Annales scientifiques de l'É.N.S.

E. Cahen

Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 11 (1894), p. 75-164

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__75_0>

SUR LA

FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN

ET SUR DES

FONCTIONS ANALOGUES,

PAR M. E. CAHEN.

INTRODUCTION.

L'origine de ce travail est dans le célèbre Mémoire de Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.*

Dans ce Mémoire, Riemann considère la fonction uniforme $\zeta(s)$, qui, pour les valeurs de s dont la partie réelle est plus grande que 1, est représentée par la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Il démontre la formule

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s).$$

A ce propos, on doit remarquer que cette formule, ou plutôt une équivalente, avait déjà été donnée par Schlömilch (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1858); et une du même genre, portant sur la fonction

$$\chi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

déjà en 1849, par le même auteur (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*).

Même Euler, en 1761 (*Comptes rendus de l'Académie de Saint-Péters-*

bourg : Remarque sur un beau rapport entre les séries des puissances, tant directes que réciproques) avait donné cette relation, sans d'ailleurs en donner une démonstration, ni même préciser les valeurs des sommes qu'il considère.

Ces deux séries $\zeta(s)$ et $\chi(s)$ sont des séries de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$. Ces séries sont remarquables par leurs propriétés arithmétiques : identité d'Euler

$$\sum \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}};$$

Mémoire de Riemann déjà cité; travaux de Lejeune-Dirichlet sur la progression arithmétique, et sur les formes quadratiques binaires.

Pour les séries employées par Lejeune-Dirichlet dans cette dernière question, on doit encore remarquer une formule de M. Hurwitz dont les précédentes sont des cas particuliers $\Big[$*Einige Eingeschaften der Dirichlet'schen Functionen* $\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$ (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII; 1882)$\Big]$.

Ces séries $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ sont dans un étroit rapport avec des séries de la forme $\sum \alpha_n e^{-ns}$, et ces deux formes de séries sont des cas particuliers de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, les λ_n croissant indéfiniment avec n. Sur ces dernières, il y a une petite Note de M. Kronecker (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1880).

Ce sont ces séries $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ que nous étudions dans le Chapitre I de ce travail. Nous démontrons l'existence d'une droite de convergence, dont nous déterminons l'abscisse au moyen des coefficients de la série, généralisant ainsi un certain nombre de résultats connus pour les séries $\sum \alpha_n e^{-ns}$.

Étudiant ensuite la fonction représentée par la série, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(s)$ soit développable en série de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$. Nous énonçons un théorème relatif à la multiplication de ces séries. Enfin nous appliquons ces résultats aux séries de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, et nous donnons quelques applications arithmétiques immédiates de ces séries.

Dans le Chapitre II, nous rappelons les résultats obtenus par Riemann relativement à la fonction $\zeta(s)$. Nous y ajoutons quelques applications arithmétiques dont deux ont déjà été données par nous dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 16 janvier et du 6 mars 1893.

Étant conduit à étudier la fonction $\chi(s)$ dont il a été parlé plus haut, nous montrons qu'on peut en faire une théorie complètement analogue à celle de $\zeta(s)$.

Enfin, dans le Chapitre III, nous abordons une nouvelle généralisation. $\zeta(s)$ et $\chi(s)$ ne sont que des cas particuliers de séries $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ dans lesquelles les coefficients α_n se reproduisent périodiquement de p en p.

Après les préliminaires indispensables, nous nous bornons au cas de p premier. Il y a $p-1$ séries indépendantes de la forme indiquée. Or nous montrons qu'on peut choisir justement $p-1$ séries jouissant d'une relation fonctionnelle analogue à celles de $\zeta(s)$ et $\chi(s)$. En particulier, on obtient les séries $\sum \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{n^s}$, $\left(\frac{n}{p}\right)$ étant le caractère quadratique de n par rapport à p.

Étudiant les zéros de ces fonctions, nous sommes amené à des fonctions holomorphes analogues à celle qui se rapporte à $\zeta(s)$ et que Riemann appelle $\xi(t)$. Nous employons pour cela une méthode générale qui, d'une relation fonctionnelle relative à une série de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, permet d'en déduire une relative à une série de la forme $\sum \alpha_n e^{-nx}$.

Nous terminons ce dernier Chapitre par quelques applications de cette méthode générale à d'autres fonctions.

Cette relation relative à la série $\sum \alpha_n e^{-nx}$, jointe à la relation

$$\sum \alpha_n e^{-n(x+2i\pi)} = \sum \alpha_n e^{-nx},$$

permet d'en trouver une infinité d'autres. D'ailleurs ces fonctions sont de celles qu'on rencontre dans la Théorie des fonctions modulaires.

CHAPITRE I.

1. Nous ferons d'abord quelques remarques relatives aux séries de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, dans lesquelles les α_n sont des constantes quelconques, les λ_n des constantes *réelles, positives* et *croissant indéfiniment*, de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ et que λ_n tende vers $+\infty$; enfin s est une variable. Cette forme de séries a une assez grande généralité.

Si l'on suppose que les λ_n soient les nombres entiers consécutifs, la série devient $\sum \alpha_n e^{-ns}$, c'est-à-dire une série ordonnée suivant les puissances de e^{-s}.

Si l'on suppose que les λ_n soient les logarithmes des nombres entiers consécutifs, la série devient $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$; les séries de cette forme sont remarquables par leurs applications arithmétiques.

Remarquons que, par la transformation $e^{-s} = x$, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ devient $\sum \alpha_n x^{\lambda_n}$.

Relativement à la convergence de ces séries, dans le cas simple où $\lambda_n = n$, l'existence d'un cercle de convergence pour la série $\sum \alpha_n x^n$, donne immédiatement celle d'une droite de convergence, parallèle à Oy pour la série $\sum \alpha_n e^{n-s}$. La série est convergente pour les points du plan situés à droite de cette droite. Elle est divergente pour les points situés à gauche. Or ce premier résultat se généralise pour les séries de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$.

Nous ferons dépendre ce résultat d'un théorème, d'ailleurs bien connu, que nous énoncerons sous la forme suivante :

2. Théorème. — *Soient deux suites indéfinies de quantités*

$$a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$
$$b_1 b_2 \ldots b_n \ldots.$$

Supposons que :

1° *Le module de* $A_n = a_1 + a_2 + \ldots - a_n$ *reste fini quand* n *augmente indéfiniment ;*

2° *La série* B *formée par les modules des quantités* $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$, ..., $b_{n-1} - b_n$, ... *est convergente ;*

3° b_n *tend vers zéro.*

Dans ces conditions, la série

$$P = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$$

est convergente.

Supposons de plus b_1, b_2, ..., b_n, ... *fonctions d'une variable* s, a_1, a_2, ..., a_n *étant des constantes.*

Si b_n *tend uniformément vers zéro, et si la série* B *est uniformément convergente, la série* P *est aussi uniformément convergente.*

En effet, considérons la série

$$Q = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \ldots + A_n(b_n - b_{n+1}) + \ldots,$$

et désignons par P_n, B_n, Q_n respectivement les sommes des n premiers termes des séries P, B, Q. Soit d'ailleurs H une limite supérieure du module de A_n. On a

$$P_{n+p} - P_n = Q_{n+p} - Q_{n-1} + A_{n+p} b_{n+p+1} - A_n b_n.$$

D'ailleurs

$$|Q_{n+p} - Q_{n-1}| < H(B_{n+p} - B_{n-1}) \quad (^1).$$

---

(1) $|\alpha|$ désigne le module de α.

Donc

$$|P_{n+p} - P_n| < H(B_{n+p} - B_{n-1}) + H|b_{n+p+1}| + H|b_n|.$$

Or, d'après les hypothèses faites, on peut prendre n assez grand pour que, quel que soit p et quel que soit s,

$$B_{n+p} - B_{n-1} < \frac{\varepsilon}{3H},$$

$$|b_{n+p+1}| < \frac{\varepsilon}{3H},$$

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3H}.$$

Alors

$$|P_{n+p} - P_n| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Dans les conditions de l'énoncé, la série P est une fonction continue et intégrable de s.

Supposons de plus que les dérivées $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots$ des fonctions $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ de s satisfassent aux mêmes conditions qu'elles, à savoir :

1° La série B' formée par les modules de $b'_1 - b'_2$, $b'_1 - b'_3$, ..., $b'_{n-1} - b'_n$, ... est uniformément convergente;

2° b'_n tend uniformément vers zéro.

Alors la série

$$P' = a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots$$

est uniformément convergente.

Cela suffit pour établir que cette série est la dérivée de P, et les mêmes considérations s'appliquent aux dérivées successives.

3. *Remarque sur la continuité de la série dans un cas particulier.* — Supposons que la série $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ soit convergente et ait pour somme A. Supposons $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ fonctions de s, et que pour $s = s_0$, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ soient égaux à 1. On peut se demander si, s tendant vers s_0, la somme $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$, supposée convergente, tend vers A. Cela ne résulte pas du théorème précédent sur la continuité de la série, car, pour $s = s_0$, b_n ne tend pas vers zéro, et d'ailleurs cela n'est pas toujours vrai.

Posons

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= a_1 + a_2 + \ldots,\\
\mathrm{R}_1 &= a_2 + a_3 + \ldots,\\
\mathrm{R}_2 &= a_3 + a_4 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{R}_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots.
\end{aligned}$$

Alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum a_n b_n - \mathrm{A} &= \sum a_n(b_n - 1)\\
&= (\mathrm{A} - \mathrm{R}_1)(b_1 - 1) + (\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2)(b_2 - 1) + \ldots\\
&\quad + (\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n)(b_n - 1) + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Il faut voir si la somme de cette série tend vers zéro lorsque s tend vers s_0. Considérons la série

$$(2)\qquad \mathrm{A}(b_1 - 1) + \mathrm{R}_1(b_2 - b_1) + \ldots + \mathrm{R}_{n-1}(b_n - b_{n-1}) + \ldots.$$

La somme des n premiers termes de la série (2) ne diffère de la somme des n premiers termes de la série (1) que de $-\mathrm{R}_n(b_n - 1)$, qui tend vers zéro, quel que soit s. La série (2) a donc même somme que la série (1), et il n'y a qu'à examiner cette série (2).

Dans cette série, la somme des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ est

$$\mathrm{R}_n(b_{n+1} - b_n) + \mathrm{R}_{n+1}(b_{n+2} - b_{n+1}) + \ldots,$$

et l'on peut prendre n assez grand pour que le module de cette somme soit plus petit que

$$\varepsilon[\,|b_{n+1} - b_n| + |b_{n+2} - b_{n+1}| + \ldots],$$

quel que soit ε.

Or, supposons que, s tendant vers s_0, la somme

$$|b_{n+1} - b_n| + |b_{n+2} - b_{n+1}| + \ldots$$

reste plus petite qu'un certain nombre k, pour toutes les valeurs de n supérieures à un certain nombre r. Alors la quantité précédente est plus petite que εk.

Ayant ainsi choisi n, on peut prendre s assez voisin de s_0 pour que le module de la somme des autres termes de la série (2)

$$A(b_1 - b_1) + R_1(b_2 - b_1) + \ldots + R_{n-1}(b_n - b_{n-1})$$

soit plus petit que εk, car $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tendent vers 1.

Alors le module de la somme de la série (2) est plus petit que $2\varepsilon k$, c'est-à-dire qu'un nombre quelconque donné à l'avance. Donc ce module tend vers zéro. Donc $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$ tend vers $a_1 + a_2 + \ldots$.

Remarque. — Mais si l'on suppose que la série $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ soit *absolument* convergente, cette condition n'est pas nécessaire. En effet, dans ce cas,

$$\sum a_n b_n - \sum a_n = \sum a_n(b_n - 1) = \sum_1^{n-1} a_n(b_n - 1) + \sum_n^{\infty} a_n(b_n - 1).$$

Or

$$\left| \sum_n^{\infty} a_n(b_n - 1) \right| < \sum_n^{\infty} |a_n(b_n - 1)| < \alpha \sum_n^{\infty} |a_n|,$$

en appelant α le plus grand des $|b_n - 1|$. On peut choisir n assez grand pour que

$$\sum_n^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Alors cette partie de la série est $< \varepsilon$. Ayant ainsi choisi n, on pourra supposer $b_1, b_2, \ldots, b_n$ assez voisins de 1 pour que

$$\left| \sum_1^{n-1} a_n(b_n - 1) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Etc.

4. *Application aux séries* $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$. — Nous allons trouver la droite de convergence relative à ces séries au moyen du théorème suivant :

Théorème. — *Si pour $s = s_0$ la somme des n premiers termes de la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ reste finie, la série est convergente pour toute valeur de s dont la partie réelle $\mathcal{R}(s)$ (1) est plus grande que celle de s_0.*

(1) Nous désignerons la partie réelle d'un nombre s par $\mathcal{R}(s)$.

De plus, la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle $\mathcal{R}(s)$ est plus grande que $\mathcal{R}(s_0)+\varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, et dont la partie imaginaire est plus petite en valeur absolue qu'un nombre quelconque T.

En effet, supposons que les quantités a du théorème précédent soient

$$\alpha_1 e^{-\lambda_1 s_0},\quad \alpha_2 e^{-\lambda_2 s_0},\quad \ldots,\quad \alpha_n e^{-\lambda_n s_0},\quad \ldots,$$

et les quantités b

$$e^{-\lambda_1(s-s_0)},\quad e^{-\lambda_2(s-s_0)},\quad \ldots,\quad e^{-\lambda_n(s-s_0)},\quad \ldots.$$

Comme ces quantités satisfont évidemment, d'après les hypothèses, à la première et à la troisième des conditions imposées par le théorème, il ne reste plus qu'à démontrer qu'elles satisfont à la deuxième, c'est-à-dire que la série

$$\sum |\, e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)}$$

est uniformément convergente.

Or on a

$$s - s_0 = a \pm bi,$$

a étant positif et b aussi, et l'on trouve facilement

$$|\, e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)} \,| = \sqrt{(e^{-\lambda_{n-1}a} - e^{-\lambda_n a})^2 + 4\sin^2 \frac{b(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{2} e^{-a(\lambda_n+\lambda_{n-1})}},$$

et, par conséquent,

$$|\, e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)} \,| < e^{-\lambda_{n-1}a} - e^{-\lambda_n a} + b(\lambda_n - \lambda_{n-1})\, e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)}.$$

Or la série

$$\sum (e^{-\lambda_{n-1}a} - e^{-\lambda_n a})$$

a pour somme

$$e^{-\lambda_1 a}.$$

Quant à la série

$$b \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1})\, e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)},$$

on a

$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)} < \lambda_{n-1} e^{-a\lambda_{n-1}} - \lambda_n e^{-a\lambda_n},$$

pourvu que $\lambda_{n-1} > \frac{2}{a}$ (¹).

Donc, si l'on appelle r le plus petit nombre tel que $\lambda_{r-1} > \frac{2}{a}$, on aura

$$\sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)} < \sum_2^{r-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\lambda_{n-1}} + \sum_r^{\infty} (\lambda_{n-1} e^{-a\lambda_{n-1}} - \lambda_n e^{-a\lambda_n}),$$

c'est-à-dire

$$\sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)} < \sum_2^{r-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\lambda_{n-1}} + \lambda_{r-1} e^{-a\lambda_{r-1}}.$$

Finalement, la série

$$\sum | e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)} |$$

est absolument convergente et sa somme est plus petite que

$$e^{-\lambda_1 a} + b \sum_2^{r-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\lambda_{n-1}} + b\lambda_{r-1} e^{-a\lambda_{r-1}},$$

c'est-à-dire que

$$e^{-\lambda_1 a} + \mathrm{T} \sum_2^{r-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-a\lambda_{n-1}} + \mathrm{T}\lambda_{r-1} e^{-a\lambda_{r-1}}.$$

Donc le théorème est démontré.

Corollaire I. — *Si la série est convergente pour une valeur s_0 de s, elle est convergente pour toute valeur de s dont la partie réelle est plus grande que celle de s_0.*

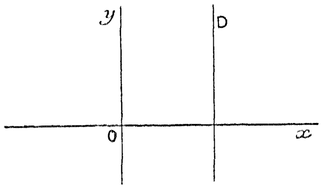
(¹) Par un développement en série, cette inégalité revient à

$$\left(\lambda_{n-1} - \frac{2}{a}\right)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})^n}{1.2\ldots n} \left(\lambda_{n-1} - \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{1}{a}\right) > 0.$$

COROLLAIRE II. — *Si la série est divergente pour une valeur s_0 de s, elle est divergente pour toute valeur de s dont la partie réelle est plus petite que celle de s_0.*

5. *Droite de convergence.* — Partant de là, on établira facilement l'existence d'une droite de convergence D parallèle à Oy (*fig.* 1),

Fig. 1.



c'est-à-dire telle que, pour toute valeur de s située à droite de cette droite, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ est convergente, et que pour toute valeur de s située à gauche la série est divergente. Pour les valeurs de s situées sur la droite D, il y a doute. La série peut y être convergente ou divergente, ou convergente en certains points et divergente en d'autres.

6. *Dérivées de la série.* — Dans la portion du plan où elle est convergente, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ représente une fonction continue de s. Il est facile de démontrer que, dans cette même portion du plan, la série $\sum -\lambda_n \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ est aussi convergente et représente la dérivée de la précédente. Car, si l'on considère une valeur s_0 située à droite de la droite de convergence, mais telle que $\mathcal{R}(s_0) < \mathcal{R}(s)$; puis les quantités a, égales à $\alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$, et les quantités b égales à $\lambda_n e^{-\lambda_n (s-s_0)}$, il suffira, d'après le théorème II, de démontrer que la série

$$\sum \operatorname{mod}(\lambda_n e^{-\lambda_n (s-s_0)} - \lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)})$$

est convergente, ce qui est facile par une méthode analogue à la précédente.

En effet,

$$|\lambda_n e^{-\lambda_n (s-s_0)} - \lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)}|$$
$$= \sqrt{(\lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1} a} - \lambda_n e^{-\lambda_n a})^2 + 4\lambda_n \lambda_{n-1} \sin^2\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{2} b\right) e^{-(\lambda_n + \lambda_{n-1}) a}}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
&|\lambda_n e^{-\lambda_n(s-s_0)} - \lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)}| \\
&\quad < \lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}a} - \lambda_n e^{-\lambda_n a} + b(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n \lambda_{n-1})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}a} \\
&\quad < \lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}a} - \lambda_n e^{-\lambda_n a} + b(\lambda_n - \lambda_{n-1})\lambda_n e^{-\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}a}.
\end{aligned}$$

Or la série

$$\sum (\lambda_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}a} - \lambda_n e^{-\lambda_n a})$$

a pour somme

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 a}.$$

Quant à la série

$$b \sum (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \lambda_n e^{-a\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n-1}}{2}\right)},$$

on a

$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \lambda_n e^{-\frac{a(\lambda_n+\lambda_{n-1})}{2}} < \lambda_{n-1}^2 e^{-a\lambda_{n-1}} - \lambda_n^2 e^{-a\lambda_n},$$

pourvu que $\lambda_{n-1} > \frac{3}{a}$.

Donc, si l'on appelle r le plus petit nombre tel que $\lambda_{r-1} > \frac{3}{a}$, on achèvera le raisonnement comme au n° 4.

Ensuite, on verrait de même que les séries $\sum(-\lambda_n)^2 \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, ..., $\sum(-\lambda_n)^p \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ sont respectivement les dérivées secondes, ..., $p^{\text{ièmes}}$ de la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$.

7. *Remarque sur la continuité de la série dans le voisinage de la droite de convergence.* — Soit s_0 un point de la droite de convergence. Supposons que $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$ soit une série convergente et voyons si, s tendant vers s_0, $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ tend vers $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$. D'après la remarque (n° 3), il suffit pour cela que $\sum_n^\infty |e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)}|$ reste plus petit qu'un certain nombre k pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite.

