Une fonction de comptage liée à la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

7/8/9

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

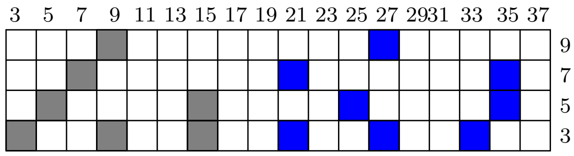
Les deux éléments essentiels qui nous ont permis d'aboutir aux idées qui sont présentées ici sont à rechercher tout d'abord dans l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* dans lequel celui-ci présente une fonction récursive qui permet de calculer la somme des diviseurs d'un entier. D'autre part, nous nous sommes appuyés sur un domaine habituellement appelé l'arithmétique des tissus, dont Edouard Lucas est à l'origine et qui consiste à représenter les caractères de divisibilité des nombres comme les mailles colorées de pièces de tissus (penser au Jacquard), ce qui en facilite la visualisation, l'appréhension. Il s'agissait de mettre au point une méthode qui permettrait de borner inférieurement le nombre des décomposants de Goldbach d'un nombre pair donné[2].

2 Fondations

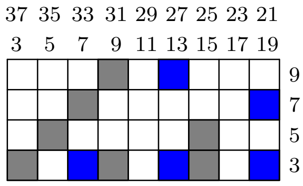
Présentons tout d'abord un exemple qui va montrer précisément ce que nous avions l'intention de compter. Considérons pour cela le nombre pair 40. Lorsque l'on cherche ses décomposants de Goldbach (i.e. les nombres premiers dont il est la somme), il suffit de s'intéresser aux nombres impairs dont il est la somme et étudier les caractères de divisibilité de chacun d'eux. On représente cela sur une "trame de tissu". On décide par convention de représenter la divisibilité des nombres inférieurs ou égaux à $x = 20$ par des cases grises et la divisibilité des nombres supérieurs à x par des cases bleues.

[1] La conjecture ayant été vérifiée par ordinateur jusqu'à des nombres très grands, notre analyse considèrera les nombres pairs supérieurs ou égaux à 24. En référence à cet article d'Euler qui nous a été très utile, on aurait pu appeler cette note *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport au nombre de leurs décomposants de Goldbach"*.

[2] Ici, on dira que le couple (p, q) est un décomposant de Goldbach de $2x$ si $2x = p + q$ avec p et q deux nombres premiers.



Choisissons maintenant de “plier le tissu en deux” et d’en ramener toutes les cases sur la moitié gauche du tissu, on obtiendra par symétrie autour de l’axe central le tissu suivant.



Il faut être attentif aux éléments suivants : notons la diagonale de cases grises à l’extrémité gauche de la grille initiale (cette diagonale grise représente le fait qu’un nombre est divisible par lui-même) ; si, par pliage, des cases bleues se retrouvaient en-deçà de cette diagonale, on décide de les oublier (de ne pas colorer en bleu les cases qui, par symétrie, se seraient retrouvées à gauche de la diagonale de cases grises - ici par exemple, la dernière case bleue de la troisième ligne de la grille initiale). D’autre part, le pliage peut être amené à faire coïncider des cases bleues et des cases grises, le comptage que nous allons présenter maintenant les oubliera aussi.

On comprend immédiatement que les colonnes ne contenant aucune case colorée vont correspondre à certaines décompositions de Goldbach puisqu’elles sont indicées par des entêtes de colonne correspondant à deux nombres impairs dont ni l’un ni l’autre ne sont divisibles par l’un des nombres impairs compris entre 3 et $2.\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 1$.

Si l’on s’intéresse maintenant à la suite des nombres pairs de 12 à 100 et que l’on associe à chacun d’eux un tissu plié, on va découvrir les régularités suivantes : intéressons-nous seulement aux cases colorées des premières lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 3, à partir du nombre 12, et comptons-les : on obtiendra la séquence de nombres suivante : 1,2,2,2,3,3,2,4,4,3,5,5,3,6,6,4,7,7,etc. On reconnaît un *motif* qui va pouvoir être défini très aisément par une fonction récursive. Intéressons-nous ensuite seulement aux cases colorées des deuxièmes lignes des grilles, correspondant à la divisibilité par 5, à partir du nombre 20 (au lieu du nombre 12). On obtient des valeurs identiques pour la séquence de nombres obtenue à celles de la première séquence (pour la divisibilité par 3) mais on n’a pas les mêmes occurences pour les nombres obtenus. On obtient : 1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,2,4,4,4,4,3,5,5,5,5,3,6,6,6,6,4,7,7,7,7,etc. Les nombres pour lesquels on trouve le nombre 1 qui initie la séquence sont identifiés comme étant de la forme $4(2k+1)$ (k étant strictement positif, il s’agit des nombres 12, 20, 28, 36, etc).

