

Montrer ce qu'on a trouvé, même si on ne sait rien démontrer (Denise Vella-Chemla, 1.8.18)

A la recherche d'une inatteignable démonstration de la conjecture de Goldbach *, voici ce qu'on a trouvé récemment : on sait qu'un décomposant de Goldbach d'un nombre n est premier à n (puisqu'il est premier tout court). Quand on calcule les restes des divisions de $p(n-p) = -p^2$ par n , on réalise que l'un des décomposants de Goldbach de n^\dagger a systématiquement le reste de la division de l'opposé de son carré par n qui est premier.

Ci-dessous, les tables de multiplication modulaire selon n jusqu'à 60 dans lesquelles on ne note que les restes des divisions par n qui sont premiers. Les décompositions de Goldbach de n sont colorées en bleu sur la diagonale ascendante. On peut noter le rétrécissement des tables pour les pairs multiples de 3. Dans chaque ligne et chaque colonne apparaissent tous les nombres premiers inférieurs à n qui ne divisent pas n une fois et une seule chacun. Chaque table a $\varphi(n)$ lignes et $\varphi(n)$ colonnes.

$n = 8$

	1	3	5	7
1		+	+	+
3	+		⊕	+
5	+	⊕		+
7	+	+	+	

$n = 12$

	1	5	7	11
1		+	+	+
5	+		⊕	+
7	+	⊕		+
11	+	+	+	

$n = 16$

	1	3	5	7	9	11	13	15
1		+	+	+		+	+	
3	+		+	+	+	+	⊕	+
5	+			+	+	⊕		+
7	+	+	+			+	+	
9		+	+	+		+	+	+
11	+		⊕	+	+			+
13	+	⊕		+	+			+
15		+	+	+	+	+	+	

$n = 18$

	1	5	7	11	13	17
1		+	+	+	+	+
5	+		+	+	⊕	+
7	+	+		⊕		+
11	+		⊕		+	+
13	+	⊕		+		+
17	+	+	+	+	+	

$n = 20$

	1	3	7	9	11	13	17	19
1		+	+		+	+	+	+
3	+		+	+	+	+	⊕	+
7	+			+	+	⊕	+	+
9		+	+		+	+	+	+
11	+	+	+	+		+	+	
13	+	+	⊕	+	+			+
17	+	⊕	+	+	+			+
19	+	+	+	+	+	+	+	

$n = 24$

	1	5	7	11	13	17	19	23
1		+	+	+	+	+	+	+
5	+		+	+	+	+	⊕	+
7	+	+		+	+	⊕	+	+
11	+	+	+		⊕	+	+	+
13	+	+	+	⊕		+	+	+
17	+	+	⊕	+	+		+	+
19	+	⊕	+	+	+	+		+
23	+	+	+	+	+	+	+	

*. On ne peut s'empêcher de penser à un mirage, une chimère...

†. ceci pour tout $n \geq 300$ et $n < 10^6$ car en deçà de 300, il y a quelques exceptions, les nombres 8, 12, 44, 104, 128, 152, 170, 212, 248 et 296.

$n = 28$

	1	3	5	9	11	13	15	17	19	23	25	27
1		+	+		+	+		+	+	+		
3	+				+	+	+	+		+	+	
5	+			+			+	+	+	⊕	+	+
9			+				+	+	+	+		+
11	+	+				+		⊕	+		+	+
13	+	+		+	+			+	+	+	+	
15		+	+	+				+	+		+	+
17	+	+		+	⊕		+				+	+
19	+	+	+	+	+	+	+			+		
23	+	+	⊕	+		+			+			+
25		+	+		+	+	+	+				+
27			+	+	+		+	+		+	+	

$n = 30$

	1	7	11	13	17	19	23	29
1		+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+		+	+	⊕	+
11	+	+		+	+	⊕	+	+
13	+		+	+	⊕	+	+	+
17	+	+	+	⊕	+	+		+
19	+	+	⊕	+	+		+	+
23	+	⊕	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 32$