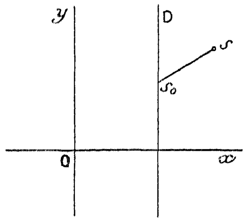
Or nous avons vu (n° 4) que, en posant $s - s_0 = a \pm bi$,

$$\sum_n^\infty |e^{-\lambda_n(s-s_0)} - e^{-\lambda_{n-1}(s-s_0)}| < \sum_n^\infty (e^{-\lambda_{n-1}a} - c^{-\lambda_n a}) + b \sum_n^\infty (\lambda_{n-1} e^{-a\lambda_{n-1}} - \lambda_n e^{-a\lambda_n})$$
$$< e^{-\lambda_{n-1}a} + b\lambda_{n-1} e^{-a\lambda_{n-1}}$$

(en supposant $n > r$). Il est facile de voir que cette quantité est plus petite que $1 + \frac{b}{a}$.

Donc $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ tend vers $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$, à condition que $\frac{b}{a}$ ne tende pas vers ∞, c'est-à-dire à condition que la courbe suivie par s pour aboutir en s_0 ne soit pas tangente à D (*fig.* 2).

Fig. 2



Mais si la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$ est *absolument* convergente, la condition précédente n'est pas nécessaire, $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ tend vers $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s_0}$, quelle que soit la courbe suivie par s pour aboutir en s_0, d'après la remarque de la fin du n° 3.

Ces théorèmes sont, comme on le voit, des généralisations de théorèmes bien connus sur la série de Taylor.

8. *Détermination de la droite de convergence.* — Cherchons aussi, par analogie avec ce qui a été fait sur la série de Taylor, à déterminer la droite de convergence. On sait que, si l'on considère la série $\sum \alpha_n e^{-ns}$, l'abscisse de la droite de convergence est $\log l$, en appelant l la limite supérieure pour n infini (1) de $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$. (*Voir* Hadamard,

(1) On appelle *limite supérieure pour n infini* de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un nombre L, tel que, à partir d'une certaine valeur de n, tous les a_n soient plus petits que $L + \varepsilon$, mais tel aussi que, à partir d'une certaine valeur de n, il y ait une infinité d'a_n plus grands que $L - \varepsilon$, quelque petit que soit ε.

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor (*J. de Liouville*, 4e série, t. VIII; 1892). De plus, lorsque la série est convergente, elle l'est absolument (excepté peut-être pour les points de la droite de convergence).

Ce résultat se généralise facilement pour les séries $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, pourvu que les nombres λ_n soient comparables en grandeur à une certaine puissance positive de n, c'est-à-dire, pour préciser, pourvu qu'il existe un nombre positif α tel que $\frac{n^\alpha}{\lambda_n}$ ne croisse pas indéfiniment avec n. Je dis que, dans ce cas, l'abscisse de la droite de convergence est $\log l$, en désignant par l la limite supérieure pour n infini de $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, et que dans la région du plan où la série est convergente, elle l'est absolument. En effet, la démonstration de ce théorème, donnée pour la série $\sum \alpha_n e^{-ns}$, s'appuie uniquement sur ce fait que la série $\sum \mu^n$, où μ représente un nombre réel positif, plus petit que 1, est absolument convergente. Or il est facile de voir qu'il en est de même de la série $\sum \mu^{\lambda_n}$, car puisque $\frac{n^\alpha}{\lambda_n} < \mathrm{L}$, L étant un certain nombre,

$$\lambda_n > \frac{n^\alpha}{\mathrm{L}}, \qquad \text{d'où} \qquad \mu^{\lambda_n} < \mu^{\frac{n^\alpha}{\mathrm{L}}}.$$

Or, $\sum \mu^{\frac{n^\alpha}{\mathrm{L}}}$ est convergente, puisque

$$\int_0^\infty \mu^{\frac{x^\alpha}{\mathrm{L}}}\, dx$$

a un sens.

A ce propos, on établira facilement la remarque suivante :

Si $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}$ *et* $\sqrt[\lambda_n]{|\alpha_n|}$ *ont des limites pour* $n = \infty$, *ces limites sont les mêmes*, généralisation du théorème bien connu sur les limites de $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$ et $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, pourvu que les λ_n satisfassent à la condition énoncée plus haut.

9. Mais supposons maintenant que $\frac{n^\alpha}{\lambda_n}$ croisse indéfiniment, quel

que soit le nombre positif α; c'est ce qui arrive justement dans le cas important de $\lambda_n = \log n$. Alors la convergence de la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ ne dépend pas seulement des modules des quantités α_n, mais aussi de leurs arguments; et, de plus, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ peut être convergente sans l'être absolument.

Voici alors comment la position de la droite de convergence dépend des coefficients. Supposons que la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ ne soit pas convergente dans tout le plan, autrement dit qu'il y ait une droite de convergence. Nous pouvons supposer que, par un changement de variable de la forme $s = s_0 + s'$, on ait fait que cette droite de convergence ne soit pas à gauche de Oy. Ceci posé, on a le théorème suivant :

Théorème. — *L'abscisse de la droite de convergence est égale à la limite supérieure pour n infini de*

$$\frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\lambda_n}.$$

En effet, soit l cette limite, et soit a l'abscisse de la droite de convergence. Considérons une valeur réelle $s > a$, et par suite $s > 0$, de sorte que $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ soit convergente. Posons

$$\sum_1^n \alpha_n e^{-\lambda_n s} = S_n,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\alpha_n = (S_n - S_{n-1}) e^{\lambda_n s},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\sum_1^n \alpha_n &= S_1 e^{\lambda_1 s} + (S_2 - S_1) e^{\lambda_2 s} + \ldots + (S_n - S_{n-1}) e^{\lambda_n s}\\ &= S_n e^{\lambda_n s} - S_1 (e^{\lambda_2 s} - e^{\lambda_1 s}) - S_2 (e^{\lambda_3 s} - e^{\lambda_2 s}) - \ldots - S_{n-1}(e^{\lambda_n s} - e^{\lambda_{n-1} s}).\end{aligned}$$

Soit S un nombre plus grand que $|S_1|$, $|S_2|$, ..., $|S_n|$, ... (Par hypothèse $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ est convergente.) Alors

$$\left|\sum_1^n \alpha_n\right| < \mathrm{S}\, e^{\lambda_n s} + \mathrm{S}[-e^{\lambda_1 s} + e^{\lambda_2 s} - e^{\lambda_2 s} + e^{\lambda_3 s} \ldots - e^{\lambda_{n-1} s} + e^{\lambda_n s}] < \mathrm{S}(2 e^{\lambda_n s} - e^{\lambda_1 s})$$

ou

$$\left|\sum_1^n \alpha_n\right| < 2\,\mathrm{S}\, e^{\lambda_n s},$$

d'où

$$\frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\lambda_n} < \frac{\log 2\,\mathrm{S}}{\lambda_n} + s.$$

Cette égalité montre que $l \leqq s$, et, comme ceci est vrai pour toute valeur de s plus grande que a, on a aussi

$$l \leqq a.$$

D'autre part, je dis que la série est convergente pour toute valeur de s plus grande que l.

En effet, on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\lambda_n} < l + \varepsilon,$$

quel que soit ε, d'où

$$\left|\sum_1^n \alpha_n\right| = \mathrm{A}_n\, e^{\lambda_n (l+\varepsilon)} \qquad (\mathrm{A}_n < 1),$$

$$\sum_1^n \alpha_n = \mathrm{A}_n\, e^{i\theta_n}\, e^{\lambda_n (l+\varepsilon)},$$

$$\alpha_n = \mathrm{A}_n\, e^{i\theta_n}\, e^{\lambda_n (l+\varepsilon)} - \mathrm{A}_{n-1}\, e^{i\theta_{n-1}}\, e^{\lambda_{n-1}(l+\varepsilon)},$$

$$(3) \qquad \sum \alpha_n e^{-\lambda_n s} = \sum (\mathrm{A}_n\, e^{i\theta_n}\, e^{\lambda_n (l+\varepsilon)} - \mathrm{A}_{n-1}\, e^{i\theta_{n-1}}\, e^{\lambda_{n-1}(l+\varepsilon)})\, e^{-\lambda_n s}.$$

Considérons

$$\sum A_n e^{i\theta_n} e^{\lambda_n(l+\varepsilon)} (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}). \tag{4}$$

La somme des n premiers termes de la série (4) ne diffère de celle des $n-1$ premiers termes de la série (3) que de

$$A_n e^{i\theta_n} e^{\lambda_n(l+\varepsilon)} e^{-\lambda_n s},$$

qui, pour $s > l + \varepsilon$, tend vers zéro.

Donc il suffit de démontrer que

$$\sum A_n e^{i\theta_n} e^{\lambda_n(l+\varepsilon)} (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s})$$

ou, plus simplement,

$$\sum e^{\lambda_n(l+\varepsilon)} (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s})$$

est convergente pour $s > l + \varepsilon$.

Or cette série est égale à

$$\sum (e^{-\lambda_n(s-l-\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1}(s-l-\varepsilon)}) + \sum e^{-\lambda_{n+1}(s-l-\varepsilon)} (1 - e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(l+\varepsilon)});$$

la première partie de cette somme est convergente.

La seconde est plus petite que

$$(l+\varepsilon) \sum (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{-\lambda_{n+1}(s-l-\varepsilon)},$$

c'est-à-dire plus petite que

$$(l+\varepsilon)(\lambda_n e^{-(s-l-\varepsilon)\lambda_n} - \lambda_{n+1} e^{-(s-l-\varepsilon)\lambda_{n+1}}),$$

pourvu que $\lambda_n > \dfrac{2}{s-l-\varepsilon}$.

Donc elle est convergente aussi.

Puisque pour $s > l$ la série est convergente, c'est qu'on a

$$l + \varepsilon > a$$

quelque petit que soit ε; d'où

$$l \geqq a;$$

mais on a démontré que

$$l \leqq a.$$

Donc $l = a$.

10. Voici encore un théorème sur les séries $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$.

Théorème. — *Soit* $r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$. *Je dis que, si une série* $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ *est convergente pour une valeur* a *de* s, *elle est absolument convergente pour les valeurs de* s *dont la partie réelle est plus grande que celle de* $a + r$.

Car soit une telle valeur $a + r + t$. Soit

$$\sum_{1}^{n} \alpha_n e^{-\lambda_n a} = S_n.$$

On a donc

$$\alpha_n = (S_n - S_{n-1}) e^{\lambda_n a}$$

et, par suite,

$$\sum \alpha_n e^{-\lambda_n (a+r+t)} = \sum (S_n - S_{n-1}) e^{-\lambda_n (r+t)}. \tag{6}$$

Or $|S_n - S_{n-1}|$ reste plus petit qu'un nombre fixe A. Donc la somme des modules des n premiers termes de la série (6) est plus petite que

$$A \sum e^{-\lambda_n (r+t)},$$

laquelle est convergente, car, puisque $\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = r$, l'abscisse de la droite de convergence de la série $\sum e^{-\lambda_n s}$ est r.

Exemple. — Si une série de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ est convergente pour $s = a$, elle est absolument convergente pour les valeurs de s telles que $\Re(s) > a + 1$, parce que

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\log n} = 1.$$

Une série de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{(\log n)^s}$ peut être convergente, et ne l'être absolument pour aucune valeur de s, telle la série $\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^s}$, parce que

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\log \log n} = \infty.$$

Le théorème du n° 8, à savoir que, si les nombres λ_n sont comparables en grandeur à une certaine puissance de n, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ est absolument convergente pour les valeurs de s situées à droite de la droite de convergence, est un cas particulier du précédent, puisqu'alors lim sup. $\frac{\log n}{\lambda_n}$ est nulle.

11. *Fonction représentée par la série* $\sum_1^\infty \alpha_n e^{-\lambda_n s}$. — Dans la portion du plan où elle est convergente, cette série représente une fonction holomorphe de la variable. Mais la réciproque n'est pas vraie. On peut chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit représentable dans une portion du plan par une série de cette forme. De plus, on peut chercher à déterminer les coefficients.

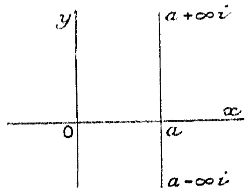
Voici une forme de conditions nécessaires énoncées par Kronecker (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1880), et d'ailleurs la suite du raisonnement de l'auteur peut servir à démontrer que ces conditions sont suffisantes.

Soit $f(s) = \sum_1^\infty \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ pour $\mathcal{R}(s) > l$.

Soit $a > l$.

On sait que $\frac{1}{2i\pi}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \frac{e^s}{s} ds$ est égal à 1 ou à 0, suivant que b est positif ou négatif.

Fig. 3.



Donc si nous considérons $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} f(s)\frac{e^{ws}}{s} ds$, puisque, pour $\mathcal{R}(s) = a$,

$$f(s) = \sum_1^\infty \alpha_n e^{-\lambda_n s},$$

et que la série est uniformément convergente, il en résulte qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} f(s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds = \frac{1}{2i\pi}\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds = \sum_{1}^{k}\alpha_k,$$

en supposant w compris entre λ_k et λ_{k+1}.

Cette égalité

$$\Phi(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} f(s)\,e^{ws}\frac{ds}{s} = \sum_{1}^{k}\alpha_k$$

détermine les λ_n qui sont les valeurs de w pour lesquelles $\Phi(w)$ est discontinue. Elle détermine aussi les α_n.

Donc, des conditions nécessaires pour que $f(s)$ soit développable en série $\sum_{1}^{\infty}\alpha_n e^{-\lambda_n s}$ pour $\mathcal{R}(s)$ plus grand qu'un certain nombre d sont que la fonction de la variable positive w

$$\Phi(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{f(s)\,e^{ws}}{s}\,ds,$$

dans laquelle a est un nombre quelconque $>d$, soit indépendante de a et soit constante pour w, compris dans les intervalles $0-\lambda_1$, $\lambda_1-\lambda_2$, $\lambda_2-\lambda_3$, ...

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, la fonction est développable en série de la forme indiquée.

Soit ζ une valeur de s telle que $\mathcal{R}(\zeta) > d$, et prenons $a < \mathcal{R}(\zeta)$.

Posons

$$(7)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} f(s)\,e^{ws}\frac{ds}{s} = \sum_{1}^{k}\alpha_n \qquad \text{pour}\quad \lambda_k < w < \lambda_{k+1}.$$

On a

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\zeta e^{-w\zeta}\,dw = -e^{-\lambda_{n+1}\zeta} + e^{-\lambda_n\zeta}.$$

Donc on déduit de (7)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}dw\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\zeta}{s}f(s)\,e^{w(s-\zeta)}\,ds = -(e^{-\lambda_{n+1}\zeta} - e^{-\lambda_n\zeta})\sum_{1}^{n}\alpha_n,$$

et, en sommant les deux membres de $n=1$ à $n=\infty$,

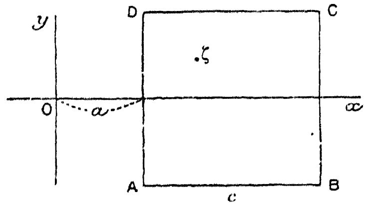
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty} dw \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\zeta}{s} f(s)\, e^{w(s-\zeta)}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e^{-\lambda_n \zeta}$$

ou

$$-\frac{\zeta e^{-\lambda_1\zeta}}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)\, e^{\lambda_1 s}}{s(s-\zeta)}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e^{-\lambda_n \zeta}.$$

Or intégrons $\frac{f(s)\,e^{\lambda_1 s}}{s(s-\zeta)}ds$ le long du contour d'un carré ABCD de côté c, dans lequel l'abscisse de AD est a, et celle de BC est $+\infty$. Puisque $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{f(s)^{ws}\,ds}{s}$ a un sens pour $a>d$ et $w>0$, c'est que $\frac{f(s)\,e^{\lambda_1 s}}{s}$ a pour $s=a+\infty i$ un module infiniment petit par rapport à celui de $\frac{1}{s}\cdot$ Donc dans l'intégrale $\int_{\text{DC ou AB}}\frac{f(s)\,e^{\lambda_1 s}}{s(s-\zeta)}ds$, l'élément d'intégration décroît au moins comme $\frac{1}{c^2}$ quand c croît indéfiniment, tandis que la longueur du chemin d'intégration est égale à c. Donc cette intégrale est nulle pour c infini.

Fig. 4.



De même, puisque $\int_{\text{CB}}\frac{f(s)\,e^{\lambda_1 s}}{s}ds$ est fini, $\int_{\text{CB}}\frac{f(s)\,e^{\lambda_1 s}}{s(s-\zeta)}ds$ est nulle pour c infini. On a donc

$$-\frac{\zeta e^{-\lambda_1\zeta}}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)\, e^{\lambda_1 s}}{s(s-\zeta)}\, ds = \zeta\, e^{-\lambda_1\zeta}\mathrm{R},$$

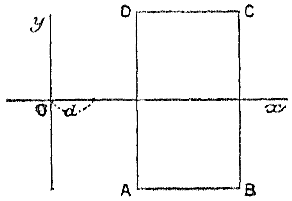
R étant le résidu de la fonction sous le signe $\int$ pour le seul pôle ζ

qu'elle ait dans le carré. Or ce résidu est $\frac{e^{\lambda_i \zeta}}{\zeta} f(\zeta)$. On a donc bien

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n \zeta}.$$

12. *Remarque.* — Si pour toutes les valeurs de a plus grandes que d, $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} f(s) e^{ws} \frac{ds}{s}$ est constant, il en résulte que $\int_{AB} + \int_{CD} = 0$, ABCD étant à droite de d, et AB, CD étant à l'infini (*fig.* 5).

Fig. 5.



Réciproquement, si l'on sait que la fonction $f(s)$ est développable en série de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ sur BC, si, d'autre part, on connaît un prolongement analytique de la fonction à gauche de BC, tel que l'on puisse démontrer que $\int_{AB} + \int_{CD} = 0$, il en résultera que $\int_{AD} = \int_{BC}$, et, par suite, si la fonction est holomorphe dans le rectangle ABCD, il en résultera qu'elle sera développable par la même série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ sur AD. Nous verrons plus loin des applications de cette remarque.

13. *Sur une correspondance entre deux fonctions.* — Soit

$$\mu_n = \log \lambda_n.$$

Si la série $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$ est convergente pour certaines valeurs de s, la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ sera convergente pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est positive.

En effet, on a, par hypothèse,

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\mu_n} \quad \text{non infinie.}$$

Donc

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\lambda_n} = \limsup_{n=\infty} \frac{\log\left|\sum_1^n \alpha_n\right|}{\mu_n}\,\frac{\mu_n}{\lambda_n} = 0;$$

car $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \frac{\log\lambda_n}{\lambda_n}$ tend vers zéro. Donc la droite de convergence de la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ a pour abscisse zéro.

On a

$$e^{-\mu_n s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1} e^{-\lambda_n x}\,dx.$$

Donc, en posant

$$\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s} = F(s),$$

$$\sum \alpha_n e^{-\mu_n s} = f(s),$$

on a

$$(8) \qquad f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1} F(x)\,dx$$

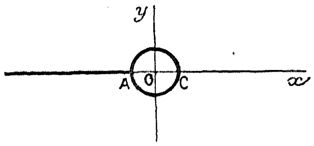
pour les valeurs de s telles que $\mathfrak{R}(s) > a$, a étant l'abscisse de la droite de convergence de $\lambda(s)$.

