Conjonctions de mots booléens (Denise Vella-Chemla, 16.1.2019)

On voudrait essayer d'exposer ici ce qui nous bloque.

On a abouti récemment à l'expression informatique suivante pour la conjecture de Goldbach :

On cherche à décomposer un nombre pair n.

Soit un ensemble de chaînes booléennes périodiques s_k de périodes des mots m_k de longueurs impaires l_k [a].

Ces chaînes de booléens sont telles que tout mot période de chaque chaîne contient 1 ou 2 lettres 0.

A démontrer :
La chaîne conjonction ($\wedge$ logique) de toutes ces chaînes contient une lettre 1 au moins à une position inférieure à $\frac{n}{2}$.

a. En fait, les mots en question ont pour longueurs les nombres premiers successifs mais comme les nombres composés ne modifient pas les positions des "trous", on peut simplifier le problème en acceptant toutes les longueurs impaires successives.

La difficulté essentielle nous semble résider dans la nécessité de démontrer qu'une conjonction de booléens de valeur vraie a lieu "avant la moitié de n".

En effet, comme on élimine une ou deux classes de congruences selon tout module premier, le théorème des restes chinois assure qu'on a en tout

$$\prod_{p\ 1^{er},\ p\leqslant\sqrt{n}} (p-2)$$

solutions différentes [1] [2], une pour chaque système de congruences selon les modules p premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ et que ces solutions appartiennent à l'intervalle

$$\prod_{p\ 1^{er},\ p\leqslant\sqrt{n}} p.$$

Mais il faut cependant être assuré qu'une solution au moins appartient bien à l'intervalle $\left[3, \frac{n}{2}\right]$.

Pour envisager comment cela pourrait ne pas être le cas, on considère les entiers jusqu'à n et on programme des calculs de conjonctions de chaînes booléennes qui éliminent deux classes de congruence selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$, on choisit les classes 0 et, arbitrairement, $p-1$ $(mod\ p)$. Si le plus grand écart entre 2 solutions dans ce "pire des cas arbitraire" s'avérait inférieur à $\frac{n}{2}$, on serait assuré de toujours avoir un décomposant de Goldbach dans l'intervalle $\left[3, \frac{n}{2}\right]$. Ce programme "pire des cas", en faisant occuper un maximum de place aux "trous" (nombres que le crible doit éliminer) est tel que la première solution trouvée est l'écart maximum recherché.

Le tableau suivant fournit, pour différentes valeurs de n quel est le plus petit premier qui n'est jamais

1. $\prod$ désigne le produit ici, et ne doit pas être confondu avec $\pi(n)$ utilisé pour dénoter le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
2. Le fait d'éliminer une seule classe de congruence selon un certain module a pour effet de remplacer $p-2$ par $p-1$ dans le produit à effectuer, cela augmente le nombre de solutions ; l'élimination des nombres appartenant à une ou deux classes de congruences est fonction des restes de n selon les différents modules inférieurs à $\sqrt{n}$. On élimine les nombres d'une seule classe de congruence lorsque le module divise n et 2 classes lorsque le module ne divise pas n. Se reporter à denise.vella.chemla.free.fr/doublescomposes.pdf.

congru à $p-1$ $(mod\ p)$ selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$.

n	*plus petit premier* $> n$ *et jamais congru* à $p-1$ $(mod\ p)$
de 26 à 48	7
de 50 à 960	31
de 962 à 1368	73
de 1370 à 10000	127

Voici un graphique montrant par colonnes vides jusqu'à la plus haute diagonale ce qu'on entend par éliminer deux classes de congruences selon chaque module impair (la classe 0 et la classe $p-1$ $(mod\ p)$). On a choisi $n = 100$, on repère 31, le plus petit nombre premier non congru à 2 $(mod\ 3)$, non congru à 4 $(mod\ 5)$ et non congru à 6 $(mod\ 7)$, les trois modules inférieurs à $\sqrt{100}$.