Les valeurs successives apparaissent dans le même ordre pour tout k. Seul change le nombre d’éléments intermédiaires, qui font reconnaître des motifs de longueur $2(2k+1)$ pour les nombres pairs compris entre $4i(2k+1)$ et $4(i+1)(2k+1)$. Ces motifs sont de la forme suivante :

$$n\,\underbrace{2n\ldots 2n}_{2k\ \text{fois}}\,n+1\,\underbrace{2n+1\ldots 2n+1}_{2k\ \text{fois}}$$

En annexe 2 sont fournies toutes les grilles associées aux nombres pairs de 24 à 100. On observe que les lignes contiennent soit uniquement des cases grises, soit une alternance dans cet ordre de cases l'une grise, l'une bleue, la dernière case colorée d'une ligne pouvant être soit grise, soit bleue. Lors du passage d'une grille à la suivante, les cases grises ne changent pas de position alors qu'on a l'impression visuelle que les cases bleues se décalent d'un rang à droite, se "cachant" régulièrement derrière les cases grises, ce qui correspond au fait que les nombres impairs compris entre x et $2x$ se décalent d'un rang à droite dans les grilles.

Les nombres de lignes et de colonnes de chaque grille sont définis de la façon suivante :

- nombre de lignes de la grille associée à 2x $= \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (il augmente de 1 à chaque fois que 2x est le double d'un carré)
- nombre de colonnes de la grille associée à 2x$= \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor$ (il augmente de 1 une fois sur deux)

Ces analyses nous ont permis de découvrir la fonction récursive binaire $f(y,k)$ définie de la façon suivante pour k variant de 1 à l'infini :

Définition 2.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f(2x+2,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2x \ \leq\ 8k+4 \\ 2.f(2x,k) & \text{si } 2x \ \equiv\ 0 \ (mod\ 8k+4) \\ 2.f(2x,k)-1 & \text{si } 2x \ \equiv\ 4k+2 \ (mod\ 8k+4) \\ (f(2x,k)+1)/2 & \text{si } 2x+2 \ \equiv\ 0 \ (mod\ 8k+4) \\ (f(2x,k)+2)/2 & \text{si } 2x+2 \ \equiv\ 4k+2 \ (mod\ 8k+4) \\ f(2x,k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$\sum_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ i\geq k}} (2k+1 \mid 2i+1) \vee (2k+1 \mid 2x-2i-1)$$

Il est important de bien noter deux choses : sous le signe Sigma de la somme, le $i \geq k$ correspond à l'élimination des cases bleues qui par symétrie se retrouvent en-deçà de la diagonale de cases grises à l'extrême gauche. C'est d'autre part à cause du $\vee$ booléen que, lorsque les cases bleues et les cases grises "coïncident" par pliage, sous prétexte que 2k+1 divise 2x, on ne compte qu'une case au lieu de deux (car $1 \vee 1 = 1$ dans l'algèbre de Boole). Ces remarques sont importantes car elles expriment toute la distinction qu'il y a entre la méthode présentée ici et les méthodes habituelles telles que le crible d'Erathosthène.

Pour améliorer la lisibilité de la démonstration à venir, on notera $Sigma_{2x}$ le résultat du calcul du nombre de divisibles effectué par la définition 2.2.

Théorème 2.1 (f compte bien les divisibles par $2k+1$)

$\forall$ *k tel que* $1 \ \leq\ k\ \leq\ \lfloor\sqrt{x}\rfloor, f(2x,k) = \displaystyle\sum_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ \lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor \\ i\ \geq\ k}} (2k{+}1 \mid 2i{+}1) \vee (2k{+}1 \mid 2x{-}2i{-}1)$

Démonstration par récurrence sur $2x$:
1) Vrai pour $2x = 24$.
2) Si vrai pour $2x$ alors vrai pour $2x+2$:
Pour chacun des 6 cas différents de valeurs pour $f(2x+2,k)$ identifiés seront fournis deux exemples pour fixer les idées.

- cas 1 :
  si $2x\ \leq\ 8k+4$ alors $f(2x+2,k)\ =\ 1$

  exemple 1 : $2x\ =\ 24,\ k\ =\ 3,\ f(24,3)\ =\ 1$, on compte là les divisibles par 7 ($=\ 2k+1\ =\ 2.3+1$) et 24 étant inférieur à 28 $=$ 4.7, seul 7 est à compter (21 dont le complémentaire à 24 est 3 qui est inférieur à 7 n'est pas comptabilisé car il se retrouve en-deçà de la diagonale de cases grises).