Remarque. — Puisque l'intégrale (8) a un sens pour les valeurs de s, telles que $\mathfrak{R}(s) > a$, a étant l'abscisse de la droite de convergence de la série $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$, c'est que $F(x)$, lorsque x tend vers zéro, devient infinie au plus comme $\frac{1}{x^a}$. [$F(x)$ peut d'ailleurs rester fini pour $x = 0$.]

14. *Autre forme d'intégrale définie.* — La remarque précédente permet de transformer l'intégrale $\int_0^\infty x^{s-1} F(x)\,dx$ de la façon suivante.

Considérons $\int_C x^{s-1} F(-x)\,dx$, prise le long d'un contour C (*fig.* 6), décrit dans le sens positif, enveloppant l'origine, n'enveloppant d'ailleurs aucun autre point de discontinuité de la fonction $F(-x)$, et s'étendant à l'infini vers les x négatifs. Soit, par exemple, un contour formé : 1° par l'axe des x de $-\infty$ à A; 2° par le cercle infiniment petit C; 3° par l'axe des x de A à $-\infty$.

Fig. 6.



Par définition, $x^{s-1} = e^{(s-1)\log x}$; $\log x$ ayant une infinité de déterminations en progression arithmétique de raison $2i\pi$, x^{s-1} a une infinité de valeurs en progression géométrique de raison $e^{2i\pi(s-1)}$, et l'intégrale précédente a aussi une infinité de valeurs. Pour fixer la valeur de l'intégrale, nous supposerons que, lorsque x part de $-\infty$,

$$\log x = \log(-x) - i\pi,$$

$\log(-x)$ étant réel.

Alors, lorsque x revient à $-\infty$ après avoir tourné autour de l'origine, $\log x$ prend les valeurs $\log(-x) + i\pi$.

Remarquons maintenant que, puisque $F(x)$, lorsque x tend vers zéro, devient infinie au plus comme $\frac{1}{x^a}$, l'intégrale, prise le long du petit cercle, est nulle pour les valeurs de s telles que $\mathcal{R}(s) > a$. Dans ces conditions, on a donc

$$\begin{aligned}\int_C x^{s-1} F(-x)\,dx = & \int_{-\infty}^{0} (-x)^{s-1} F(-x)\,[\cos(s-1)\pi - i\sin(s-1)\pi]\,dx \\ & + \int_{0}^{-\infty} (-x)^{s-1} F(-x)\,[\cos(s-1)\pi + i\sin(s-1)\pi]\,dx \\ & = -2i\sin(s-1)\pi \int_0^{\infty} x^{s-1} F(x)\,dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} F(x)\,dx = \frac{-1}{2i\sin(s-1)\pi} \int_C x^{s-1} F(-x)\,dx;$$

par suite,

$$\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s} = \frac{-1}{2i\,\Gamma(s)\sin(s-1)\pi}\int_C x^{s-1}\,\mathrm{F}(-x)\,dx$$

ou

$$(9)\qquad \sum \alpha_n e^{-\lambda_n s} = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_C x^{s-1}\,\mathrm{F}(-x)\,dx.$$

15. *Extension de la fonction* $f(s) = \sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$. — Nous avons dit que, dans la portion du plan où la série $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$ est convergente, elle représente une fonction holomorphe $f(s)$.

Il existe une fonction et une seule, uniforme, à discontinuités séparées par des intervalles finis, qui coïncide avec $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$, pour les valeurs de s pour lesquelles cette série est convergente.

C'est cette fonction que nous désignerons par $f(s)$.

Or la formule (9) donne l'expression de $f(s)$. En effet, l'intégrale $\int_C x^{s-1}\,\mathrm{F}(-x)\,dx$ conserve un sens pour toute valeur de s. Ainsi

$$f(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_C x^{s-1}\,\mathrm{F}(-x)\,dx.$$

On peut d'ailleurs déformer le contour C défini précédemment, pourvu qu'on ne lui fasse pas envelopper d'autres points de discontinuité de la fonction $\mathrm{F}(-x)$ que l'origine.

16. Inversement, on a

$$e^{-\lambda_n x} = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma(s)\,e^{-\mu_n s}}{x^s}\,ds;$$

donc

$$(10)\qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma(s)\,f(s)}{x^s}\,ds.$$

Mais la convergence de la série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ n'entraîne pas celle de la série $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$. Cette condition de convergence est donc à ajouter. Ainsi une condition nécessaire pour que $f(s)$ soit développable en série de la forme $\sum \alpha_n e^{-\mu_n s}$, pour $\mathcal{R}(s) > d$, est que l'intégrale (10) ait un sens pour toute valeur de $a > d$, soit indépendante de a, et soit égale à une fonction $F(x)$ développable en série de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n x}$.

17. *Opérations sur les séries* $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$. — La somme ou la différence de deux séries $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, $\sum \beta_n e^{-\lambda_n s}$ est une série $\sum \gamma_n e^{-\nu_n s}$, les ν_n étant les λ_n et les μ_n rangés par ordre de grandeur croissante.

De même, le produit $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s} \times \sum \beta_n e^{-\mu_n s}$ peut être mis sous la forme $\sum \delta_n e^{-\rho_n s}$, les ρ_n étant des sommes $\lambda_n + \mu_n$, rangées par ordre de grandeur croissante. Cependant cette transformation n'est certaine que si les séries $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, $\sum \beta_n e^{-\mu_n s}$ sont, pour certaines valeurs de s, absolument convergentes; mais il est important de remarquer qu'elle subsiste même pour les valeurs de s, telles que la condition précédente ne soit pas remplie, pourvu que les séries soient convergentes.

En effet, pour les valeurs de s, telles que les deux séries soient absolument convergentes, par exemple, celles dont la partie réelle est a', on a, en posant

$$f(s) = \sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}, \qquad \varphi(s) = \sum \beta_n e^{-\mu_n s},$$

le produit

$$f(s)\,\varphi(s) = \sum \delta_n e^{-\rho_n s}.$$

Or, si pour la valeur réelle a de s, $a < a'$, $f(s)$ est développable en série $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, on a la fonction

$$\Phi(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)\,e^{ws}}{s}\,ds,$$

indépendante de a, et, par suite,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{AB+CD} \frac{f(s)\,e^{ws}}{s}\,ds = 0,$$

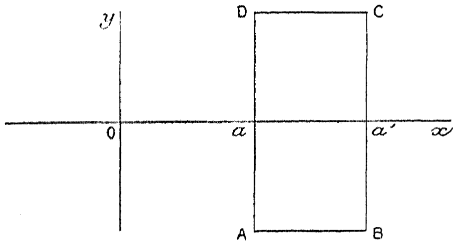
AB, CD étant à l'infini (*fig.* 7).

Si $\varphi(s)$ est aussi développable en série $\sum \beta_n e^{-\mu_n s}$, pour la valeur a de s, on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{AB}+\mathrm{CD}} \frac{f(s)\,\varphi(s)\,e^{ws}}{s}\,ds = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{AB}+\mathrm{CD}} \sum \beta_n \frac{f(s)}{s}\,e^{(w-\mu_n)s}\,ds = 0.$$

Donc $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)\,\varphi(s)\,e^{ws}}{s}\,ds$ est indépendante de a, et, par suite, la fonction $f(s)\,\varphi(s)$, étant développable en série de la forme $\sum \delta_n e^{-\rho_n s}$ pour les valeurs de s, dont la partie réelle est a', l'est aussi pour celles dont la partie réelle est a (n° 11).

Fig. 7.



Un cas intéressant est celui où les nombres λ_n se reproduisent par addition. Alors le produit de deux séries de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$ est lui-même une série de cette forme. Exemple : $\lambda_1 = n$, $\lambda = \log n$, $\lambda_n = \log a_n$, les a_n étant les nombres entiers non divisibles par un quelconque des nombres premiers contenus dans une certaine suite finie ou infinie p_1, p_2, ...

Autre exemple : $\lambda_n = \log(p^2 + p'^2)$, ...

De là on déduit facilement le quotient de deux séries $\frac{\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}}{\sum \beta_n e^{-\mu_n s}}$, et la série obtenue n'est convergente que pour des valeurs de s dont la partie réelle est plus grande que celles qui rendent convergentes $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, $\sum \beta_n e^{-\lambda_n s}$, et que celles qui annulent $\sum \beta_n e^{-\mu_n s}$.

18. *Application des résultats précédents aux séries de la forme* $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$. — Les séries de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ sont, comme nous l'avons déjà dit, des cas particuliers des séries de la forme $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n s}$. Elles correspondent au cas de $\lambda_n = \log n$. Ces séries admettent une droite de convergence parallèle à Oy, dont l'abscisse, quand elle est positive, est donnée par la formule

$$a = \limsup_{n=\infty} . \frac{\log \left| \sum_1^n \alpha_n \right|}{\log n}.$$

En particulier, on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *La série* $\sum \frac{1}{n^s}$ *a pour droite de convergence* $x = 1$.

THÉORÈME II. — *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ *a pour droite de convergence* $x = 0$.

THÉORÈME III. — *Soit la série* $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, *les* α_n *étant tels que* $\sum_1^n \alpha_n$ *croisse avec* n *comme une certaine puissance à exposant positif de* n, n^α.

Alors la droite de convergence est $x = \alpha$.

En effet,

$$\frac{\log \left| \sum_1^n \alpha_n \right|}{\log n} = \frac{\log A_n + \alpha \log n}{\log n},$$

$\log A_n$ reste fini. Donc la droite de convergence est $x = \alpha$.

19. *Fonction représentée par la série* $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$. — Dans la portion du plan où elle est convergente, la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ représente une fonction uniforme et continue de s. Cette fonction est holomorphe, et sa dérivée s'obtient en prenant les dérivées des termes successifs de la série.

Inversement, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(s)$ soit développable en série de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ pour les valeurs de s dont la partie réelle est plus grande qu'un certain nombre positif d est que la fonction de w, $\frac{1}{2\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{f(s)e^{ws}}{s}\,ds$, soit pour $\mathfrak{R}(a) > d$ indépendante de a, et constante pour les valeurs de w comprises dans les intervalles $0-\log 2$, $\log 2-\log 3$, ...

Une autre forme de condition nécessaire est que $\frac{1}{2\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma(s)}{x^s}f(s)\,ds$ soit développable en série de la forme $\sum \alpha_n e^{-nx}$ pour $\mathfrak{R}(x) > 0$, ou, ce qui revient au même, que la fonction de u,

$$\mathrm{F}(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a+\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma(s)}{(-\log u)^s}f(s)\,ds,$$

soit une fonction de u, holomorphe dans le cercle de centre 0 et de rayon 1.

20. La formule (8) donne ici

$$\sum\frac{\alpha_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\,\mathrm{F}(e^{-x})\,dx,$$

en posant

$$\sum \alpha_n u^n = \mathrm{F}(u),$$

ou

$$\sum\frac{\alpha_n}{n^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} x^{s-1}\,\mathrm{F}(e^x)\,dx.$$

21. Voici quelques formules sur certaines séries de la forme $\sum\frac{\alpha_n}{n^s}$. Posant, d'après Riemann,

$$\zeta(s) = \sum\frac{1}{n^s},$$

on a, d'après Euler,

$$\zeta(s) = \prod\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

p désignant tous les nombres premiers.

On déduira facilement de là

$$(11)\qquad [\zeta(s)]^q = \sum\frac{q(q+1)\ldots(q+\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}\,\frac{q(q+1)\ldots(q+\beta-1)}{1.2\ldots\beta}\cdots\frac{1}{n^s},$$

q étant un nombre quelconque, et posant n décomposé en facteurs premiers

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots.$$

Comme exemple d'application arithmétique, on a pour $n = 2$

$$[\zeta(s)]^2 = \sum (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots \frac{1}{n^s}.$$

D'ailleurs

$$[\zeta(s)]^2 = \sum \frac{\lambda(n)}{n^s}, \qquad [\lambda(n) = \text{nombre des diviseurs de } n].$$

Donc

$$\lambda(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots.$$

formules analogues pour $q = 3, 4, \ldots$.

On déterminerait de même la somme des diviseurs d'un nombre par la considération de la fonction $\zeta(s)\,\zeta(s-1)$, etc.

Si dans la formule (11) on fait $q = -1$, on obtient

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{12}$$

$\mu(n) = 0$ si n contient des facteurs premiers multiples.

$\mu(n) = \pm 1$ si n n'en contient pas, $+1$ si le nombre des facteurs premiers de n est pair, -1 dans le cas contraire; résultat connu.

Cette série $\sum \frac{\mu(n)}{n^s}$ est certainement convergente pour $\mathcal{R}(s) > 1$, mais elle est peut-être convergente pour des valeurs de s dont la partie réelle est plus petite que 1.

22. *Dérivation et intégration numérique.* — Soit une fonction numérique $\varphi(d)$. Nous appellerons, d'après M. Tchébicheff, *intégrale numérique* de la fonction $\varphi(d)$, la fonction $\psi(n)$ définie par l'égalité

$$\psi(n) = \mathrm{S}\,\varphi(d),$$

le signe S étant étendu à tous les diviseurs d de n.

Inversement, $\varphi(d)$ est la dérivée numérique de $\psi(n)$,

$$\varphi(d) = \mathrm{D}[\psi(n)].$$

Étant donnée $\varphi(d)$, on en déduit immédiatement $\psi(n)$.

Inversement, étant donnée $\psi(n)$, on peut déterminer $\varphi(d)$ par plusieurs procédés.

On a, entre φ et ψ, la relation

$$\sum \frac{\psi(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Exemple : Soit $\psi(n) = n$. Alors $\varphi(n)$ est égal au nombre des nombres premiers à n et plus petits que lui; d'où

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Généralisation. — On peut considérer $\varphi_{k-1}(n) = \mathrm{D}(n^k)$:

$$\varphi_{k-1}(n) = n^k\left(1 - \frac{1}{a^k}\right)\left(1 - \frac{1}{b^k}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l^k}\right),$$

$\varphi_{k-1}(n)$ est égal au nombre des nombres plus petits que n^k, et n'ayant avec n^k que des facteurs premiers communs du $(k-1)^{\text{ième}}$ degré au plus, ou encore $\varphi_{k-1}(n)$ est égal au nombre des systèmes de k nombres plus petits que n, dont le plus grand commun diviseur est premier avec n,

$$\sum \frac{\varphi_{k-1}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s)}.$$

La fonction $\varphi_1(n)$, en particulier, s'est présentée dans certaines recherches relatives aux groupes de congruences [1]. Elle se présente aussi dans la théorie de la division par n des fonctions modulaires particulières. De même que $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ dépend d'une équation irréductible à coefficients entiers de degré $\varphi(n)$, de même $f\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\middle|\omega_1\omega_2\right)$ dépend d'une équation irréductible de degré $\varphi_1(n)$ [2].

---

[1] Voir *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, de Klein, publiés par Fricke, t. I, p. 395 et suiv.

[2] Voir *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, de Klein, t. II, p. 10 et 11.

23. *Autres séries :*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\dots}}{n^s} = \prod \frac{1}{1+\frac{1}{p^s}}.$$

D'une façon générale

$$\sum \frac{c^{\alpha+\beta+\dots}}{n^s} = \prod \frac{1}{1-\frac{c}{p^s}}.$$

La série $\zeta'(s)$ est égale à

$$\sum_1^\infty -\frac{\log n}{n^s}.$$

La série $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ s'obtient facilement en partant de l'identité

$$\zeta(s) = \prod \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right).$$

On en déduit

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right),$$

etc.

CHAPITRE II.

24. Nous allons appliquer les résultats précédents à la fonction $\zeta(s)$. Nous allons rappeler succinctement les résultats dus à Riemann (*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse,* Œuvres complètes), en les précisant et les complétant sur quelques points.

On a

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1} = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{-x}-1}$$

[d'après les formules (8) et (9)].

La formule

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{-x}-1}$$

montre facilement que la fonction n'a qu'un pôle $s = 1$, le résidu correspondant étant 1, car les autres valeurs de s, qui rendent $\Gamma(1-s)$ infini, annulent l'intégrale.

Cette formule montre aussi que

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2},$$

que

$$\zeta(-2k) = 0 \qquad (k \text{ entier} > 0),$$

que

$$\zeta(-2k-1) = \frac{(-1)^{k-1} B_{k+1}}{2(k+1)},$$

les nombres B_k étant les nombres de Bernoulli définis par

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4}x^4 + \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \ldots.$$

Tous ces résultats s'obtiennent en remarquant que, pour ces valeurs de s, la fonction sous le signe $\int$, devenant uniforme, on a facilement la valeur de l'intégrale par un calcul de résidu.

25. *Expressions générales de* $\zeta(s)$. — Les formules

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}$$

ne sont valables que pour $\mathcal{R}(s) < 1$; mais on a, comme on l'a expliqué au n° 14, une expression générale de $\zeta(s)$ par la formule

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{-x}-1},$$

ou par la série de Taylor

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \ldots,$$

dont les coefficients numériques se calculent facilement, et où il est à remarquer que C est égal à la constante d'Euler, ou encore, comme l'a remarqué M. Hermite, en partant de

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

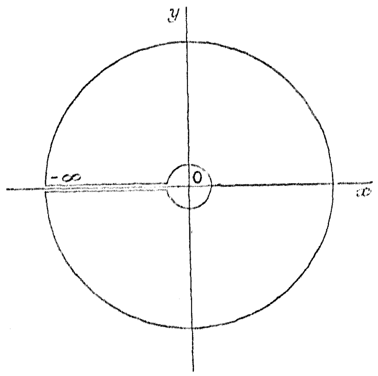
séparant l'intégrale en deux parties et appliquant une méthode analogue à celle qu'a donnée M. Prym pour la fonction Γ. On obtient ainsi

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{s+1} - \ldots\right) + \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1}.$$

26. *Relation fonctionnelle.* — La fonction $\zeta(s)$ satisfait à une relation découverte par Riemann et Schömilch. Nous reproduisons ici la démonstration donnée par Riemann.

Si $\mathcal{R}(s) < 0$, l'intégrale $\int \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{-x} - 1}$ prise le long d'un cercle de

Fig. 8.



centre O (*fig.* 8) et de rayon infini est nulle.

Donc

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s) \sum A,$$

A désignant les résidus de la fonction sous le signe $\int$ relatif aux différents pôles $2ki\pi$ $(k \neq 0)$.

Calculant ces résidus, on trouve

$$\sum A = -(2\pi)^{s-1}\, 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^{1-s}}.$$

et, comme $\mathcal{R}(s) < 0$,

$$\mathcal{R}(1-s) > 1.$$

Donc

$$\sum A = -(2\pi)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}\zeta(1-s).$$

Par suite

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}\zeta(1-s).$$

Cette relation est ainsi démontrée pour $\mathcal{R}(s) < 0$, mais, les deux membres étant des fonctions uniformes de s, la relation est générale.

Cette relation peut encore, comme l'a remarqué Riemann, s'exprimer par ce fait que la fonction $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ reste invariable par le changement de s en $1-s$.

27. *La fonction* $\xi(t)$. — On peut encore dire que

$$\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}\right)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)$$

est une fonction paire. Cette fonction a les pôles $t = \pm\frac{1}{2}$. Donc

$$\xi(t) = \left(t^2+\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}\right)\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+ti}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)$$

est une fonction entière paire. Riemann en donne l'expression suivante

$$\xi(t) = 4\int_0^{\infty}\frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\log x\right)dx,$$

où

$$\psi(x) = \sum_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

(Pour la démonstration, *voir* le Mémoire déjà cité.)

