, c'est ainsi que Goldbach est vérifié très loin) permet de remplacer l'observation "la bascule tombe parfois sur un décomposant de Goldbach" par un énoncé quantifié : $\{\text{Fermat}_n\} \cap [3, n/2] \approx \text{décomposant}_{\text{d}}\text{e}_{\text{G}}\text{oldbach}_n \cap [3, n/2]$, erreur bornée par les pseudopremiers.

Je ne sais pas : raisonnons : on a un nombre pair n et on doit trouver deux premiers p_1 et p_2. On connaît des trucs concernant les premiers entre eux tels que $p\text{RQ}q$ (RQ pour résidu quadratique) par exemple. Il faudrait tester de façon systématique, est-ce qu'un décomposant de Goldbach est par exemple non résid quad de tous les facteurs premiers de n. J'avais testé, je n'avais jamais réussi à trouver quoi que ce soit. pourtant j'aime bien les carrés parce que $4k+1/4k-1$ de Gauss et 4 est un carré et la croix de malte (les sinus et les cosinus qui peuvent servir à la divisibilité) obéit à des symétries du carré. Si au lieu des carrés, on s'intéresse à toutes les puissances : on se dit qu'on veut raisonner d'un coup, pas premier par premier, comme je le fais quand j'étudie les incongruences des restes modulaires. Pour raisonner d'un coup, pareil, on a les premiers qui doivent décomposer n, au nombre de 2, et on a tous les premiers qui sont dans la factorisation de n, on peut peut-être oublier 2 ou au contraire, il faut le garder ? Comment lier les 2 premiers décomposants aux premiers de la factorisation ? Quelles puissances des nombres utiliser ? Non, sincèrement, pas d'idée, si une seule : ça doit forcément être simple !

5.3. Le fil des résidus quadratiques

Question de Denise : un décomposant de Goldbach de n serait-il par exemple non-résidu quadratique des facteurs premiers de n ? Tests antérieurs : rien. Réponse : il existe une *identité* simple qui explique tous les échecs, et qui est la forme cachée de sa croix de Malte

https://denisevellachemla.eu/ordre.png .

L'identité centrale. Pour tout x premier à n :

$$-x(n-x) \equiv x^2 \pmod{n}$$

(preuve : $-x(n-x) = -xn + x^2$). Donc $-p_1p_2$ est un carré modulo toute puissance impaire de la factorisation de n, *pour tout candidat x, premier ou non* - vérifié exhaustivement (5476/5476 candidats, $n \leq 300$). En langage de caractères : pour tout caractère multiplicatif χ modulo une puissance impaire $q^a \parallel n$:

$$\chi(n-x) = \chi(-1)\,\chi(x).$$

Le miroir $x \mapsto n-x$ est, dans le monde multiplicatif, la multiplication par -1. Toute la théorie des puissances (quadratique, cubique, toutes - le dual de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, raisonner d'un coup) est assujettie à cette identité : *aucun test de résiduosité modulo les facteurs de n ne peut distinguer un décomposant de Goldbach.*

Ce qui est vrai (et automatique). Vérifié sur les 8220 paires décomposant de Goldbach des pairs ≤ 1000 :

- $4 \mid n \Rightarrow$ les deux décomposant de Goldbach sont dans des classes de Gauss *opposées* ($4k+1$ et $4k+3$) ; $n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ classes *identiques* (8220/8220). C'est la croix de Malte : l'involution $u \mapsto -u$ du groupe des unités.
- $8 \mid n \Rightarrow (2/p_1) = (2/p_2)$ (2052/2052).
- $n = 98$: les trois décomposant de Goldbach vérifient $(p/7) = -\,(98-p)/7$: $(19/7) = -(79/7)$, $(31/7) = -(67/7)$, $(37/7) = -(61/7)$.

Faut-il garder le facteur 2 ? Oui ; sa part d'harmonie n'existe que si $4 \mid n$ (caractère χ_{-4}), et double si $8 \mid n$ (χ_8 en plus). Pour $n \equiv 2 \pmod 4$ - en particulier $n = 2p$ - le facteur 2 ne fournit *aucun* caractère quadratique : toute l'information est dans le groupe des unités de la partie impaire. Encore une raison pour laquelle les doubles de premiers sont "purs".

Et modulo les premiers $q \nmid n$? Aucun biais possible : le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques (provable, lui !) donne l'équirépartition des premiers entre résidus et non-résidus quadratiques mod q - donc les décompositions de Goldbach se partagent 50/50 de chaque côté, *sans signature.* La résiduosité est invisible dans les décompositions, au premier ordre comme aux ordres suivants (la série singulière $\sigma(n)$ capture déjà toute la correction locale).

Enseignement du fil résidus. La structure simple pressentie existe : les paires de Goldbach sont les orbites de l'involution $u \mapsto -u$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, et la fenêtre $[3, n/2]$ en est un domaine fondamental - le facteur 2 de la demi-fenêtre *est* la symétrie quadratique. Mais le "lien multiplicatif" entre les deux décomposant de Goldbach et la factorisation est l'identité $-p_1p_2 =$ carré, vide par principe ; la primalité des relevés est une information archimédienne (la fenêtre), à laquelle le monde multiplicatif est aveugle. Le mur, sous sa forme la plus nue.

6. Enseignement

1. Le changement de signe de $(n-x)^2 - x^3$ est un phénomène *archimédien* pur : unique bascule en $x^* \sim n^{2/3}$, solution de $n = x + x^{3/2}$, avec $b = a + 2$; il ne sait rien des premiers.

2. Sa rencontre avec un décomposant de Goldbach est un tirage de probabilité $\approx 8C_2\sigma(n)/\log^2 n$, décroissante vers 0 : la concordance est un artefact des petits n, à comparer au bruit de fond quantifié.
3. Les n de bascule exacte $n = c^2(1+c)$ $(36, 150, 392, 810, \dots)$ ont leur antécédent d'image nulle carré, donc composé par principe : jamais un décomposant de Goldbach, structurellement.
4. "Ça rate sur les doubles de premiers" = "$\sigma(n)$ est minimal" : à σ fixé, $2p$ ne se distingue pas des autres pairs (vérifié : 0,19 contre 0,18). C'est la série singulière, déjà mesurée dans
   la note minoproba.pdf (2019)
   qui pilote - et son côté heuristique rencontre toujours la même barrière de parité.
5. L'exigence "un décomposant de Goldbach dans une fenêtre de largeur 2 autour de $n^{2/3}$" est une *conjecture de Goldbach raffinée à point fixe*, strictement plus forte que Goldbach : la fonction seuil rétrécit la fenêtre $[3, n/2]$ jusqu'au point où l'énoncé cesse d'être heuristiquement presque sûr ($q_n \to 0$). Elle ne peut donc rien *démontrer*, mais elle mesure fidèlement la densité locale des décomposants.