21	19	17	15	13
3	5	7	9	11

  exemple 2 : $2x\ =\ 36,\ k\ =\ 4,\ f(36,4)\ =\ 1$, on compte là les divisibles par 9 ($=\ 2k+1\ =\ 2.4+1$) et 36 $=$ 4.9, 9 et 27 sont divisibles par 9 et “coïncident”.

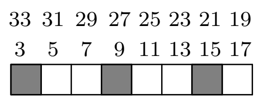
33	31	29	27	25	23	21	19
3	5	7	9	11	13	15	17

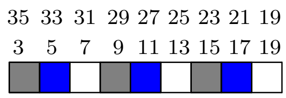
  Ce cas est utilisé seulement pour calculer f(24,3), f(26,3), f(28,3), f(32,4), f(34,4) et f(36,4). Pour les nombres pairs supérieurs ou égaux à 38, si $2x$ est de la forme $8k+4$ alors $\sqrt{x} \leq k$ et on n'utilise donc plus ce cas. On vérifie de manière évidente que pour les 6 images spécifiées, f calcule bien ce qu'elle doit calculer (se reporter aux grilles correspondantes en annexe 2).

- cas 2 :
  Les cas 2 à 6 présentés ci-dessous sont, pour k fixé, exclusifs les uns des autres.

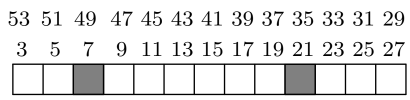
  si $2x\ \equiv\ 0\ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k)\ =\ 2.f(2x,k)$

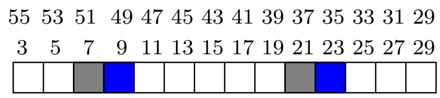
exemple 3 : $2x = 36$, $k = 1$, $f(36,1) = 3$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k+1 = 2.1+1$). $f(2x+2,1) = f(38,2) = 6$.





exemple 4 : $2x = 56$, $k = 3$, $f(56,3) = 2$, on compte là les divisibles par 7 ($= 2k+1 = 2.3+1$). $f(2x+2,3) = f(58,3) = 4$.





Dans ce cas, le nombre de colonnes est toujours augmenté de 1 lors du passage de $2x$ à $2x+2$ car si $2x \equiv 0 \ (mod\ 8k+4)$, $2x$ est un double de pair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs dont la différence est 2 (et non de deux impairs égaux).

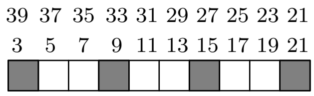
Lors du passage de $2x$ à $2x+2$, une case bleue qui “coïncidait” avec chaque case grise en “sort” par la droite, doublant ainsi le nombre de cases colorées de la ligne.

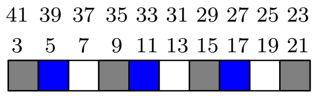
Le nombre de cases non colorées à l'extrémité droite de la ligne associée à $2x$ est la moitié k du nombre de cases non colorées que l'on trouve habituellement entre deux cases grises successives de la ligne de divisibilité associé à $2x+2$ qui vaut $2k$.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x}{4k+2}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x}{2k+1}$. Pour bien comprendre pourquoi les $Sigma$ prennent ces valeurs, amener mentalement à l'extrémité droite de la grille les cases blanches qui étaient au bout à l'extrémité gauche de la grille (en n'omettant pas une colonne fictive correspondant à la somme d'impairs $2x = 1+(2x-1)$). Ces cases blanches sont alors au nombre de k. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x+2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = 2.Sigma_{2x}$.

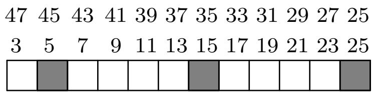
- cas 3 :
  si $2x \equiv 4k+2 \ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k) = 2.f(2x,k)-1$

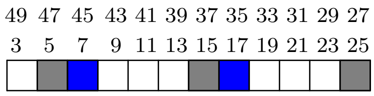
exemple 5 : $2x = 42$, $k = 1$, $f(42,1) = 4$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k+1 = 2.1+1$). $f(2x+2,1) = f(44,1) = 7$.





exemple 6 : $2x = 50$, $k = 2$, $f(50,2) = 3$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k+1 = 2.2+1$). $f(2x+2,2) = f(52,2) = 5$.