28. *Valeur de* $\zeta(s)$ *pour* s *entier et positif.* — De la relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, on déduit

$$\zeta(2k) = \frac{2\Gamma(2k)(2\pi)^{2k}(-1)^k}{\zeta(1-2k)},$$

ou

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}B_k}{1.2\ldots(2k)}\pi^{2k}.$$

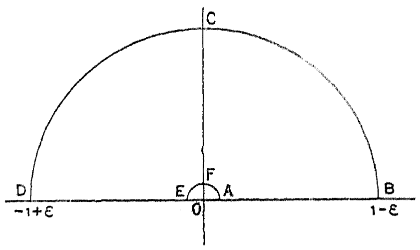
Mais la relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$ ne donne pas les valeurs de $\zeta(s)$ pour s entier positif et impair, car pour $s=-2k$ elle se réduit à $0=0$.

Remarque.

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{(-\mathrm{L}x)^{s-1}\,dx}{1-x}.$$

Intégrons $\frac{(-\mathrm{L}x)^{s-1}\,dx}{1-x}$ le long du contour ABCDEFA (*fig.* 9); on

Fig. 9.



obtient, en supposant s entier et positif,

$$0=\zeta(s)-\frac{(i\pi)^s}{2s}+\frac{i^{s+1}}{2}\int_0^\pi \frac{\theta^{s-1}\,d\theta}{\tang\frac{\theta}{2}}+\int_0^1 \frac{(\mathrm{L}x+i\pi)^{s-1}}{1+x}\,dx.$$

Développons $(\mathrm{L}x+i\pi)^{s-1}$ par la formule du binôme et remarquons d'ailleurs que

$$\frac{1}{1.2\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{(-\mathrm{L}x)^{p-1}}{1+x}dx=\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p).$$

Cette formule donnera $\zeta(2k)$ en fonction de $\zeta(2k-2)$, $\zeta(2k-4)$, ..., ce qui redonne le résultat précédent, et aussi les intégrales $\int^\pi \frac{\theta^k\,d\theta}{\tang\frac{\theta}{2}}$ en fonction des valeurs de ζ pour s entier impair. Faisant le calcul, on trouve pour les premières valeurs de k

$$\int_0^\pi \frac{\theta\, d\theta}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = 2\pi \mathrm{L}2,$$

$$\int_0^\pi \frac{\theta^2\, d\theta}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = 2\pi^2 \mathrm{L}2 - 7\zeta(3),$$

$$\int_0^\pi \frac{\theta^3\, d\theta}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = 2\pi^3 \mathrm{L}2 - 9\pi\,\zeta(3),$$

$$\int_0^\pi \frac{\theta^4\, d\theta}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = 2\pi^4 \mathrm{L}2 - 18\pi^2\,\zeta(3) + 47\,\zeta(5),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

29. *Zéros de $\zeta(s)$ et décomposition en facteurs primaires.*

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = 2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\cos\frac{s-1}{2}\pi.$$

Les zéros du second membre qui ne sont pas infinis de $\zeta(1-s)$ sont des zéros de $\zeta(s)$.

Or le seul infini de $\zeta(1-s)$ est $s=0$. Donc les zéros du second membre, $\neq 0$, sont zéros de $\zeta(s)$. On trouve ainsi

$$s = -2k \qquad (k \text{ entier positif}),$$

ce qui était déjà connu.

D'ailleurs o n'est pas racine, puisque $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

A part ces racines $-2k$, il ne peut exister que des racines β, telles que $1-\beta$ soit aussi racine.

La partie réelle d'une telle racine est comprise entre o et 1, car la formule

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$$

montre que $\zeta(s)$ ne peut s'annuler lorsque $\mathcal{R}(s) > 1$.

β et $1 - \beta$ étant racines, il faut donc que

$$0 < \mathcal{R}(\beta) < 1.$$

Si nous nous reportons au n° 27, ces racines β sont liées aux racines α de la fonction $\xi(t)$ par la formule

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + \beta i.$$

L'existence des racines α a été démontrée par M. Hadamard dans un beau Mémoire (1) couronné par l'Académie.

L'auteur démontre de plus que le module ρ_p d'une racine (les racines qui sont deux à deux égales et de signes contraires étant supposées rangées par ordre de modules croissants) est donné par la formule

$$\rho_p = \frac{k_p}{\log p},$$

k_p étant compris entre $\frac{1}{7,56}$ et $\frac{e}{4}$, et de plus la fonction est du genre zéro (en t^2), c'est-à-dire que

$$\xi(t) = \xi(0) \prod \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

sans facteur exponentiel.

30. *Autres applications arithmétiques de la fonction* $\zeta(s)$. — Nous pouvons maintenant aborder quelques autres applications arithmétiques de la fonction $\zeta(s)$, à savoir, la recherche des valeurs asymptotiques des fonctions numériques. Les différentes formes sous lesquelles on peut présenter ces applications se ramènent en somme à celle que leur a donnée Halphen dans le tome XCVI des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Soit

$$f(s) = \frac{\lambda(1)}{1} + \frac{\lambda(2)}{2^s} + \ldots \qquad \text{pour } \mathcal{R}(s) > l$$

et

$$F(x) = \lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda\, E(x),$$

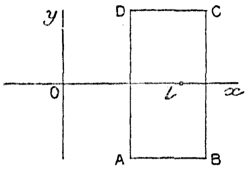
(1) *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Liouville*, année 1893).

$E(x)$ étant le plus grand entier contenu dans x. On a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z} f(z)\,dz \qquad \mathcal{R}(a) > l.$$

Or si l'on intègre $\frac{x^z}{z} f(z)\,dz$, le long d'un rectangle ABCD (*fig.* 10),

Fig. 10.



comprenant à son intérieur le point l, on a

$$F(x) = \Sigma A - \frac{1}{2i\pi}\int_{CD+DA+AB} \frac{x^z}{z} f(z)\,dz.$$

$\Sigma A =$ somme des résidus de $\frac{x^z}{z} f(z)$ dans l'intérieur du rectangle. Or, s'il arrive que $\int_{CD+DA+AB}$, soit pour x infiniment grand, d'un ordre de grandeur inférieur à ΣA, on voit que la formule précédente donnera une expression asymptotique de $F(x)$.

31. Halphen applique sa méthode à la recherche de la valeur asymptotique de

$$F(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n),$$

$\varphi(n)$ étant le nombre des nombres plus petits que n et premiers avec lui. Il trouve

$$F(x) = \frac{3x^2}{\pi^2} \qquad \text{(asymptotiquement).}$$

(*Voir* passage cité.)

La même méthode s'appliquerait aux fonctions $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, ... du n° 22.

On trouverait facilement en posant

$$F_{k-1}(n) = \varphi_{k-1}(1) + \varphi_{k-1}(2) + \ldots + \varphi_{k-1}(n)$$

et refaisant un calcul à peu près identique à celui d'Halphen

$$F_{k-1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} \qquad \text{(asymptotiquement)},$$

c'est-à-dire pour k impair et égal e $2k'-1$

$$F_{2k'-1}(x) = 1.2\ldots(2k'-1)\frac{2}{B_{k'}}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k'}.$$

32. Enfin voici une application très importante que se proposait Halphen, mais qu'il n'avait pu réussir, probablement parce qu'il voulait se servir de la décomposition de la fonction $\zeta(s)$ en facteurs primaires, décomposition annoncée, mais non démontrée par Riemann. Depuis, le résultat ayant été démontré, comme nous l'avons dit, par M. Hadamard, nous avons essayé de rétablir le raisonnement de Halphen, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (¹) et que nous reproduisons ici.

Le résultat que nous voulons démontrer est le suivant :

La somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x est asymptotique à x.

On a (n° 23)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \log p\left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right), \tag{13}$$

p désignant les nombres premiers.

Soit $\theta(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x.

Si l'on ordonne la série (13) sous la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, la somme des n premiers coefficients est $-\psi(n)$, en posant

$$\psi(n) = \theta(n) + \theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots,$$

et ce développement est valable pour les valeurs de s dont la partie réelle est plus grande que 1.

(¹) *Comptes rendus*, 16 janvier 1893.

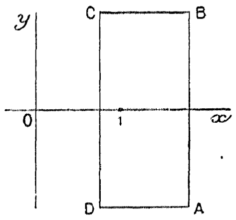
Donc

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\text{AB}} \frac{x^z}{z}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz,$$

AB étant une parallèle à Oy, indéfinie dans les deux sens, et d'abscisse supérieure à 1.

Pour évaluer cette intégrale par la méthode de Halphen, j'intègre la fonction sous le signe $\int$ le long du contour d'un rectangle ABCD (*fig.* 11); BC, AD étant à l'infini, CD étant à gauche de la droite $x=1$,

Fig. 11.



et d'ailleurs pouvant être curviligne, mais tel que le rectangle ne renferme pas d'autre pôle que 1 de la fonction sous le signe $\int$.

On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\text{ABCD}} \frac{x^z\,\zeta'(z)}{z\,\zeta(z)}\,dz = -x,$$

et, par suite,

$$\psi(x) = x + \int_{\text{BCDA}} \frac{x^z}{z}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz. \tag{14}$$

Je dis maintenant que $\int_{\text{BC}}$ et $\int_{\text{DA}}$ sont nulles. En effet, on a

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = 2\sum_{\alpha} \frac{z-\frac{1}{2}}{\alpha^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\log\pi$$

$$= 2\sum_{\alpha} \frac{z-\frac{1}{2}}{\alpha^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{C} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z-2}{n(z+2n-2)} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\log\pi.$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{BC\,ou\,DA}}\frac{x^z}{z}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{BC\,ou\,DA}}\frac{x^z}{z}\left[2\sum_{\alpha}\frac{z-\frac{1}{2}}{\alpha^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\mathrm{C}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z-2}{n(z+2n-2)}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\mathrm{lo}\right.$$

tend vers zéro, lorsque BC et AD s'éloignent indéfiniment, parce que chacune des parties de cette intégrale tend vers zéro.

Il reste donc

$$\psi(x)=x-\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z}{z}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz.$$

Il reste à démontrer que

$$\varphi(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z}{z}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz$$

est infiniment petit par rapport à x pour x infiniment grand.

Si l'on pose

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z}{z}\frac{\theta'(z)}{\zeta(z)}dz,$$

$$\left[\theta(z)=\zeta(z)\left(1-\frac{1}{2^{z-1}}\right)=1-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\ldots\right],$$

on a

$$-\varphi(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z\theta'(z)}{z\zeta(z)}\frac{2^{z-1}}{1-2^{z-1}}dz-\frac{\log 2}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z}{z}\frac{1}{1-2^{z-1}}dz,$$

et, puisque la partie réelle de z est plus petite que 1,

$$\begin{aligned}-\varphi(x)= & \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z\theta'(z)}{z\zeta(z)}[2^{z-1}+2^{2(z-1)}+2^{3(z-1)}+\ldots]dz\\ & -\frac{\log 2}{2i\pi}\int_{\mathrm{DC}}\frac{x^z}{z}(1+2^{z-1}+\ldots)dz\\ = & \left[\frac{1}{2}\mathrm{F}(2x)+\frac{1}{2^2}\mathrm{F}(2^2x)+\ldots\right]-2\log 2.\end{aligned}$$

La série du second membre, étant convergente, on a

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{2^n}\mathrm{F}(2^nx)+\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{F}(2^{n+1}x)+\ldots\right]=0.$$

Posant $2^{n-1}x = X$,

$$\frac{x}{2}\lim_{X=\infty}\left\{\frac{1}{X}\left[\frac{1}{2}F(2X)+\frac{1}{2^2}F(2^2X)+\ldots\right]\right\}=0$$

ou

$$\lim_{X=\infty}\left[\frac{-\varphi(X)+2\log 2}{X}\right]=0,$$

ou enfin

$$\lim_{X=\infty}\left[\frac{\varphi(X)}{X}\right]=0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc

$$\psi(x)=x(1+A),$$

A devenant nul pour $x=\infty$.

Ainsi $\psi(x)$ est asymptotique à x.

Maintenant on a

$$\psi(x)-2\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)<\theta(x)<\psi(x)$$

ou

$$x\left[(1+A)-2\frac{1+A'}{\sqrt{x}}\right]<\theta(x)<x(1+A).$$

Donc $\theta(x)$ est asymptotique à x, ce que nous voulions démontrer.

33. Ce résultat appelle quelques remarques. Comparons-le avec celui bien connu de M. Tchébicheff; ce dernier permet de calculer des limites numériques pour $\theta(x)$, tandis que le précédent n'en donne pas.

Par contre, le précédent permet de démontrer l'important résultat suivant énoncé, mais je crois non démontré par M. Stieltjes ([1]) :

Le nombre des nombres premiers compris entre x et $(1+h)x$, quelque petite que soit la constante h, va en croissant indéfiniment avec x.

En effet, la somme des logarithmes des nombres premiers, compris entre $(1+h)x$ et x, est égale à

$$(1+h)\,x(1+A')-x(1+A)=x(h+A'+A'h-A).$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 mars 1893.

Le nombre de ces nombres est donc plus grand que

$$\frac{x(h+A'+A'h-A)}{\log(1+h)x},$$

expression qui croît indéfiniment avec x.

Remarquons aussi que ce nombre est plus petit que

$$\frac{x(h+A'+A'h-A)}{\log x};$$

donc la *fréquence* des nombres premiers compris entre x et $(1+h)x$ est plus petite que

$$\frac{h+A'+A'h-A}{\log x}$$

et, par suite, tend vers zéro.

Enfin, remarquons que dans la formule (14) on peut achever l'intégration, puisqu'on connaît le développement de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ en fonction des α. On trouve ainsi

$$\psi(x) = x - 2\sqrt{x}\sum_{\alpha}\frac{\alpha\sin\alpha\log x + \cos\alpha\log x}{\alpha^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + C - \log\pi^2.$$

Si, comme l'annonce Riemann, les α sont réels, on voit que la différence $\varphi(x) - x$ ne peut atteindre un ordre de grandeur supérieur à $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

34. *La fonction* $\chi(s)$. — La fonction $\chi(s)$ est la fonction qui est définie pour $\mathcal{R}(s) > 0$ par

$$\chi(s) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Nous allons montrer qu'on peut faire de cette fonction une théorie analogue à celle de $\zeta(s)$.

On a

$$\chi(s) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{\mathrm{L}}\frac{x^{s-1}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

La fonction $\chi(s)$ est holomorphe

$$\chi(0)=\tfrac{1}{2},$$
$$\chi(-2k)=(-1)^k\frac{E_k(k+1)(k+2)\dots(2k)}{2},$$

en posant

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}+\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{E_n x^{2n}}{2(1.2\dots n)}.$$

35. *Expressions générales de $\chi(s)$:*

$$\chi(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_C\frac{x^{s-1}}{e^x+e^{-x}}dx,$$
$$\chi(s)=\frac{1}{2\Gamma(s)}\left[\frac{1}{s}-\frac{E_1}{s+2}+\frac{E_2}{1.2(s+4)}-\dots\right]+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+e^{-x}}dx.$$

Nous jugeons inutile la démonstration de ces formules, absolument analogues à celles relatives à la fonction $\zeta(s)$.

36. *Relation fonctionnelle :*

$$\chi(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_C\frac{x^{s-1}dx}{e^x+e^{-x}}.$$

Un pôle de la fonction sous le signe $\int$ est

$$(k+\tfrac{1}{2})i\pi,$$

son résidu est

$$(-1)^{k+1}\frac{\pi^{s-1}}{(2k+1)^{1-s}}\,\frac{\sin(s-1)\frac{\pi}{2}-i\cos(s-1)\frac{\pi}{2}}{2^s}.$$

L'ajoutant au conjugué, on trouve

$$(-1)^{k+1}\frac{\pi^{s-1}}{(2k+1)^{1-s}}\,\frac{\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{2^{s-1}}.$$

Donc, en raisonnant comme au n° 26, on trouve

$$\chi(s)=-\frac{\Gamma(1-s)\pi^{s-1}\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{2^{s-1}}\chi(1-s),$$

relation qui peut encore s'exprimer en disant que la fonction

$$\chi(s)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)$$

ne change pas par le changement de s en $1-s$.

37. *Valeurs de $\chi(s)$ pour s entier.* — De la relation entre $\chi(s)$ et $\chi(1-s)$, on déduit

$$\chi(1)=\frac{\pi}{4}$$

et

$$\chi(2k+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}\frac{E_k}{1.2\ldots k};$$

mais on n'a pas les valeurs de $\chi(s)$ pour s entier positif pair.

Appliquant une méthode analogue à celle de la remarque du n° 28, on trouve les valeurs principales des intégrales $\int_0^\pi \frac{\theta^{s-1}\,d\theta}{\cos\theta}$ en fonction de χ. On trouve, par exemple,

$$\mathrm{VP}\int_0^\pi \frac{\theta\,d\theta}{\cos\theta} = 4\chi(2),$$

$$\mathrm{VP}\int_0^\pi \frac{\theta^2\,d\theta}{\cos\theta} = -4\pi\chi(2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

38. *Zéros de la fonction $\chi(s)$ et décomposition en facteurs primaires.* — On a

$$\frac{\chi(s)}{\chi(1-s)}=\frac{\Gamma(1-s)\,\pi^{s-1}\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{2^{s-1}}.$$

Les zéros du second membre sont zéros de $\chi(s)$. Ce sont les nombres $-(2k-1)$ (k entier et positif). De plus, il peut exister des racines β' telles que $1-\beta'$ soit aussi racine. La formule analogue à celle d'Euler

$$\chi(s)=\prod\frac{1}{1+\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}$$

montre que χ ne peut s'annuler si $\mathcal{R}(s) > 1$. Les racines β' ont donc leur partie réelle comprise entre zéro et 1.

On peut former une fonction $\theta(t)$, analogue à la fonction $\xi(t)$, relative à $\zeta(s)$, qui n'ait plus pour racines que les nombres α', liés aux β' par la relation

$$\beta' = \tfrac{1}{2} + \alpha' i.$$

En effet, on a

$$\frac{1}{(2n+1)^{s+1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1+s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{s-1}{2}} e^{-(2n+1)^2\frac{\pi x}{4}}\,dx$$

ou

$$\frac{1}{(2n+1)^{s}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1+s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{s-1}{2}} e^{-(2n+1)^2\frac{\pi x}{4}}\,dx.$$

Donc, en posant

$$\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, e^{-(2n+1)^2\frac{\pi x}{4}} = \varphi(x),$$

on a

$$\chi(s)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1+s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{s-1}{2}}\varphi(x)\,dx.$$

Or

$$x^{\frac{3}{2}}\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right),$$

comme on le tire facilement de formules elliptiques; donc

$$\begin{aligned}\chi(s)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1+s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) &= \int_1^\infty x^{\frac{s-1}{2}}\varphi(x)\,dx + \int_0^1 x^{\frac{s-1}{2}}\varphi(x)\,dx\\ &= \int_1^\infty x^{\frac{s-1}{2}}\varphi(x)\,dx + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}}\varphi(x)\,dx\\ &= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s-1}{2}} + x^{-\frac{s}{2}}\right)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Changeons s en $\frac{1}{2} + ti$, et posons le premier membre égal à $\theta(t)$, il vient

$$\theta(t) = 2\int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}}\cos\frac{t}{2}\log x\,\varphi(x)\,dx.$$

On démontre identiquement, comme M. Hadamard l'a fait pour $\xi(t)$, que $\theta(t)$ est du genre zéro en t^2.

39. *Applications arithmétiques de la fonction* $\chi(s)$:

$$\chi(s) = \prod \frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}},$$

le nombre premier 2 n'entrant pas dans le produit

$$\frac{\chi'(s)}{\chi(s)} = \sum \log p \left[\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} + \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^{3s}} + \ldots \right].$$

En opérant, comme on l'a fait au n° 32, on démontre que, en posant

$$\sum_1^x (-1)^{\frac{p+1}{2}} \log p = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ est infiniment petit par rapport à x :

$$\sum_1^x (-1)^{\frac{p+1}{2}} \log p = \mathrm{B}x;$$

d'autre part,

$$\sum_1^x \log p = x + \mathrm{A}x.$$

On en déduit que la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n + 1$, qui sont plus petits que x, et celle des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n - 1$, qui sont plus petits que x, sont asymptotiques à $\frac{x}{2}$.