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
1		+	+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+
3	+						+	+	+		+	+	+	+	⊕	+
5	+			+	+	+		+		+		+	+	+	+	
7	+		+	+	+	+			+	+	+				+	+
9			+	+	+	+		+		+	+			+	+	+
11	+		+	+	+			+		+	+	+	+		+	
13	+	+					+		+	⊕	+	+	+	+	+	+
15		+	+		+	+	+		+	+			+		+	+
17	+	+		+			+	+		+	+	+		+	+	
19	+		+	+	+	+	⊕	+	+						+	+
21	+	+		+	+	+	+		+			+	+	+	+	+
23	+	+				+	+		+		+	+	+	+		
25		+	+			+	+	+		+	+	+	+	+		+
27		+	+	+	+		+		+		+	+	+			+
29	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+						+
31	+	+				+	+		+	+	+			+	+	+

$n = 36$

	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
1		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+			+	+	+	+	+	+		⊕	+
7	+		+	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+
11	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
13	+	+	+			+	+	⊕	+	+	+	+
17	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
19	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+
23	+	+	+		⊕	+	+		+	+	+	+
25		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
29	+		⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+
31	+	⊕		+	+	+	+	+	+	+	+	+
35		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 40$

	1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39
1		+	+		+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
3	+						+	+	+	+		+	+	+	⊕	+
7	+			+	+	+		+		+	+	+	+	+	+	+
9			+		+	+		+	+	+	+		+	+	+	+
11	+		+	+	+			+	+	+	+		+	+	+	+
13	+	+	+	+			+		+	+	+	+	+	+		+
17	+	+					+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+
19	+	+	+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+
21	+		+	+		+		+	+	+		+	+	+	+	+
23	+	+		+	+	+	⊕	+	+			+	+	+	+	+
27	+		+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
29	+	+	+		+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
31	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
33	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
37	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
39	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 42$

	1	5	11	13	17	19	23	25	29	31	37	41
1		+	+	+	+	+	+		+	+	+	+
5	+		+	+		+	+	+	+	+	⊕	+
11	+	+		+	+	+				⊕	+	+
13	+	+	+		+	+	+	+	⊕		+	+
17	+		+	+		+	+	+	+	+	+	
19	+	+	+	+	+		⊕	+	+		+	+
23	+	+		+	+	⊕		+	+	+	+	+
25		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+
29	+	+		⊕	+	+	+	+		+	+	+
31	+	+	⊕		+		+	+	+	+	+	+
37	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+			+
41	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

$n = 44$

	1	3	5	7	9	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	35	37	39	41	43
1		+	+	+		+		+	+		+		+	+	+	+	+	+	+	+
3	+							+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+						+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+				+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9					+	+	+	+		+	+	+	+	+		+		+	+	+
13	+			+	+	+	+				+	+	+		⊕		+	+	+	+
15			+	+	+	+	+				+	+	+			+	+	+	+	+
17	+	+	+	+						+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
19	+	+	+							+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
21		+	+		+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
23	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
25		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+							+	+	+
27	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+						+	+	+	+
29	+	+	+		+			+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+
31	+	+	+	+		⊕		+	+	+	+			+	+	+	+			+
35	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+			+	+	+	+			+
37	+	+			+	+	+	+	+	+			+	+	+	+	+			+
39	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+						+
41	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+						+
43	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+

$n = 48$

	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35	37	41	43	47
1		+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
5	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+
7	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+
11	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+	+
13	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
17	+	+	+	+	+			+	+	+	⊕	+	+	+	+	+
19	+	+	+	+	+	+		+	+	⊕	+	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+
25		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+
31	+	+		+	+	⊕	+	+	+		+	+	+	+	+	+
35	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
37	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
41	+	+	⊕	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
43	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
47	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 50$

	1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
1		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+							+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+
7	+			+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9			+			+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	+					+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+		+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+
17	+		+	+	+			+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+
19	+	+			+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
21		+	+		+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
27	+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+	+	+		+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
31	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
33			+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
37	+	+			+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
39	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
41	+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
43	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
47	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
49	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 52$

