

Fonction $\psi(x)$ et $\xi(t)$ de Riemann (Denise Vella-Chemla, 24.12.2018)

On aimerait avoir un aperçu de la fonction $\xi(t)$ définie ainsi à partir de la fonction $\psi(x)$, par Riemann dans son article fondateur concernant le nombre de nombres premiers inférieurs à un certain nombre :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$
$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) \int_{x=1}^{\infty} \psi(x)x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx \quad (1)$$

Pour que les calculs ne soient pas trop longs, on prend 1000 pour valeur la plus grande de n dans le calcul de la fonction $\psi(x)$.

On calcule les valeurs de $\psi(x)$ et $\xi(t)$ pour t de 1 à 10000, le programme et son résultat pouvant être trouvés ici :

- <http://denise.vella.chemla.free.fr/pgm-psixideRiemann.pdf>,
- <http://denise.vella.chemla.free.fr/res-psixideRiemann.pdf>.

Les résultats obtenus sont souvent minuscules. On ne comprend malheureusement pas trop comment les interpréter.

On peut également calculer par programme les valeurs de la fonction $\xi(t)$ en utilisant la définition fournie par Riemann et qui est (si on appelle $s = \frac{1}{2} + it$ un zéro de zêta) :

$$\xi(t) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \quad (2)$$

Le programme et son résultat pour un calcul de $\xi(t)$ pour les entiers de 1 à 10000.

- <http://denise.vella.chemla.free.fr/pgmxientiers.pdf>,
- <http://denise.vella.chemla.free.fr/resxientiers.pdf>.

Le programme et son résultat pour un calcul de $\xi(t)$ pour les parties imaginaires des 1000 premiers zéros.

- <http://denise.vella.chemla.free.fr/pgmxizeroszeta.pdf>,
- <http://denise.vella.chemla.free.fr/resxizeroszeta.pdf>.

On reprend la formule de $\xi(t)$ contenant l'intégrale ci-dessus (formule (1)) en l'appliquant aux parties imaginaires des 1000 premiers zéros de ζ (dans le fichier résultat, les nombres avant les flèches sont les ordinaux des zéros). Ci-dessous le programme et son résultat :

- <http://denise.vella.chemla.free.fr/pgmreessaixizeroszeta.pdf>,
- <http://denise.vella.chemla.free.fr/resreessaixizeroszeta.pdf>.