CHAPITRE III.

40. Les séries $\sum \frac{1}{n^s}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ du Chapitre précédent présentent ce caractère commun que les coefficients α_n s'y reproduisent périodiquement de un en un dans la première, de quatre en quatre dans la seconde. Nous sommes donc assez naturellement amené à étudier les séries dans lesquelles les coefficients se reproduisent de p en p, c'est-à-dire les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_1}{(pk+1)^s} + \frac{\alpha_2}{(pk+2)^s} + \ldots + \frac{\alpha_p}{(pk+p)^s}.$$

Convergence de ces séries. — Théorème. — *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p \neq 0$, *la série est convergente pour* $\mathcal{R}(s) > 1$, *et divergente pour* $\mathcal{R}(s) < 1$. *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 0$, *la série est convergente pour* $\mathcal{R}(s) > 0$, *et divergente pour* $\mathcal{R}(s) < 0$.

Il suffit d'appliquer la règle du n° 18. La somme des kp premiers coefficients est égale à

$$k(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p).$$

L'abscisse de la droite de convergence est donc égale à

$$\limsup_{k=\infty} \frac{\log|k(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)|}{\log kp},$$

c'est-à-dire que cette abscisse est égale à 1, si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p \neq 0$, et à 0 si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 0$.

41. *Séries premières et non premières.* — Un premier exemple de ces séries périodiques est obtenu en multipliant $\sum \frac{1}{n^s}$ par une expression de la forme

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \ldots + \frac{\alpha_h}{h^s}.$$

On obtient ainsi le produit

$$\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots\right)\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}+\ldots+\frac{\alpha_h}{h^s}\right).$$

On démontre facilement que, dans ce produit, les coefficients se reproduisent périodiquement de M en M, M désignant le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, ..., h, dont le coefficient dans la somme $\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}+\ldots+\frac{\alpha_h}{h^s}$ est différent de zéro.

Exemple :

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots,$$

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\ldots,$$

$$\left\{\frac{1}{a^s}-\frac{1}{(a+1)^s}-\frac{1}{[a(a+1)]^s}\right\}\sum\frac{1}{n^s}$$
$$=\left\{\frac{1}{a^s}-\frac{1}{(a+1)^s}+\frac{1}{(2a)^s}-\frac{1}{(2a+2)^s}+\ldots+\frac{1}{(a^2)^s}-\frac{1}{[a(a+1)]^s}\right\}+\ldots$$

(qui présente cette particularité que les signes en sont alternés).

Que l'on multiplie la série ainsi trouvée par une nouvelle expression de la forme

$$\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_2}{2^s}+\ldots+\frac{\beta_{h'}}{h'^s},$$

et l'on trouvera évidemment une autre série périodique, car cela revient à multiplier $\sum\frac{1}{h^s}$ par

$$\frac{\alpha_1\beta_1}{1^s}+\ldots+\frac{\alpha_h\beta_{h'}}{(hh')^s}.$$

La période de la nouvelle série sera le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, ..., hh' dont le coefficient est de zéro, c'est-à-dire MM' (M' désignant le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, ..., h' dont le coefficient est différent de zéro).

Plus généralement, soit une série périodique de période q

$$\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}+\ldots+\frac{\alpha_q}{q^s}\right)+\ldots,$$

qu'on multiplie par
$$\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_2}{2^s}+\ldots+\frac{\beta_h}{h^s}.$$

Soit M le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, \ldots, h$ dont le coefficient est différent de zéro. On démontre facilement que dans le produit les coefficients se reproduisent périodiquement de Mq en Mq.

42. Donc les séries périodiques peuvent se distinguer en deux :

1° Celles qui ne peuvent provenir de la multiplication d'une autre série périodique par un facteur
$$\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta^2}{2^s}+\ldots+\frac{\beta_h}{h^s};$$

2° Celles qui en proviennent.

Nous pouvons appeler *séries premières* celles de la première espèce.

1er *Exemple.* — Cherchons la forme générale des séries périodiques de période 3 et non premières.

On doit avoir
$$Mq=3,$$
donc
$$M=3, \qquad q=1$$
ou
$$M=1, \qquad q=3.$$
L'hypothèse $M=1$ ne donne rien. Reste $M=3$. Les indices des nombres β doivent être diviseurs de 3, de sorte que la forme générale cherchée est
$$\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_3}{3^s}\right)\sum\frac{1}{n^s}=\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_1}{2^s}+\frac{\beta_1+\beta_3}{3^s}\right)+\ldots,$$

c'est-à-dire les séries dans lesquelles les coefficients de $\frac{1}{1^s}$ et de $\frac{1}{2^s}$ sont égaux.

2e *Exemple.* — Formes générales des séries périodiques non premières de période 4.

$Mq=4$:
$$M=4, \qquad q=1 \qquad \text{ou} \qquad M=2, \qquad q=2;$$

ce qui donne

$$(15)\quad \left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots\right)\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_2}{2^s}+\frac{\beta_4}{4^s}\right)=\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2^s}+\frac{\beta_1}{3^s}+\frac{\beta_1+\beta_4}{4^s}\right)+\ldots$$

et

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}\right)+\ldots\right]\left(\frac{\gamma_1}{1^s}+\frac{\gamma_2}{2^s}\right)\\&\quad=\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{1^s}+\frac{\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1}{2^s}+\frac{\alpha_1\gamma_1}{3^s}+\frac{\alpha_2\gamma_1+\alpha_2\gamma_2}{4^s}\right)+\ldots.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs ces deux formes ne sont pas distinctes : la série (15) se réduit à la série (16) en y faisant

$$\beta_1=\alpha_1\gamma_1,\qquad \beta_2=\alpha_1(\gamma_2-\gamma_1)+\alpha_2\gamma_1,\qquad \beta_4=(\alpha_2-\alpha_1)\gamma_1+\alpha_2\gamma_2.$$

Remarquons que la série $\chi(s)$ est première.

3e *Exemple*. — Forme générale des séries non premières de période 6 :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}&=6, & q&=1,\\ \mathrm{M}&=3, & q&=2,\\ \mathrm{M}&=2, & q&=3,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots\right)\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_2}{2^s}+\frac{\beta_3}{3^s}+\frac{\beta_6}{6^s}\right)\\&\quad=\left(\frac{\beta_1}{1^s}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2^s}+\frac{\beta_1+\beta_3}{3^s}+\frac{\beta_1+\beta_2}{4^s}+\frac{\beta_1}{5^s}+\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_6}{6^s}\right)+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}\right)+\ldots\right]\left(\frac{\gamma_1}{1^s}+\frac{\gamma_3}{3^s}\right)\\&\quad=\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{1^s}+\frac{\alpha_2\gamma_1}{2^s}+\frac{\alpha_1\gamma_1+\alpha_1\gamma_3}{3^s}+\frac{\alpha_2\gamma_1}{4^s}+\frac{\alpha_1\gamma_1}{5^s}+\frac{\alpha_2\gamma_1+\alpha_2\gamma_3}{6^s}\right)+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}+\frac{\alpha_3}{3^s}\right)+\ldots\right]\left(\frac{\delta_1}{1^s}+\frac{\delta_2}{2^s}\right)\\&\quad=\left(\frac{\alpha_1\delta_1}{1^s}+\frac{\alpha_1\delta_2+\alpha_2\delta_1}{2^s}+\frac{\alpha_3\delta_1}{3^s}+\frac{\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2}{4^s}+\frac{\alpha_2\delta_1}{5^s}+\frac{\alpha_3\delta_1+\alpha_3\delta_2}{6^s}\right)+\ldots.\end{aligned}$$

D'ailleurs la seconde série n'est qu'un cas particulier de la première; on l'obtient en faisant

$$\beta_1=\alpha_1\gamma_1,\qquad \beta_2=(\alpha_2-\alpha_1)\gamma_1,\qquad \beta_3=\alpha_1\gamma_3,\qquad \beta_6=(\alpha_2-\alpha_1)\gamma_3,\qquad \ldots.$$

D'une façon générale, si p est pair, la série obtenue, en faisant $q=2$, n'est qu'un cas particulier de celle obtenue en faisant $q=1$, puisque la série à période 2

$$\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2}{2^s}\right)+\ldots$$

est égale à

$$\zeta(s)\left(\frac{\alpha_1}{1^s}+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2^s}\right).$$

43. Le cas où la période p est un nombre premier est particulièrement simple : il faut prendre alors

$$q=1, \qquad M=p,$$

et la série est de la forme

$$\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots\right)\left(\frac{A}{1^s}+\frac{B-A}{p^s}\right)=\left[\frac{A}{1^s}+\frac{A}{2^s}+\ldots+\frac{A}{(p-1)^s}+\frac{B}{p^s}\right]+\ldots.$$

C'est la seule forme de série périodique de période p qui ne soit pas première.

En général, soit λ le nombre des diviseurs de p : il y a $\lambda-1$ formes de séries non premières, si p est impair, et $\lambda-2$ seulement si p est pair.

44. *Séries indépendantes.* — Toutes les séries périodiques de période p s'expriment linéairement en fonction de p d'entre elles, tellement choisies que le déterminant de leurs coefficients soit différent de zéro, par exemple en fonction linéaire des p séries

$$\xi_k^p(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(pn+k)^s} \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1, p).$$

Mais on peut aller plus loin. Soit d un diviseur de p,

$$p=p'd.$$

On a

$$\xi_d^p(s)+\xi_{2d}^p(s)+\ldots+\xi_{p'd}^p(s)=p'^s\,\xi_p^{p'}(s).$$

On pourra établir autant de ces relations qu'il y a de diviseurs de p, en n'y comptant pas p lui-même; car, pour $d=p$, l'égalité précédente se réduit à une identité. Donc, en désignant par λ le nombre des diviseurs de p, on aura $\lambda - 1$ équations semblables. Comme, d'ailleurs, chacune de ces équations contient une ξ que les suivantes ne contiennent pas, ces équations sont distinctes. Donc on peut exprimer les p fonctions ξ en fonction de $p - \lambda + 1$ d'entre elles, qui ne sont pas d'ailleurs $p - \lambda + 1$ quelconques d'entre elles.

Parmi ces $p - \lambda + 1$ séries, on peut en choisir $\lambda - 1$ ou $\lambda - 2$, suivant que p est pair ou impair, qui ne soient pas premières et qui s'expriment, par conséquent, par des séries de période moindre.

1er *Exemple : $p = 2$.* — Une série indépendante $\zeta(s)$.

2e *Exemple : $p = 3$.* — Deux séries indépendantes, par exemple,

$$X_1(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s}\right) + \ldots = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right),$$

$$X_2(s) = \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) + \ldots.$$

On obtient facilement

$$\xi_1^3(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots = \frac{1}{2}[X_1(s) + X_2(s)],$$

$$\xi_2^3(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{8^s} + \ldots = \frac{1}{2}[X_1(s) - X_2(s)],$$

$$\xi_3^3(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots = \frac{X_1(s)}{3^s - 1}.$$

3e *Exemple : $p = 4$.* — Deux séries indépendantes, par exemple, $\zeta(s)$ et $\chi(s)$. On trouve facilement

$$\xi_1^4(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots = \frac{\zeta(s)}{2}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + \frac{\chi(s)}{2},$$

$$\xi_2^4(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots = \zeta(s)\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{4^s}\right),$$

$$\xi_3^4(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots = \frac{\zeta(s)}{2}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) - \frac{\chi(s)}{2},$$

$$\xi_4^4(s) = \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \ldots = \frac{\zeta(s)}{4^s}.$$

4^e *Exemple* : $p = 6$. — Trois séries indépendantes, parmi lesquelles on peut choisir $\zeta(s)$ et $X_1(s)$. Etc.

45. *Cas où p est premier.* — Ce qui précède montre les simplifications qui se produisent dans le cas où p est premier. Dans ce cas, il y a $p - 1$ séries indépendantes, par exemple les suivantes

$$\chi_k^p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn+1)^s} + \frac{\alpha_k}{(pn+2)^s} + \frac{\alpha_k^2}{(pn+3)^s} + \ldots + \frac{\alpha_k^{p-1}}{(pn+p)^s}$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots, p-1, \ \alpha_k = e^{\frac{2ki\pi}{p}}\right)$$

ou bien les suivantes

$$\xi_k^p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+np)^s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1),$$

et ces séries appartiennent bien à la période p, en ce sens qu'elles ne peuvent s'exprimer en fonction de séries à période plus petite.

Nous nous bornerons donc maintenant à ce cas de p premier.

46. *Relations entre les deux systèmes de séries indépendantes.* — Il existe nécessairement entre les deux systèmes de séries χ_k et ξ_k des relations permettant d'exprimer les séries de l'un des systèmes en fonction des séries de l'autre.

Posons, pour la symétrie,

$$\chi_p^p(s) = \zeta(s), \qquad \alpha_p = 1, \qquad \xi_p^p(s) = \sum_n \frac{1}{[(n+1)p]^s}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_p &= p\xi_1,\\
\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \ldots + \alpha_p\chi_p &= p\xi_p,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
\alpha_2^{p-1}\chi_1 + \alpha_3^{p-1}\chi_2 + \ldots + \alpha_p^{p-1}\chi_p &= p\xi_2,\\
\chi_p &= p^s\xi_p,
\end{aligned}$$

Nous supprimons l'indice supérieur qui est toujours p.

Si l'on élimine χ_p et ξ_p, il reste $p - 1$ relations qui permettent d'exprimer un système de fonctions, en fonction de l'autre

47. *Relation fonctionnelle.* — On a

$$\chi_k(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{x^{s-1}}{e^{-x} - e^{\frac{2ki\pi}{p}}} dx.$$

Un pôle de la fonction sous le signe $\int$ est

$$2i\pi\left(\omega - \frac{k}{p}\right),$$

ω étant un entier quelconque, positif ou négatif, et le résidu correspondant est

$$-\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} \frac{e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{2i\pi k}{p}}}{(\omega p - k)^{1-s}}.$$

Donc

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\chi_k(s)}{\Gamma(1-s)} &= -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} e^{(s-1)\frac{i\pi}{2} - 2i\pi\frac{k}{p}} \sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega p - k)^{1-s}} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} e^{(s-1)\frac{i\pi}{2} - 2i\pi\frac{k}{p}} [\xi_{p-k}(1-s) + e^{-(s-1)i\pi}\xi_k(1-s)] \\ &= -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} e^{-\frac{2i\pi k}{p}} \left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}} \xi_{p-k}(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}} \xi_k(1-s) \right]. \end{aligned} \right.$$

On a $p-1$ relations de cette sorte, dans lesquelles, d'ailleurs, on peut ne laisser subsister que les fonctions χ ou que les fonctions ξ.

48. *La fonction $\chi_k(s)$ est holomorphe.* — On le voit immédiatement par la formule

$$\chi_k(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_C \frac{x^{s-1}}{e^{-x} - e^{\frac{2ki\pi}{p}}} dx.$$

L'intégrale reste finie, et les valeurs 1, 2, 3, ... de s qui rendent $\Gamma(1-s)$ infini annulent l'intégrale.

49. *Valeurs de ces fonctions pour s entier.* — Il est d'ailleurs facile de déduire de cette formule les valeurs de $\chi_k(s)$ lorsque s est un nombre entier négatif. En effet, dans ce cas, la fonction sous le signe $\int$ étant

uniforme, l'intégrale $= 2i\pi$, multiplié par le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de cette fonction.

On peut poser

$$\frac{1}{e^{-x} - e^{\frac{2ki\pi}{p}}} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

les coefficients A_0, A_1, ... se calculant de proche en proche par les formules

$$A_0\left(1 - e^{\frac{2ki\pi}{p}}\right) = 1,$$

$$A_1\left(1 - e^{\frac{2ki\pi}{p}}\right) - A_0 = 0,$$

$$A_2\left(1 - e^{\frac{2ki\pi}{p}}\right) - \frac{A_1}{1} + \frac{A_0}{1.2} = 0,$$

$$A_3\left(1 - e^{\frac{2ki\pi}{p}}\right) - \frac{A_2}{1} + \frac{A_1}{1.2} - \frac{A_0}{1.2.3} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

de sorte que le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{x^{s-1}}{e^{-x} - e^{\frac{2ki\pi}{p}}}$ est A_{-s}.

Donc

$$\chi_k(s) \quad = \Gamma(1-s) A_{-s},$$

c'est-à-dire

$$\chi_k(-l) = \Gamma(1+l) A_l,$$

l étant un entier positif.

Considérons la relation (17); remplaçons-y s par $-l$, il vient, d'après ce qui précède,

$$A_l = -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{-l-1} e^{-\frac{2i\pi k}{p}} \left[e^{(-l-1)\frac{i\pi}{2}} \xi_{p-k}(1+l) + e^{(l+1)\frac{i\pi}{2}} \xi_k(1+l)\right]$$

ou, séparant les parties réelles des imaginaires et posant $A_l = a_l + ib_l$,

$$a_l + ib_l = -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{-l-1} \left(\cos\frac{2k\pi}{p} - i\sin\frac{2k\pi}{p}\right)$$
$$\times \left\{\cos(l+1)\frac{\pi}{2}[\xi_k(1+l) + \xi_{p-k}(1+l)] + i\sin(l+1)\frac{\pi}{2}[\xi_k(1+l) - \xi_{p-k}(1+l)]\right\}$$

ou

$$\cos(l+1)\frac{\pi}{2}[\xi_k(1+l)+\xi_{p-k}(1+l)]+i\sin(l+1)\frac{\pi}{2}[\xi_k(1+l)-\xi_{p-k}(1+l)]$$
$$=-\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{l+1}\left(\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}\right)(a_l+ib_l),$$

d'où, changeant l en $l-1$,

$$\cos\frac{l\pi}{2}[\xi_k(l)+\xi_{p-k}(l)]=-\left(\frac{2\pi}{p}\right)^l\left(a_{l-1}\cos\frac{2k\pi}{p}-b_{l-1}\sin\frac{2k\pi}{p}\right),$$
$$\sin\frac{l\pi}{2}[\xi_k(l)-\xi_{p-k}(l)]=-\left(\frac{2\pi}{p}\right)^l\left(b_{l-1}\cos\frac{2k\pi}{p}+a_{l-1}\sin\frac{2k\pi}{p}\right).$$

Si l est pair, la première équation donne la valeur de $\xi_k(l)+\xi_{p-k}(l)$, mais la seconde ne donne pas celle de $\xi_k(l)-\xi_{p-k}(l)$, parce que les deux membres sont nuls.

Si l est impair, la première équation ne donne pas la valeur de $\xi_k(l)+\xi_{p-k}(l)$, tandis que la seconde donne celle de $\xi_k(l)-\xi_{p-k}(l)$.

Ainsi la série

$$\xi_k(s)+\xi_{p-k}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+np)^s}+\frac{1}{(p-k+np)^s}$$

s'exprime pour s pair, en fonction des transcendantes π, $\cos\frac{2k\pi}{p}$, $\sin\frac{2k\pi}{p}$.

La série

$$\xi_k(s)-\xi_{p-k}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+np)^s}-\frac{1}{(p-k+np)^s}$$

s'exprime en fonction des mêmes transcendantes pour s impair.