Dans ce cas, le nombre de colonnes reste le même lors du passage de $2x$ à $2x+2$ car si $2x \equiv 4k+2 \ (mod\ 8k+4)$, $2x$ est un double d'impair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs égaux.

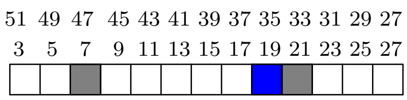
Il y a une case grise dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x$, qui est conservée dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x+2$.

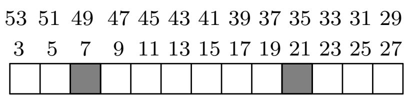
Une case bleue "sort" à droite de chaque case grise, sauf à droite de la dernière case grise de la ligne.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x+2k+1}{4k+2}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x}{2k+1}$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x+2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = 2.Sigma_{2x} - 1$.

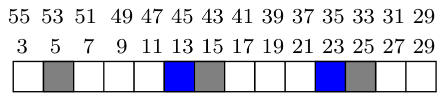
- cas 4 :

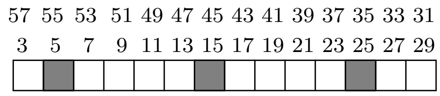
si $2x+2 \equiv 0 \ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k) = (f(2x,k)+1)/2$
exemple 9 : $2x = 54$, $k = 3$, $f(54,3) = 3$, on compte là les divisibles par 7 ($= 2k+1 = 2.3+1$). $f(2x+2,3) = f(56,3) = 2$.





exemple 10 : $2x = 58$, $k = 2$, $f(58,2) = 5$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k+1 = 2.2+1$). $f(2x+2,2) = f(60,2) = 3$.



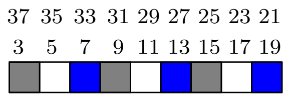


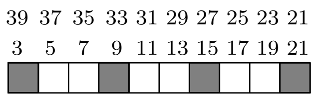
Dans ce cas, le nombre de colonnes reste le même lors du passage de $2x$ à $2x+2$ car si $2x+2 \equiv 0\ (mod\ 8k+4)$, $2x$ est un double d'impair, donc il est dans la dernière colonne somme de deux impairs égaux.

Le nombre de cases non colorées à l'extrémité droite de la ligne associée à $2x+2$ est la moitié k du nombre de cases non colorées que l'on trouve habituellement entre deux cases grises successives de la ligne de divisibilité associé à $2x$ qui vaut $2k$.

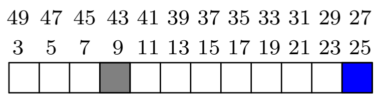
Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x-2k}{2k+1}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x+1}{4k+2}$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x+2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = (Sigma_{2x}+1)/2$.

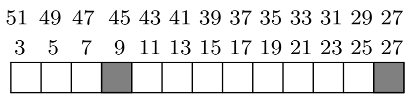
- cas 5 :
  si $2x+2 \equiv 4k+2\ (mod\ 8k+4)$ alors $f(2x+2,k) = (f(2x,k)+2)/2$
  exemple 7 : $2x = 40$, $k = 1$, $f(40,1) = 6$, on compte là les divisibles par 3 ($= 2k+1 = 2.1+1$). $f(2x+2,1) = f(42,1) = 4$.





exemple 8 : $2x = 52$, $k = 4$, $f(52,4) = 2$, on compte là les divisibles par 9 ($= 2k+1 = 2.4+1$). $f(2x+2,4) = f(54,4) = 2$.





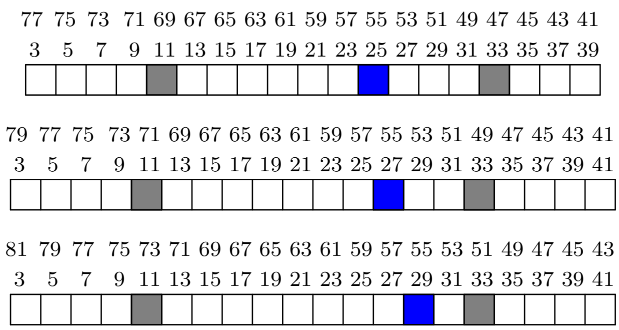
Dans ce cas, le nombre de colonnes est toujours augmenté de 1 lors du passage de $2x$ à $2x + 2$ car si $2x + 2 \equiv 4k + 2 \ (mod\ 8k + 4)$, $2x + 2$ est un double d'impair, donc $2x$ est dans la dernière colonne somme de deux impairs dont la différence est 2.