	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	41	43	45	47	49	51
1		+	+	+		+		+	+	+	+			+	+	+		+	+	+	+	+		
3	+								+	+	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	
5	+					+	+							+	+		+			+	+	+	+	+
7	+				+				+	+	+	+				+	+			+	+	+	+	+
9				+	+	+	+								+	+	+		+	+	+	+	+	+
11	+		+		+	+		+		+				+	+	+		+		+	+	+	+	+
15			+		+		+	+		+				+	+		+		+		+	+	+	+
17	+					+	+	+	+					+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
19	+	+	+	+				+						+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
21		+		+		+	+							+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+										+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
25		+		+			+		+	+	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
27		+	+			+	+	+	+	+				+	+	+		+		+	+	+	+	+
29	+		+	+		+	+		+	+	+	+		+				+	+		+	+	+	+
31	+	+			+	+			+	+	+	+		+	+			+	+		+	+	+	+
33		+			+	+			+	+	+	+		+			+			+	+	+	+	+
35			+	+	+		+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
37	+	+	+			+		+						+		+	+	+		+		+		+
41	+	+			+		+			+	+	+			+			+	+	+	+	+	+	+
43	+		+	+	+	+		+	+	+	+	+		+			+	+	+	+	+	+	+	+
45		+	+	+	+			+	+		+			+	+	+	+		+	+	+			+
47	+	+	+	+			+	+			+	+		+	+	+		+	+				+	+
49		+	+	+		+	+		+	+	+	+		+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
51		+		+		+	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 54$

	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35	37	41	43	47	49	53
1		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	+		+	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
17	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
19	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
25		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
31	+	+		+		+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
35		+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
37	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
41	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
43	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
47	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
49		+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
53	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$n = 56$

	1	3	5	9	11	13	15	17	19	23	25	27	29	31	33	37	39	41	43	45	47	51	53	55
1		+	+		+	+		+	+	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
3	+								+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
5	+						+	+						+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
9					+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
11	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
13	+			+	+			+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
15			+	+	+			+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
17	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
19	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
23	+	+	+		+	+								+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
25		+	+											+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
27		+	+	+	+		+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
29	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
31	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
33	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
37	+		+	+				+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
39	+	+			+	+		+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
41	+	+	+		+	+			+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
43	+	+	+				+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
45	+	+	+	+	+		+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
47	+	+	+	+	+				+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
51		+	+		+	+			+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
53	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
55		+		+		+		+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

$n = 60$

	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59
1		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+
11	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+	+
17	+	+	+	+		+	+	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+
19	+	+	+	+	+		+	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+
23	+	+	+	+	+	+		+	+	⊕	+	+	+	+	+	+
29	+	+	+	+	+	+	+		⊕	+	+	+	+	+	+	+
31	+	+	+	+	+	+	+	⊕		+	+	+	+	+	+	+
37	+	+	+	+	+	+	⊕	+	+		+	+	+	+	+	+
41	+	+	+	+	+	⊕	+	+	+	+		+	+	+	+	+
43	+	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+
47	+	+	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+
49	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
53	+	⊕	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+
59	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

On dispose des connaissances éparées suivantes qui pourraient être utiles :

- pour tous p, q , nombres premiers à n , on a $p^{(q-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{q}$ selon que p est (+1) ou n'est pas (-1) résidu quadratique de q ;
- pour tout p premier à n , $p^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$;
- si n est de la forme $4k + 2$ (n double d'impair) alors pour $m \leq n/4$, $\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x+m}{n}\right)$;
- article 78 des Recherches arithmétiques : le produit des unités (des nombres premiers à n) est congru à $-1 \pmod{n}$ pour n double d'une puissance de nombre premier différent de 2 (ainsi que pour $n = 4$ ou $n = p^m$); il est congru à 1 pour les autres nombres pairs;
- -1 est résidu quadratique des nombres premiers de la forme $4k + 1$ ou bien des nombres composés de la forme $4k + 1$ qui ne contiennent aucun premier $4k + 3$ dans leur factorisation;
- -1 est non résidu quadratique des nombres pairs de la forme $4k$; il est résidu quadratique des nombres pairs de la forme $4k + 2$ sauf s'ils contiennent un $4k + 3$ dans leur factorisation et -1 est non-résidu quadratique de tous les autres nombres pairs qui ne contiennent aucun $4k + 3$ dans leur factorisation.