Ces résultats sont d'ailleurs dans Euler, qui les tire de l'égalité

$$\frac{\cos\frac{\pi(x-m)}{2n}}{\cos\frac{m\pi}{n}}=\left(1+\frac{x}{m-n}\right)\left(1-\frac{x}{n+m}\right)\left(1+\frac{x}{2n-m}\right)\left(1-\frac{x}{3n+m}\right)\cdots,$$

qui permet de trouver les fonctions symétriques des quantités

$$\frac{1}{n-m},\quad -\frac{1}{n+m},\quad \frac{1}{3n-m},\quad -\frac{1}{3n+m},\quad \ldots,$$

et par suite

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{[(2h+1)n-m]^s} + \frac{(-1)^s}{[(2h+1)n+m]^s}.$$

On peut arriver au même résultat par un calcul d'intégrale définie. On trouve facilement

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{\infty} &\frac{1}{[(2h+1)n-m]} + \frac{(-1)^s}{[(2h+1)n+m]^s}\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 (-\mathrm{L}t)^{s-1} t^{n-m+1} \frac{1+(-1)^s}{1-t^{2n}} t^{2m}\,dt.\end{aligned}$$

Appliquant à cette intégrale une méthode analogue à celle du n° 28, on obtient une relation entre la somme cherchée S, les sommes d'indices inférieurs et la valeur principale de l'intégrale

$$i^s \int_0^{\pi} \theta^{s-1} \frac{e^{-mi\theta}+(-1)^s e^{mi\theta}}{e^{-ni\theta}+e^{ni\theta}}\,d\theta.$$

Or cette intégrale est purement imaginaire, quelle que soit la valeur entière de s. Donc ce calcul donne S de proche en proche.

On pourrait de même considérer

$$S' = \sum \frac{1}{[(2h+1)n-m]^s} + \frac{(-1)^{s+1}}{[(2h+1)n+m]^s}.$$

En fonction de ces sommes s'expriment les valeurs principales des intégrales

$$i^s \int_0^{\pi} \theta^{s-1} \frac{e^{-mi\theta}+(-1)^{s+1} e^{mi\theta}}{e^{-ni\theta}-e^{ni\theta}}\,d\theta.$$

Si dans les sommes S on fait $n=p$, $\frac{p-m}{2}=k$, il vient

$$\begin{aligned}2^s S &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(hp+k)^s} + \frac{(-1)^s}{(hp+p-h)^s}\\ &= \xi_k(s)+\xi_{p-k}(s) \qquad \text{si } s \text{ est pair}\\ &= \xi_k(s)-\xi_{p-k}(s) \qquad \text{si } s \text{ est impair,}\end{aligned}$$

de sorte qu'on retrouve les résultats précédents.

50. *Exemple* : $p=3$. — Voici, par exemple, les calculs développés dans le cas simple de $p=3$:

$$\alpha_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \alpha_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}},$$

$$\chi_1(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{\alpha_1}{2^s} + \frac{\alpha_2}{3^s}\right) + \ldots,$$

$$\chi_2(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_1}{3^s}\right) + \ldots,$$

$$\chi_3(s) = \zeta(s);$$

$$\xi_1(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

$$\xi_2(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots,$$

$$\xi_3(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots = \frac{\zeta(s)}{3^s}.$$

Relations entre les χ et les ξ :

$$\begin{aligned}
\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 &= 3\xi_1,\\
\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \chi_3 &= 3\xi_3,\\
\alpha_2\chi_1 + \alpha_1\chi_2 + \chi_3 &= 3\xi_2,\\
\chi_3 &= 3^s\xi_3,
\end{aligned}$$

d'où

$$\xi_1 = \tfrac{1}{3}(\chi_1 + \chi_2) + \frac{3^{s-2}}{1-3^{s-1}}(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2),$$

$$\xi_2 = \tfrac{1}{3}(\alpha_2\chi_1 + \alpha_1\chi_2) + \frac{3^{s-2}}{1-3^{s-1}}(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2)$$

et

$$\chi_1 = \frac{1}{3^s - 1}\left\{[(1-\alpha_2) + 3^s\alpha_2]\,\xi_1 + [(1-\alpha_1) + 3^s\alpha_1]\,\xi_2\right\},$$

$$\chi_2 = \frac{1}{3^s - 1}\left\{[(1-\alpha_1) + 3^s\alpha_1]\,\xi_1 + [(1-\alpha_2) + 3^s\alpha_2]\,\xi_2\right\}.$$

Relations fonctionnelles :

$$\frac{\alpha_1\chi_1(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_2(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_1(1-s)\right],$$

$$\frac{\alpha_2\chi_2(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_1(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_2(1-s)\right].$$

Remarquons qu'on peut donner à ces relations une forme plus simple. Pour cela, ajoutons-les et retranchons-les.

Posant

$$\xi_1 + \xi_2 = X_1(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s}\right) + \ldots,$$

$$\xi_1 - \xi_2 = X_2(s) = \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 = \left(-\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{2}{3^s}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3(1-3^{s-1})}{3^s-1} X_1(s),$$

$$\alpha_1\chi_1 - \alpha_2\chi_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\left[\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) + \ldots\right] = (\alpha_1 - \alpha_2) \quad X_2(s).$$

Les relations deviennent alors

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\,\frac{3(1-3^{s-1})}{3^s-1} X_1(s) = \quad 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{s-1} \cos(s-1)\,\frac{\pi}{2}\, X_1(1-s),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\Gamma(1-s)} X_2(s) = -\,2\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{s-1} \sin(s-1)\,\frac{\pi}{2}\, X_2(1-s).$$

Sous cette forme chacune des relations ne contient plus qu'une fonction. La première n'est autre que la relation connue entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, car

$$X_1(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right),$$

mais la seconde est nouvelle. Elle peut s'exprimer en disant que la fonction

$$X_2(s)\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

ne change pas par le changement de s en $1-s$.

15. Appliquant à ces fonctions X_1, X_2 les calculs du n° 49, on trouve

pour s entier

$$X_1(s)+\frac{(-1)^{s-1}i^{s+1}}{1.2\ldots(s-1)}\left(\mathrm{VP}\int_0^{\pi}\frac{\theta^{s-1}\cot\frac{\theta}{2}}{1+2\cos\theta}d\theta\right)+\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)X_1(s)$$

$$-\frac{i\pi}{s}\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)X_1(s-1)+\frac{(i\pi)^2}{s(s-1)}\left(1-\frac{1}{2^{s-3}}\right)X_1(s-2)+\ldots$$

$$+(-1)^{s-2}\frac{(i\pi)^{s-2}}{s(s-1)\ldots3}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)X_1(2)$$

$$+\frac{(-1)^{s+1}(i\pi)^{s-1}\frac{2}{3}\mathrm{L}2-\frac{\pi i}{3}\left(-\frac{2i\pi}{3}\right)^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}=0;$$

$$X_2(s)+\frac{(-1)^{s-1}i^{s}}{1,2\ldots(s-1)}\left(\mathrm{VP}\int_0^{\pi}\frac{\theta^{s-1}d\theta}{1+2\cos\theta}d\theta\right)+\left(1+\frac{1}{2^{s-1}}\right)X_2(s)$$

$$-\left(\frac{i\pi}{s}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s-2}}\right)X_2(s-1)+\ldots+(-1)^{s-2}\frac{(i\pi)^{s-2}}{s(s-1)\ldots3}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)X_2(2)$$

$$+\frac{(-1)^{s+1}(i\pi)^{s-1}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2i\pi}{3}\right)^{s-1}}{1.2\ldots(s-1)}=0,$$

qui permettent d'exprimer $X_1(s)$ lorsque s est pair et X_2 lorsque s est impair, et aussi les valeurs de

$$\mathrm{VP}\int_0^{\pi}\frac{\theta^{s-1}\cot\frac{\theta}{2}}{1+2\cos\theta}d\theta$$

en fonction des sommes X_1, et celles de

$$\int_0^{\pi}\frac{\theta^{s-1}d\theta}{1+2\cos\theta}d\theta$$

en fonction des sommes X_2.

Exemples :

$$X_2(1)=\int_0^1\frac{1-t}{1-t^3}dt=\frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$X_2(3)=\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}.$$

52. *Zéros de* $X_2(s)$. — Par la considération de la relation fonctionnelle, on voit que $X_2(s)$ admet pour zéros les nombres impairs négatifs, et d'autres zéros α tels que $1-\alpha$ soit aussi un zéro.

On a

$$X_2(s) = \prod \frac{1}{1 \pm \frac{1}{p^s}},$$

p désignant tous les nombres premiers excepté 3, et prenant le signe $+$ si $p \equiv 1 \pmod 3$, le signe $-$ si $p \equiv -1 \pmod 3$.

53. *Généralisation pour p nombre premier quelconque.* — Ceci nous conduit naturellement à chercher s'il existe pour p, nombre premier quelconque, des séries analogues à X_1 et X_2, c'est-à-dire jouissant d'une relation fonctionnelle analogue à la relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$.

Pour cela, considérons la série la plus générale

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1}{(pn+1)^s} + \frac{a_2}{(pn+2)^s} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(pn+p-1)^s}.$$

Si dans l'équation (17) on fait successivement $k = 1, 2, \ldots, p-1$ et que l'on ajoute après avoir multiplié respectivement par

$$a_1\alpha_1, \quad a_2\alpha_1^2, \quad \ldots, \quad a_{p-1}\alpha_1^{p-1},$$

il vient

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1-s)} \sum \Bigg[\frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_1^{p-1}}{1^s} + \frac{a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_2^{p-1}}{2^s} + \ldots \\ &\qquad + \frac{a_1\alpha_{p-1} + a_2\alpha_{p-1}^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_{p-1}^{p-1}}{(p-1)^s} + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}}{p^s} \Bigg] \\ &= \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}} \sum \left[\frac{a_{p-1}}{1^{1-s}} + \frac{a_{p-2}}{2^{1-s}} + \ldots + \frac{a_1}{(p-1)^{1-s}} \right] \\ &\qquad + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}} \sum \left[\frac{a_1}{1^{1-s}} + \frac{a_2}{2^{1-s}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(p-1)^{1-s}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cherchons à déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ de sorte que

$$
(19)\left\{\begin{array}{ll}
(\alpha) & \dfrac{a_1}{a_{p-1}} = \dfrac{a_2}{a_{p-2}} = \ldots = \dfrac{a_{p-1}}{a_1}, \\[2ex]
(\beta) & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_1^{p-1}}{a_1} \\[2ex] \quad = \dfrac{a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_2^{p-1}}{a_2} = \ldots = \dfrac{a_1\alpha_{p-1}\, a_2\alpha_{p-1}^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_{p-1}^{p-1}}{a_{p-1}}, \end{array}\right. \\[2ex]
(\gamma) & a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = 0.
\end{array}\right.
$$

Si ces conditions sont remplies, on voit que l'équation (18) ne contiendra plus que $F(s)$. Elle donnera une relation entre $F(s)$ et $F(1-s)$.

54. Voici une première solution des équations (19) qui se présente. On satisfait à ces équations en posant

$$a_h = \left(\frac{h}{p}\right).$$

On sait, en effet, d'après Gauss que

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) e^{h\frac{2ki\pi}{p}} = \left(\frac{k}{p}\right) i^{\frac{1}{4}(p-1)^2} \sqrt{p}.$$

La valeur commune aux rapports [β(19)] sera alors $i^{\frac{1}{4}(p-1)^2}\sqrt{p}$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
&+\sqrt{p} \text{ si } p \equiv 1 \pmod 4, \\
&+i\sqrt{p} \text{ si } p \equiv -1 \pmod 4.
\end{aligned}
$$

Ces valeurs trouvées pour les coefficients a_p satisfont, d'ailleurs, à toutes les conditions (19) comme on le voit facilement.

Par suite, la fonction

$$
(20) \qquad F(s) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{p}\right)}{(pn+1)^s} + \frac{\left(\frac{2}{p}\right)}{(pn+2)^s} + \ldots + \frac{\left(\frac{p-1}{p}\right)}{(pn+p-1)^s}
$$

satisfait à la relation

$$i^{\frac{1}{4}(p-1)^2}\sqrt{p}\,\frac{\mathrm{F}(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}\left[i^{p-1}e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}} + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\right]\mathrm{F}(1-s)$$

ou

$$i^{\frac{(p-1)(p-3)}{4}}\sqrt{p}\,\frac{\mathrm{F}(s)}{\Gamma(1-s)} = 2\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}\cos\left(s+\frac{p-3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(1-s),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{p}\,\frac{\mathrm{F}(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(s) \quad \text{si } p \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\sqrt{p}\,\frac{\mathrm{F}(s)}{\Gamma(1-s)} = -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2\sin(s-1)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(s) \quad \text{si } p \equiv -1 \pmod 4,$$

relations qu'on peut encore exprimer en disant que

$$\mathrm{F}(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{dans le cas de } p \equiv 1 \pmod 4$$

ou

$$\mathrm{F}(s)\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{dans le cas de } p \equiv -1 \pmod 4$$

ne change pas par le changement de s en $1-s$ (¹).

On établit facilement les valeurs de ces fonctions pour s entier positif et pair si $p \equiv 1 \pmod 4$, s entier positif et impair si $p \equiv -1 \pmod 1$.

On trouve aussi les zéros de ces fonctions qui sont les entiers négatifs pairs dans le premier cas, les entiers négatifs impairs dans le second.

(¹) Considérons les séries de M. Hurwitz (*voir* l'Introduction)

$$\frac{1}{1-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}\sum\left(\frac{p}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$

étendue aux valeurs impaires de n, non divisibles par p. Lorsque $p \equiv 1 \pmod 4$, cette série est identique à la nôtre $\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n^s}$. Mais si $p \equiv -1 \pmod 4$, la série de M. Hurwitz $\sum\left(\frac{p}{n}\right)\frac{1}{n^s}$ a comme période $2p$.

55. *Comparaison avec les séries de Dirichlet.* — Il vient assez naturellement à l'esprit de comparer ces séries à celles qu'a employées Lejeune-Dirichlet pour la démonstration de son beau théorème sur la progression arithmétique.

Soit g une racine primitive de p. Soit ν l'indice d'un nombre entier n, cette racine primitive étant prise pour base. Soit ω une racine de l'équation $x^{p-1}-1=0$. Ces séries sont

$$\sum \frac{\omega^\nu}{p^s};$$

g étant choisie, l'équation $x^{p-1}-1=0$ a $p-1$ racines, ce qui donne $p-1$ séries de cette forme. Je dis d'ailleurs que, si l'on considérait une autre racine primitive g', elle donnerait les mêmes séries.

En effet, on a

$$g' \equiv g^a \pmod{p}.$$

Donc soit ν l'indice de n dans le système de base g;
» ν' » dans le système de base g'.

On a

$$a\nu' \equiv \nu \pmod{p-1}.$$

Donc

$$\sum \frac{\omega^\nu}{n^s} = \sum \frac{(\omega^a)^{\nu'}}{n^s},$$

et l'on voit que la série $\sum \frac{\omega^\nu}{n^s}$ est la même que celle qui, dans le second système, aurait été formée avec la racine ω^a.

Les séries (20) sont des cas particuliers des séries de Dirichlet; car, pour $\omega=-1$, la série de Dirichlet se réduit à

$$\sum \frac{(-1)^\nu}{p^s} = \sum \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{n^s}.$$

Maintenant on peut se demander si les autres séries de Dirichlet satisfont aux conditions (19). Mais il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi, et qu'il n'y a que les séries correspondant à $\omega=\pm 1$ qui y satisfassent. En effet, on doit avoir

$$\frac{\omega^{\text{ind}.1}\alpha_1+\omega^{\text{ind}.2}\alpha_1^2+\ldots+\omega^{\text{ind}.(p-1)}\alpha_1^{p-1}}{\omega^{\text{ind}.1}}=\frac{\omega^{\text{ind}.1}\alpha_2+\omega^{\text{ind}.2}\alpha_2^2+\ldots}{\omega^{\text{ind}.2}}=\ldots$$

ou

$$\frac{\omega\alpha^g+\omega^2\alpha^{g^2}+\ldots+\omega^{p-1}\alpha^{g^{p-1}}}{\omega}=\frac{\omega\alpha^{g^2}+\ldots+\omega^{p-1}\alpha^g}{\omega^2}=\ldots$$

ou

$$\alpha^g+\omega\alpha^{g^2}+\ldots+\omega^{p-2}\alpha^{g^{p-1}}=\omega^{p-3}(\alpha^g+\omega\alpha^{g^2}+\ldots);$$

d'où

$$\omega^{p-3}=1.$$

Comme

$$\omega^{p-1}=1,$$

il en résulte

$$\omega^2=1,$$

d'où

$$\omega=\pm 1 \quad (^1).$$

56. Il reste donc maintenant à trouver toutes les séries qui satisfont aux conditions (19).

Pour cela égalons les rapports (19_β) à S, il vient

$$\frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_1^2+\ldots+a_{p-1}\alpha_1^{p-1}}{a_1}=\frac{a_1\alpha_2+a_2\alpha_2^2+\ldots+a_{p-1}\alpha_2^{p-1}}{a_{p-1}}=\ldots$$
$$=\frac{a_1\alpha_{p-1}+a_2\alpha_{p-1}^2+\ldots+a_{p-1}\alpha_{p-1}^{p-1}}{a_{p-1}}=\mathrm{S}$$

---

(1) Les séries $\sum\frac{\omega^\nu}{n^s}$ donnent lieu à l'identité

$$\sum\frac{\omega^\nu}{n^s}=\prod\frac{1}{1-\frac{\omega^\pi}{q^s}}$$

q désignant tous les nombres premiers, excepté p, et π étant l'indice de q. On démontre, d'ailleurs, facilement que ces séries sont les seules parmi les séries de période p qui ouissent de la propriété

$$\sum\frac{\alpha_n}{n^s}=\prod\frac{1}{1-\frac{\alpha_p}{p^s}}.$$

ou

$$(21)\quad \begin{cases} a_1(\alpha_1 - S) + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha_1^{p-1} = 0, \\ a_1\alpha_2 + a_2(\alpha_2^2 - S) + \ldots + a_{p-1}\alpha_2^{p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1\alpha_{p-1} + a_2\alpha_{p-1}^2 + \ldots + a_{p-1}(\alpha_{p-1}^{p-1} - S) = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc pour déterminer S l'équation

$$\varphi(S) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - S & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \ldots & \alpha_1^{p-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 - S & \alpha_2^3 & \ldots & \alpha_2^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p-1} & \alpha_{p-1}^2 & \ldots & \ldots & \alpha_{p-1}^{p-1} - S \end{vmatrix} = 0.$$

57. Pour résoudre cette équation je remarque qu'on peut l'écrire sous la forme suivante. Soit g une racine primitive de p

$$(22)\quad \varphi(S) = \begin{vmatrix} \alpha_1^g - S & \alpha_1^{g^2} & \ldots & \alpha_1^{g^{p-1}} \\ \alpha_1^{g^2} & \alpha_1^{g^3} - S & \ldots & \alpha_1^g \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{g^{p-1}} & \alpha_1^g & \ldots & \alpha_1^{g^{p-2}} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, cette équation est un cas particulier de l'équation suivante

$$\psi(S) = \begin{vmatrix} a - S & b & c & \ldots & h & k & l \\ b & c - S & d & \ldots & k & l & a \\ . & \ldots & . & \ldots & . & . & .. \\ l & a & b & \ldots & . & h & k - S \end{vmatrix} = 0.$$

La décomposition d'un tel déterminant a été donnée par M. Glaisher, sans démonstration, dans les *Comptes rendus de la Société pour l'avancement des Sciences* (1877). Voici comment on peut y arriver. On a

$$\psi(-S) = \begin{vmatrix} a + S & b & c & \ldots & h & k & l \\ b & c + S & d & \ldots & k & l & a \\ . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\ l & a & . & \ldots & . & h & k + S \end{vmatrix},$$

d'où

$$\psi(S)\psi(-S) = \begin{vmatrix} H - S^2 & H' & H'' & \ldots & H^{(n-1)} \\ H^{(n-1)} & H - S^2 & H' & \ldots & H^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H' & H'' & \ldots & \ldots & H - S^2 \end{vmatrix},$$

n désignant l'ordre du déterminant, H désignant la somme

$$a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2,$$

et $\mathrm{H}^{(k)}$ la somme des produits de chaque quantité a, b, c, l par celle qui la suit k rangs plus loin, et où il faut remarquer que

$$\mathrm{H}^{(k)}=\mathrm{H}^{(n-k)};$$

$\psi(\mathrm{S})\psi(-\mathrm{S})$ est donc un déterminant tournant. On voit, par suite, qu'on a

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{S})\psi(-\mathrm{S}) &= \prod(\mathrm{H}-\mathrm{S}^2+\omega\mathrm{H}'+\omega^2\mathrm{H}''+\ldots+\omega^{n-1}\mathrm{H}^{(n-1)}) \\ &= \prod\left[(a+\omega b+\omega^2 c+\ldots+\omega^{n-1}l)\left(a+\frac{b}{\omega}+\frac{c}{\omega^2}+\ldots+\frac{l}{\omega^{n-1}}\right)-\mathrm{S}^2\right],\end{aligned}$$

le signe $\prod$ s'étendant à toutes les racines de l'équation

$$\omega^n-1=0.$$

Les n valeurs de S^2 sont donc données par la formule

$$\mathrm{S}^2=(a+\omega b+\omega^2 c+\ldots+\omega^{n-1}l)\left(a+\frac{b}{\omega}+\frac{c}{\omega^2}+\ldots+\frac{l}{\omega^{n-1}}\right).$$

Ces valeurs sont, d'ailleurs, deux à deux égales, excepté celle qui correspond à $\omega=+1$ et celle qui correspond à $\omega=-1$, cette dernière n'existant que si n est pair.

Par suite les racines de $\psi(\mathrm{S})$ sont données par n expressions de la forme

$$\pm\sqrt{(a+\omega b+\omega^2 c+\ldots+\omega^{n-1}l)\left(a+\frac{b}{\omega}+\frac{c}{\omega^2}+\ldots+\frac{l}{\omega^{n-1}}\right)},$$

dans laquelle on donne à ω ses n valeurs et devant lesquelles il reste à choisir le signe.

Or, je dis qu'on a

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}\psi(\mathrm{S})=&[\mathrm{S}-(a+b+\ldots+l)][\mathrm{S}-(a-b+c+\ldots+k-l)] \\ &\times\prod{}'\left[\mathrm{S}^2-(a+\omega b+\ldots+\omega^{n-1}l)\left(a+\frac{b}{\omega}+\ldots+\frac{l}{\omega^{n-1}}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

si n est pair, et

$$(24)\quad \begin{cases} \psi(S) = [S-(a+b+\ldots+l)] \\ \qquad\qquad \times \prod' \left[S^2 - (a+\omega b+\ldots+\omega^{n-1} l)\left(a+\frac{b}{\omega}+\frac{e}{\omega^2}+\ldots+\frac{l}{\omega^{n-1}}\right)\right], \end{cases}$$

si n est impair, le signe $\prod'$ s'étendant aux racines ω, de façon que ω et $\frac{1}{\omega}$ parcourent toutes les racines excepté ± 1. Autrement dit, à part la racine $a+b+\ldots+l$ et la racine $a-b+\ldots+k-l$, qui n'existe que si n est pair, toutes les autres racines sont deux à deux égales et de signes contraires.

En effet, donnons à $a, b, c, \ldots, k, l$ les valeurs particulières

$$a=1, \qquad b=0, \qquad c=0, \qquad \ldots, \qquad k=0, \qquad l=0.$$

Alors

$$\psi(S) = \begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 & \ldots & . & 0 \\ 0 & -S & 0 & \ldots & . & 1 \\ . & \ldots & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -S & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -S \end{vmatrix} = (1-S) \begin{vmatrix} -S & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & -S & \ldots & 1 & 0 \\ . & \ldots & \ldots & . & . \\ 0 & 1 & \ldots & -S & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -S \end{vmatrix}$$

$$= (1-S) \begin{vmatrix} 1-S & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1-S & \ldots & 1 & 0 \\ . & \ldots\ldots & \ldots & . & . \\ 0 & 1-S & \ldots & -S & 0 \\ 1-S & 0 & \ldots & 0 & -S \end{vmatrix}$$

$$= (1-S) \begin{vmatrix} 1-S & 0 & .\,. & 0 & 1 \\ 0 & 1-S & \ldots & 1 & 0 \\ . & \ldots\ldots & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -S-1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -S-1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-S)(1-S)^{\left|\frac{n}{2}\right|}(1+S)^{n-1-\left|\frac{n}{2}\right|},$$

$\left|\frac{n}{2}\right|$ désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$, ce qui vérifie la décomposition annoncée dans ce cas particulier.

Cette décomposition, ayant lieu pour certaines valeurs réelles de a, b, ..., l, aura lieu pour des valeurs réelles voisines, car les racines ne peuvent sauter brusquement du positif au négatif. Les égalités (23) et (24) étant vraies pour une infinité de valeurs de a, b, ..., l sont des identités, par suite elles sont vraies pour toutes valeurs de a, b, ..., l, les deux membres étant entiers en a, b, ..., l.

58. Revenons maintenant à l'équation (22). Ici $n = p - 1$ est pair; on voit alors que les racines sont

$$\alpha^{g} + \alpha^{g^2} + \ldots + \alpha^{g^{p-1}},$$
$$\alpha^{g} - \alpha^{g^2} - \ldots - \alpha^{g^{p-1}}$$

et

$$\pm\sqrt{(\alpha^{g} + \omega\alpha^{g^2} + \ldots + \omega^{p-1}\alpha^{g^{p-1}})\left(\alpha^{g} + \frac{\alpha^{g^2}}{\omega} + \ldots + \frac{\alpha^{g^{p-1}}}{\omega^{p-1}}\right)}.$$

D'ailleurs

$$\alpha^{g} + \alpha^{g^2} + \ldots + \alpha^{g^{p-1}} = -1,$$
$$\alpha^{g} - \alpha^{g^2} - \ldots - \alpha^{g^{p-1}} = i^{\frac{1}{4}(p-1)^2}\sqrt{p} = \begin{cases} +\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4, \\ +i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}(\alpha^{g} + \omega\alpha^{g^2} + \ldots + \omega^{p-1}\alpha^{g^{p-1}})&\left(\alpha^{g} + \frac{\alpha^{g^2}}{\omega} + \ldots + \frac{\alpha^{g^{p-1}}}{\omega^{p-1}}\right)\\ &= \mathrm{H} + \omega\mathrm{H}' + \ldots + \omega^{p-1}\mathrm{H}^{(p-1)}\\ &= -1 - \omega - \omega^2 - \ldots - \omega^{\frac{p-1}{2}-1} + (p-1)\omega^{\frac{p-1}{2}} - \omega^{\frac{p-1}{2}+1} - \ldots - \omega^{p-1}\\ &= p\,\omega^{\frac{p-1}{2}} = \pm p,\end{aligned}$$

suivant que $\omega^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.

Donc, finalement, les racines de $\varphi(\mathrm{S})$ sont

$$-1,$$
$$i^{\frac{1}{4}(p-1)^2}\sqrt{p},$$
$$\left.\begin{matrix}+\sqrt{p}\\ -\sqrt{p}\end{matrix}\right\}\text{aux mêmes degrés de multiplicité,}$$
$$\left.\begin{matrix}+i\sqrt{p}\\ -i\sqrt{p}\end{matrix}\right\}\text{aux mêmes degrés de multiplicité.}$$

La somme des degrés de multiplicité des racines $\pm i\sqrt{p}$ est $\frac{p-1}{2}$.

La somme des degrés de multiplicité des racines $\pm\sqrt{p}$ est $\frac{p-1}{2}-1$, *en y comptant la racine* $i^{\frac{1}{4}(p-1)^2}\sqrt{p}$.

L'équation (22) est donc complètement résolue.

59. Considérons d'abord la racine -1. Étant simple, elle n'annule pas tous les mineurs du déterminant (22) : donc elle donne pour $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ un système unique de valeurs, qui est d'ailleurs

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1}.$$

Ce système de valeurs ne satisfait pas à la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = 0;$$

mais il correspond à la fonction

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^s} = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

pour laquelle on trouve facilement une relation fonctionnelle.

60. Considérons maintenant les racines $\pm\sqrt{p}$, $\pm i\sqrt{p}$.

A l'une de ces racines correspond au moins un système de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$.

Ces valeurs satisfont à la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = 0;$$

car ajoutons les équations (21), nous obtenons

$$(S+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}) = 0,$$

et puisque $S \neq -1$,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = 0.$$

61. Plus généralement, le premier membre de l'équation en S étant un déterminant symétrique, soient S, S' deux racines différentes de cette équation, soient

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, \\ a'_1, & a'_2, & \ldots, & a'_p \end{array}$$

deux systèmes de valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, correspondant respectivement à S et à S', on a, d'après une propriété connue des équations de cette forme,

$$a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots + a_p a'_p = 0.$$

62. Je dis maintenant que les valeurs trouvées pour $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ satisfont aussi aux conditions (19_α).

En effet, ces équations expriment que les deux coefficients a_k et a_{p-k} sont égaux ou égaux et de signes contraires. Or il est visible que, si dans les équations (21) on fait $a_k = a_{p-k}$, deux équations équidistantes des extrêmes deviennent identiques à cause de

$$\alpha_k^l = \alpha_{p-k}^{p-l},$$

et qu'il reste $\frac{p-1}{2}$ équations pour déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, à savoir

$$5)\ \left\{\begin{array}{l} a_1(\alpha_1 + \alpha_1^{p-1} - S) + a_2(\alpha_1^2 + \alpha_1^{p-2}) + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_1^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_1^{\frac{p-1}{2}+1}\right) = 0, \\ a_1(\alpha_2 + \alpha_2^{p-1}) + a_2(\alpha_2^2 + \alpha_2^{p-2} - S) + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_2^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_2^{\frac{p-1}{2}+1}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}} + \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-1}\right) + a_2\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}}^2 + \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-2}\right) + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_{\frac{p-2}{2}}^{\frac{p-1}{2}+1} - S\right) = 0. \end{array}\right.$$

De même, si l'on fait, dans ces équations (21),

$$a_k = - a_{p-k},$$

elles se réduisent encore à $\frac{p-1}{2}$, à savoir

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
a_1(\alpha_1 - \alpha_1^{p-1} - \mathrm{S}) & + a_2(\alpha_1^2 - \alpha_1^{p-2}) & + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_1^{\frac{p-1}{2}} - \alpha_1^{\frac{p-1}{2}+1}\right) & = 0, \\
a_1(\alpha_2 - \alpha_2^{p-1}) & + a_2(\alpha_2^2 - \alpha_2^{p-2} - \mathrm{S}) & + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_2^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_2^{\frac{p-1}{2}+1}\right) & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\
a_1\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}} - \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-1}\right) & + a_2\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}}^2 - \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-2}\right) & + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}\left(\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} - \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}+1} - \mathrm{S}\right) & = 0.
\end{array}
\right.
$$

Donc les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ satisfont à toutes les conditions.

63. *Remarque*. — Des équations (25) on déduit pour déterminer S l'équation de degré $\frac{p-1}{2}$,

$$
\varphi_1(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix}
\alpha_1 + \alpha_1^{p-1} - \mathrm{S} & \alpha_1^2 + \alpha_1^{p-2} & \ldots & \alpha_1^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_1^{\frac{p-1}{2}+1} \\
\alpha_2 + \alpha_2^{p-1} & \alpha_2^2 + \alpha_2^{p-1} - \mathrm{S} & \ldots & \alpha_2^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_2^{\frac{p-1}{2}+1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\alpha_{\frac{p-1}{2}} + \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-1} & \ldots\ldots & \ldots & \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} + \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}+1} - \mathrm{S}
\end{vmatrix} = 0,
$$

et des équations (26), l'équation

$$
\varphi_2(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix}
\alpha_1 - \alpha_1^{p-1} - \mathrm{S} & \alpha_1^2 - \alpha_1^{p-2} & \ldots & \alpha_1^{\frac{p-1}{2}} - \alpha_1^{\frac{p-1}{2}+1} \\
\alpha_2 - \alpha_2^{p-1} & \alpha_2^2 - \alpha_2^{p-1} - \mathrm{S} & \ldots & \alpha_2^{\frac{p-1}{2}} - \alpha_2^{\frac{p-1}{2}+1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\alpha_{\frac{p-1}{2}} - \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{p-1} & \ldots\ldots & \ldots & \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} - \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}+1} - \mathrm{S}
\end{vmatrix} = 0,
$$

Ce qui montre que l'équation (22) doit se décomposer en ces deux-là. La décomposition est, en effet, facile à faire.

De plus, en formant $\varphi_1(S)\varphi_1(-S)$, on trouve

$$\varphi_1(S)\varphi_1(-S)=(S^2-1)(S^2-p)^{\frac{p-1}{2}-2}$$

et de même

$$\varphi_2(S)\varphi_2(-S)=(S^2+p)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Donc ce sont $\pm\sqrt{p}$ qui donnent, pour $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, des systèmes de valeurs dans lesquels $a_k=a_{p-k}$, et les racines $\pm i\sqrt{p}$ qui donnent des systèmes de valeurs dans lesquels $a_k=-a_{p-k}$.

64. Ces valeurs sont réelles. En effet, si, dans les équations (19_β), on change i en $-i$, ce qui revient à changer α_k en α_{p-k}, on obtient

$$\frac{a_{p-1}\alpha_1+a_{p-2}\alpha_1^2+\ldots+a_1\alpha_1^{p-1}}{a_1}=\frac{a_{p-1}\alpha_2+a_{p-2}\alpha_2^2+\ldots+a_1\alpha_2^{p-1}}{a_2}=\ldots$$

Les systèmes de solutions de ce système dans lesquels $a_k=a_{p-k}$ sont communs avec le système

$$\frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_1^2+\ldots+a_{p-1}\alpha_1^{p-1}}{a_1}=\frac{a_1\alpha_2+\ldots+a_{p-1}\alpha_2^{p-1}}{a_2}=\ldots,$$

qui est le système (19_β).

Donc les solutions n'ont pas changé par le changement de i en $-i$, donc elles sont réelles.

On verrait de même que les systèmes de solutions correspondant à $a_k=-a_{p-k}$ changent de signe par le changement de i en $-i$. Donc elles sont purement imaginaires, et, comme d'ailleurs on peut prendre pour $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ des valeurs proportionnelles, on peut dire qu'elles sont réelles.

65. On obtient ainsi $p-1$ séries jouissant d'une relation fonctionnelle. En effet, pour $p\leqq 5$, l'équation en S n'a pas de racines multiples.

Pour $p>5$, l'équation en S a des racines multiples. Ces racines, d'après une propriété connue des équations de cette forme, annulent tous les mineurs du déterminant (22). Donc à ces racines multiples correspondent une infinité de systèmes de valeurs de a_1, $a_2, \ldots, a_{p-1}$, dont k sont linéairement indépendants, en désignant par k l'ordre de multiplicité de la racine S. Ces k systèmes donnent k séries linéairement indépendantes. En tout on trouve donc $p-1$ de ces séries.

Les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ une fois déterminés, on obtient une série $F(s)$ qui, si $S = \pm\sqrt{p}$, satisfait à

$$\frac{S\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}F(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}F(1-s)\right]$$
$$= \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s).$$

Si $S = \pm i\sqrt{p}$, la fonction F satisfait à

$$\frac{S\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}\left[-e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}F(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}F(1-s)\right]$$
$$= -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2i\sin(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s).$$

66. *Remarque*. — De

$$\frac{S\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s),$$

on déduit, en changeant s en $1-s$,

$$\frac{S\,F(1-s)}{\Gamma(s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{-s} 2\cos\frac{s\pi}{2}F(s).$$

Multiplions membres à membres

$$(S^2-p)F(s)F(1-s) = 0,$$

d'où

$$S^2 - p = 0, \qquad S = \pm\sqrt{p}.$$

De la relation

$$\frac{S\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1} 2i\sin(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s),$$

on déduirait de même

$$S = \pm i\sqrt{p},$$

ce qui prouve d'une façon détournée que l'équation en S n'a, outre la racine -1, que les racines $\pm\sqrt{p}$, $\pm i\sqrt{p}$.

Premier exemple : Le cas de $p=3$ a déjà été traité.

Deuxième exemple : $p=5$.

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}};$$

$$\varphi_1(S) = \begin{vmatrix} -1-S & \alpha^2+\alpha^3 \\ -1-S & \alpha^4+\alpha-S \end{vmatrix}$$

a pour racines

$$-1 \quad \text{et} \quad \alpha-\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4 = \sqrt{5};$$

$$\varphi_2(S) = \begin{vmatrix} \alpha^4-\alpha-S & \alpha^2-\alpha^4 \\ \alpha^2-\alpha^3 & \alpha-\alpha^4-S \end{vmatrix}$$

a pour racines

$$\pm i\sqrt{5}.$$

Toutes ces racines sont simples et l'on trouve facilement :

Pour $S = +\sqrt{5}$, la série

$$\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\right)+\ldots,$$

qui satisfait à

$$\frac{\sqrt{5}\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{5}\right)^{s-1} 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s);$$

pour $S = +i\sqrt{5}$, la série

$$\left(\frac{2\sin\frac{4\pi}{5}}{1^s}+\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}+\sqrt{5}}{2^s}-\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}+\sqrt{5}}{3^s}-\frac{2\sin\frac{4\pi}{5}}{4^s}\right)+\ldots,$$

qui satisfait à

$$\frac{\sqrt{5}\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = -\left(\frac{2\pi}{5}\right)^{s-1} 2\sin(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s);$$

pour $S = -i\sqrt{5}$, la série

$$\left(\frac{2\sin\frac{4\pi}{5}}{1^s} + \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}-\sqrt{5}}{2^s} - \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}-\sqrt{5}}{3^s} - \frac{2\sin\frac{4\pi}{5}}{4^s}\right)+\ldots,$$

qui satisfait à

$$\frac{\sqrt{5}\,F(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{5}\right)^{s-1} 2\sin(s-1)\frac{\pi}{2}F(1-s).$$

Troisième exemple : $p = 7$.

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{7}};$$

$$\varphi_1(S) = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha^6-S & \alpha^2+\alpha^5 & \alpha^3+\alpha^4 \\ \alpha^2+\alpha^5 & \alpha^4+\alpha^3-S & \alpha^6+\alpha \\ \alpha^3+\alpha^4 & \alpha^6+\alpha & \alpha^2+\alpha^5-S \end{vmatrix}$$

$$= -(1+S)\begin{vmatrix} \alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha^5-S & \alpha^6+\alpha-\alpha^2-\alpha^5 \\ \alpha^6+\alpha-\alpha^3-\alpha^4 & \alpha^2+\alpha^5-\alpha^3-\alpha^4-S \end{vmatrix}$$

a pour racines

$$-1 \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{7},$$

qui sont simples.

$$\varphi_2(S) = \begin{vmatrix} \alpha-\alpha^6-S & \alpha^2-\alpha^5 & \alpha^3-\alpha^4 \\ \alpha^2-\alpha^5 & \alpha^4-\alpha^3-S & \alpha^6-\alpha \\ \alpha^3-\alpha^4 & \alpha^6-\alpha & \alpha^2-\alpha^5-S \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha^2-\alpha^5-\alpha^6+\alpha-\alpha^3+\alpha^4-S)\begin{vmatrix} \alpha^4-\alpha^3+\alpha^6-\alpha-S & \alpha^2+\alpha^5+\alpha^6-\alpha \\ \alpha^2-\alpha^5+\alpha^3+\alpha^4 & \alpha-\alpha^6+\alpha^3-\alpha^4-S \end{vmatrix}$$

a pour racines

$-i\sqrt{7}$, racine simple,

$+i\sqrt{7}$, racine double,

Les racines simples donnent : la racine $+\sqrt{7}$

$$\left[\frac{(1+\sqrt{7})\cos\frac{6\pi}{7}-1}{1^s}+\frac{(1+\sqrt{7})\cos\frac{2\pi}{7}-1}{2^s}-\frac{(1+\sqrt{7})\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)-2}{3^s}\right.$$
$$\left.-\frac{(1+\sqrt{7})\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)-2}{4^s}+\frac{(1+\sqrt{7})\cos\frac{2\pi}{7}-1}{5^s}+\frac{(1+\sqrt{7})\cos\frac{6\pi}{7}-1}{6^s}\right]+\ldots,$$

la racine $-\sqrt{7}$

$$\left[\frac{(1-\sqrt{7})\cos\frac{6\pi}{7}-1}{1^s}+\frac{(1-\sqrt{7})\cos\frac{2\pi}{7}-1}{2^s}-\frac{(1-\sqrt{7})\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)-2}{3^s}\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\sqrt{7})\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)-2}{4^s}+\frac{(1-(\sqrt{7})\cos\frac{2\pi}{7}-1}{5^s}+\frac{(1-\sqrt{7})\cos\frac{6\pi}{7}-1}{6^s}\right]+\ldots,$$

la racine $-i\sqrt{7}$

$$\left[\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}}{1^s}+\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{2^s}+\frac{2\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{10\pi}{7}}{3^s}\right.$$
$$\left.-\frac{2\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{10\pi}{7}}{4^s}-\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{5^s}-\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}}{6^s}\right]+\ldots;$$

$+i\sqrt{7}$, racine double donne deux séries linéairement indépendantes ; par exemple

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{6^s}$$

et

$$\left[\frac{0}{1^s}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{7}}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}-\frac{2\cos\frac{4\pi}{7}}{5^s}-\frac{0}{6^s}\right]+\ldots,$$

et il est facile d'écrire les relations fonctionnelles auxquelles satisfont ces séries.

67. *Généralisation de la fonction* $\xi(t)$. — Enfin, pour compléter l'analogie entre nos nouvelles fonctions et les fonctions $\zeta(s)$ et $\chi(s)$, il reste à trouver des fonctions analogues à celles que nous avons, aux n^{os} 27 et 38, désignées par $\xi(t)$ et $\theta(t)$.

Nous avons trouvé des fonctions $F(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ de quatre espèces, satisfaisant à quatre relations

$$\frac{\sqrt{p}\,F_1(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}.2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}\,F_1(1-s),$$

$$\frac{-\sqrt{p}\,F_2(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}.2\cos(s-1)\frac{\pi}{2}\,F_2(1-s),$$

$$\frac{\sqrt{p}\,F_3(s)}{\Gamma(1-s)} = -\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}.2\sin(s-1)\frac{\pi}{2}\,F_3(1-s),$$

$$\frac{\sqrt{p}\,F_4(s)}{\Gamma(1-s)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{s-1}.2\sin(s-1)\frac{\pi}{2}\,F_4(1-s).$$

Ces relations peuvent s'écrire sous une autre forme :

$F_1(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ ne change pas par le changement de s en $1-s$.

$F_2(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ change de signe » »

$F_3(s)\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ ne change pas » »

$F_4(s)\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ change de signe » »

68. De là on déduit, comme aux n[os] 29 et 38, les zéros de ces fonctions.

Les fonctions F_1 et F_2 ont, comme zéros,

$$-2k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

et les fonctions F_3 et F_4

$$-(2k+1) \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

De plus, ces fonctions ont respectivement des racines β_1, β_2, β_3, β_4 telles que $1-\beta_1$, $1-\beta_2$, $1-\beta_3$, $1-\beta_4$ soient aussi racines.

Nous allons donc former, comme nous l'avons fait pour $\zeta(s)$ et $\chi(s)$, des fonctions holomorphes qui n'admettent plus que ces racines-là.

Il faudrait pour cela avoir des fonctions analogues aux fonctions ψ et φ des n[os] 27 et 38.

Voici la marche que nous suivrons.

Nous remarquons que la relation fonctionnelle à laquelle satisfait φ ou ψ permet de démontrer celle à laquelle satisfait ζ ou χ. En effet, les formules des nos 27 et 38

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)\psi(x)\,dx,$$

$$\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1+s}{2}}\chi(s) = \int_1^\infty \left(x^{\frac{s-1}{2}} + x^{-\frac{s}{2}}\right)\varphi(x)\,dx$$

montrent immédiatement que le second membre, et par suite le premier, ne change pas par le changement de s en $1-s$. Inversement, il est probable que de la relation à laquelle satisfait ζ ou χ, on doit pouvoir déduire celle à laquelle satisfait ψ ou φ. C'est, en effet, ce que nous allons montrer tout à l'heure, et par analogie, puisque nous connaissons les relations auxquelles satisfont F_1, F_2, F_3, F_4, nous en déduirons des fonctions φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 analogues à φ et φ_1 d'où ensuite les fonctions holomorphes ayant pour racines β_1, β_2, β_3 β_4.

69. Soit, en général, une fonction $F(s)$ développable pour $\mathcal{R}(s) > t \geqq 0$ en série $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, et supposons que cette fonction jouisse de la propriété que

$$\beta^{-\frac{s}{\alpha}}F(s)\,\Gamma\left(b+\frac{s}{\alpha}\right)$$

ne change pas par le changement de s en $k-s$, β, α, b, k étant des constantes.

On a

$$e^{-y} = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\Gamma(s)}{y^s}\,ds$$

(en désignant par A un chemin d'ailleurs quelconque, et qui pourra changer dans la suite, mais situé à droite de Oy et s'étendant de $-\infty i$ à $+\infty i$); d'où

$$e^{-y} = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\Gamma(b+s)}{y^{s+b}}\,ds \qquad \text{ou} \qquad y^b e^{-y} = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\Gamma(b+s)}{y^s}\,ds.$$

Faisons $y = n^{\alpha}\beta x$, il vient

$$n^{\alpha b}\beta^b x^b e^{-n^{\alpha}\beta x} = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\Gamma(b+s)}{n^{\alpha s}\beta^s x^s}\,ds.$$

Faisons successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, multiplions par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ et ajoutons, il vient, en posant $\sum \alpha_n n^{\alpha b} e^{-n^{\alpha}\beta x} = \psi(x)$,

$$\beta^b x^b \psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\Gamma(s+b)}{\beta^s x^s} F(\alpha s)\,ds,$$

ou encore

$$\beta^b x^b \psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{\beta^{-\frac{s}{\alpha}}\Gamma\left(b+\frac{s}{\alpha}\right)F(s)}{x^{\frac{s}{\alpha}}}\,\frac{ds}{\alpha}.$$

Il faut supposer que le chemin A ait été primitivement choisi assez loin à droite de Oy, pour que dans les transformations successives, il soit resté à droite de la droite de convergence de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$. On peut supposer, par exemple, que A soit une parallèle à Oy d'abscisse $a > t$. Ainsi

$$(27) \qquad \beta^b x^b \psi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\beta^{-\frac{s}{\alpha}}\Gamma\left(b+\frac{s}{\alpha}\right)F(s)}{x^{\frac{s}{\alpha}}}\,\frac{ds}{\alpha}.$$

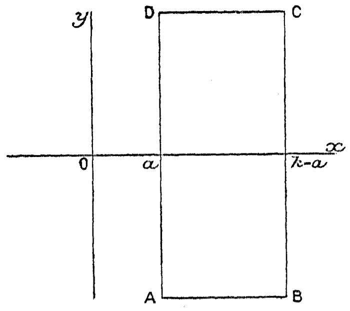
Changeons, sous le signe $\int$, s en $k - s$, et remarquons que $\beta^{-\frac{s}{\alpha}}\Gamma\left(b+\frac{s}{\alpha}\right)F(s)$ ne change pas par hypothèse, on a

$$(28) \qquad \beta^b x^b \psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \times \frac{1}{x^{\frac{k}{\alpha}}}\int_{k-a-\infty i}^{k-a+\infty i} \frac{\beta^{-\frac{s}{\alpha}}\Gamma\left(b+\frac{s}{\alpha}\right)F(s)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{s}{\alpha}}}\,\frac{ds}{\alpha}.$$

Mais l'intégrale du second membre, prise le long de la parallèle d'abscisse a, est, d'après la formule (27), égale à $2iz\beta^b\left(\frac{1}{x}\right)^b\psi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par une intégration effectuée le long du contour du rectangle ABCD (*fig.* 12), AB et CD étant à l'infini, on déduit facilement $\left(\int_{AB} \text{ et } \int_{CD}\right.$ étant nulles$\left.\right)$ l'intégrale du second membre de (28) en fonction de

Fig. 12.



$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ et des résidus contenus dans le rectangle. On a ainsi une relation entre $\psi(x)$ et $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ainsi, à la relation fonctionnelle entre $F(s)$ et $F(k-s)$ correspond une relation entre $\psi(x)$ et $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$.

En appliquant cette méthode aux fonctions $\zeta(s)$ et $\chi(s)$, on retrouverait facilement les propriétés des fonctions ψ et φ des n[os] 27 et 38.

70. Ceci posé, prenons maintenant les fonctions $F_1(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ qui sont telles que $F_1(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ ne change pas par le changement de s en $1-s$.

Posant

$$\varphi_1(x) = \sum a_n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}},$$

on trouve

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_1(s)}{x^{\frac{s}{2}}}\,ds \qquad \mathcal{R}(a) > 0,$$

et par le changement de s en $1-s$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2i\pi}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{1-a-\infty i}^{1-a+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_1(s)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{s}{2}}}\,ds.$$

Or $a > 0$, supposons $a < 1$, il en résulte $1 - a > 0$, de sorte que l'intégrale du second membre égale $2.2i\pi.\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc

$$\sqrt{x}\,\varphi_1(x) = \varphi_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour les fonctions $F_2(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}$ telles que $F_2(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}$ change de signe par le changement de s en $1-s$, on trouverait de même que la fonction

$$\varphi_2(x) = \sum b_n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}$$

jouit de la propriété

$$\sqrt{x}\,\varphi_2(x) = -\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ensuite la fonction $F_3(s) = \sum \frac{c_n}{n^s}$, telle que $F_3(s)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{1+s}{2}\right)$ ne change pas par le changement de s en $1-s$, donne, en posant

$$\sum n c_n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}} = \varphi_3(x),$$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{p}}\,\varphi_3(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F(s)}{x^{\frac{s}{2}}}$$

par le changement de s en $1-s$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{p}}\,\varphi_3(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2i\pi}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{1-a-\infty i}^{1-a+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F(s)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{s}{2}}}\,ds,$$

d'où facilement

$$x^{\frac{3}{2}}\varphi_3(x) = \varphi_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et enfin la fonction $F_4(s) = \sum \frac{d_n}{n^s}$ donne une fonction

$$\varphi_4(x) = \sum n\, d_n e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}}$$

telle que

$$x^{\frac{3}{2}}\varphi_4(x) = -\varphi_4\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme cas particuliers on a les séries

$$\varphi_1(x) = \sum \left(\frac{n}{p}\right) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}} \qquad \text{si } p \equiv 1 \pmod 4,$$

pour lesquelles

$$\sqrt{x}\,\varphi_1(x) = \varphi_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

et les séries

$$\varphi_3(x) = \sum n \left(\frac{n}{p}\right) e^{-n^2\frac{\pi x}{p}} \qquad \text{si } p \equiv -1 \pmod 4,$$

pour lesquelles

$$x^{\frac{3}{2}}\varphi_3(x) = \varphi_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

71. Maintenant nous pouvons donner l'expression des fonctions holomorphes ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 analogues à ξ.

Prenons d'abord $F_4(s)$.

On trouve facilement

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_1(s) = \int_0^\infty {}^{\frac{s}{2}-1}\varphi_1(x.)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\varphi_1(x)\,dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\varphi_1(x)\,dx.$$

En faisant, dans la première intégrale du second membre, le changement de variable $\frac{1}{x}$, et tenant compte de la relation

$$x^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x) = \varphi_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

on obtient

$$(29) \qquad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_1(s) = \int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s-2}{2}}\right)\varphi_1(x)\,dx.$$

Sous cette forme, il est apparent que le second membre, et par suite le premier, ne change pas par le changement de s en $1 - s$.

Cette fonction

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_1(s)$$

n'a plus que les racines β_i. Remplaçons s par $\frac{1}{2} + ti$ et posons le premier membre de (29) égal à $\xi_1(t)$, on a

$$\xi_1(t) = 2\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{4}} \cos\frac{t}{2}\log x\,\varphi_1(x)\,dx.$$

Les racines α_i de $\xi_1(t)$ sont liées aux racines β_i par les relations

$$\beta_i = \tfrac{1}{2} + \alpha_i i.$$

Une fonction $F_2(s)$ donne

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_2(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-2}\varphi_1(x)\,dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\varphi_2(x)\,dx \\
&= \int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s-2}{2}} - x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\varphi_2(x)\,dx
\end{aligned}$$

ou, remplaçant s par $\frac{1}{2} + ti$ et posant le premier membre égal $i\xi_2(t)$,

$$\xi_2(t) = 2\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{4}} \sin\frac{t\log x}{2}\,\varphi_2(x)\,dx.$$

Une fonction $F_3(s)$ donne

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} F_3(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s-1}{2}}\varphi_3(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s-1}{2}}\varphi_3(x)\,dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s\quad 1}{2}}\varphi_3(x)\,dx \\
&= \int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s-1}{2}} + x^{-\frac{s}{2}}\right)\varphi_3(x)\,dx;
\end{aligned}$$

d'où

$$\xi_3(t) = 2\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{4}} \cos\frac{t}{2}\log x\,\varphi(x)\,dx.$$

Et enfin $F_4(s)$ donnerait de même une fonction

$$\xi_4(t) = 2\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{4}} \sin\frac{t}{2}\log x\,\varphi_4(x)\,dx.$$

Les fonctions ξ_1, ξ_3, $\frac{\xi_2}{t}$, $\frac{\xi_4}{t}$ sont du genre zéro en t^2.

72. *Application de la méthode précédente à d'autres fonctions.* — Revenons à la méthode générale du n° 69. En l'appliquant à d'autres fonctions $\sum \frac{a_n}{n^s}$, jouissant d'une relation fonctionnelle analogue aux précédentes, on en déduit d'autres fonctions $\psi(x)$, jouissant d'une relation entre $\psi(x)$ et $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple : la fonction

$$F(s) = \zeta(s)\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

a_n étant l'excès du nombre des diviseurs de n qui sont $\equiv 1 \pmod 4$ sur celui de ceux qui sont $\equiv -1 \pmod 4$.

Comme

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{s}{2}}\chi(s)$$

ne changent pas par le changement de s en $1-s$, il en sera de même du produit de ces deux fonctions, et, par suite, aussi de

$$F(s)\,F(s)\,(\pi)^{-s}.$$

Posant alors

$$\sum_1^\infty a_n e^{-n\pi x} = \varphi(x),$$

on obtient, par le calcul indiqué au n° 69,

$$x\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1-x}{4}. \tag{30}$$

Ce résultat pouvait, d'ailleurs, s'obtenir autrement; car $a_n =$ le quart du nombre de façons dont n est décomposable en deux carrés. Donc

$$4\sum a_n e^{-n\pi x} + 1 = \left[2\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x} + 1\right]^2,$$

et en se reportant à la relation à laquelle satisfait $\Sigma e^{-n^2\pi x}$, on retrouve facilement la formule (30).

En combinant de même par multiplication les séries F_1, F_2, F_3, F_4, on obtiendrait des formules analogues.

73. Voici encore un autre exemple :

Nous partons de la fonction

$$F(s) = \zeta(s)\zeta(s-1) = \sum \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

en désignant par $\lambda(n)$ la somme des diviseurs du nombre n. On verra facilement que

$$\Gamma(s-1)(2\pi)^{-s}F(s)$$

ne change pas, par le changement de s en $2-s$.

Posant alors

$$\sum \frac{\lambda(n)e^{-2n\pi x}}{n} = \psi(x),$$

on arrive à

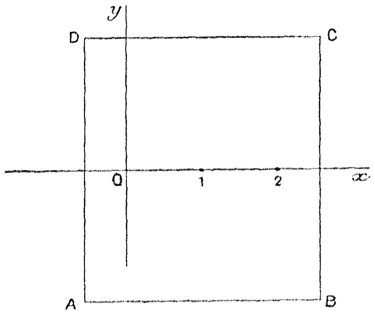
$$\frac{\psi(x)}{2\pi x} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{2\pi} - \Sigma A\right],$$

en désignant par ΣA la somme des résidus de la fonction

$$\Gamma(s-1)(2\pi x)^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)$$

contenue dans un rectangle ABCD (*fig.* 13), BC ayant une abscisse comprise entre 2 et 3, et AD entre -1 et 0.

Fig. 13.



Après calcul facile on arrive à

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \psi(x) + \frac{\pi x}{12} - \frac{\pi}{12 x} - \frac{1}{2}\log x.$$

La considération des fonctions $\zeta(s)\zeta(s-3)$, $\zeta(s)\zeta(s-5)$, ... donnerait des formules analogues, mais plus compliquées.

74. *Rapport avec la théorie des fonctions et du groupe modulaires.* — Maintenant remarquons que toutes ces séries sont périodiques. Prenons par exemple la fonction $\varphi_1(x)$ du n° 70.

On a

$$\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(x + 2pi) = \varphi_1(x).$$

Posant $x = iy$, on peut exprimer ces relations en disant que des valeurs de la fonction pour un certain argument y, on déduit les valeurs de la même fonction pour l'argument déduit du précédent par les substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aura donc les valeurs de la fonction pour tous les arguments déduits de y par les substitutions du groupe dont les deux précédentes sont les génératrices.

Considérons deux fonctions φ_1, correspondant aux deux nombres premiers p, q, tous deux de la forme $4n+1$, ou tous deux de la forme $4n-1$. Soient $\varphi_1^{(p)}$ et $\varphi_1^{(q)}$. Le rapport $\frac{\varphi_1^{(p)}}{\varphi_1^{(q)}}$ est une fonction modulaire, invariable par les substitutions du groupe, dont les substitutions génératrices sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2pq \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces considérations établissent un lien entre la théorie des fonctions $\sum \frac{a_n}{n^s}$ à coefficients périodiques, et celle des fonctions et du groupe modulaires.

75. *Remarque.* — Enfin nous terminerons en exprimant des séries de la forme

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}$$

(a, b, c, entiers; m, n prenant tous les couples de valeurs entières, $0,0$ excepté) au moyen des fonctions précédentes.

Nous citerons seulement ici comme exemples les formules suivantes

$$\sum \frac{1}{(m^2+n^2)^s} = \zeta(s)\chi(s)+\zeta(2s),$$

$$\sum \frac{1}{(m^2+2n^2)^s} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)\,\theta(s)$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2s}}\right)\zeta(2s)+\frac{1}{2^s}\zeta(s)\chi(s)+\frac{1}{2^s}\zeta(2s),$$

$\theta(s)$ étant la série à période 8

$$\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}\right)+\dots.$$

On peut démontrer ces formules en évaluant le nombre de fois que chaque terme est contenu dans chaque membre.

Mais ceci appelle des recherches plus générales.