Il y a une case bleue dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x$, qui devient une case grise dans la dernière colonne de la ligne associée à $2x + 2$.

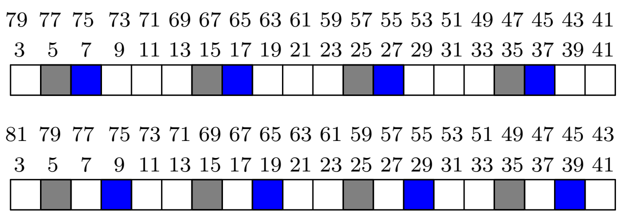
Lors du passage de $2x$ à $2x + 2$, chaque case bleue à gauche d'une case grise “se cache” derrière la case grise en question. Il n'y a pas de case bleue à gauche de la première case grise de la ligne. Dans la ligne associée à $2x$, $2x + 2 \equiv 4k + 2 \ (mod\ 8k + 4)$ a pour conséquence que la dernière colonne est occupée par une case bleue. La formule permet bien le compte exact de ce qui doit être compté.

Dans ce cas, $Sigma_{2x} = \frac{x-2k}{2k+1}$ et $Sigma_{2x+2} = \frac{x-2k}{4k+2} + 1$. On vérifie que ces valeurs de $Sigma_{2x}$ et $Sigma_{2x+2}$ sont bien égales aux valeurs de f correspondantes pour $2x$ et $2x + 2$ et donc telles que $Sigma_{2x+2} = (Sigma_{2x} + 2)/2$.

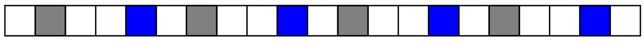
- cas 6 :
  si aucune des conditions spécifiées ci-dessus n'est vérifiée
  alors $f(2x + 2, k) = f(2x, k)$
  exemple 11 : $2x = 80$, $k = 5$, $f(80, 5) = 3$, on compte là les divisibles par 11 ($= 2k + 1 = 2.5 + 1$). $f(2x + 2, 5) = f(82, 5) = 3$.
  exemple 12 : $2x = 82$, $k = 5$, $f(82, 5) = 3$, on compte là les divisibles par 11 ($= 2k + 1 = 2.5 + 1$). $f(2x + 2, 5) = f(84, 5) = 3$.



exemple 13 : $2x = 82$, $k = 2$, $f(82, 2) = 8$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k + 1 = 2.2 + 1$). $f(2x + 2, 5) = f(84, 2) = 8$.
exemple 14 : $2x = 84$, $k = 2$, $f(84, 2) = 8$, on compte là les divisibles par 5 ($= 2k + 1 = 2.2 + 1$). $f(2x + 2, 5) = f(86, 2) = 8$.



83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	51	49	47	45	43
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43



On n'est dans aucun des cas précédents : les cases bleues ne font qu'avancer dans les grilles, sans qu'aucune d'entre elles ne disparaissent ; le nombre de cases colorées reste constant.

3 Probabilités

Définition 3.1 (Définition de l'ensemble des probabilités associé à $2x$)

$$Probas(2x) = \left\{ \frac{f(2x,k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Rapporter ainsi les nombres $f(2x,k)$ au nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ représente la probabilité qu'a chaque colonne de contenir une case colorée dans la ligne k (rappel : lorsque la deuxième coordonnée de la fonction f vaut k, on considère la divisibilité par $2k+1$).

Par exemple, f(88,2) = 8. Le nombre de colonnes de la grille associée à 88 est 21. Le rationnel $\frac{8}{21}$ représente la probabilité que l'une des colonnes (chaque colonne, on le rappelle, représente un couple d'impairs (p,q) supérieurs ou égaux à 3 dont la somme vaut 88) contienne au moins une case colorée, c'est à dire que p ou q soit un multiple de 5.

On a $Card(Probas(2x)) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Et, de fait, $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(Probas(2x+2)) = Card(Probas(2x))$.

Définition 3.2 (Définition récursive de la formule de Poincaré)

$$\begin{cases} ProbaDisjonction(\emptyset) = 0. \\ ProbaDisjonction(\left\{\frac{p}{q}\right\} \cup E) = \frac{p}{q} + ProbaDisjonction(E) - \frac{p}{q}.ProbaDisjonction(E). \end{cases}$$

Définition 3.3 (Définition de la fonction *Poincaré*)

$$Poincaré(2x) = ProbaDisjonction(Probas(2x))$$

La fonction *ProbaDisjonction* qui a été définie ci-dessus correspond à ce que l'on a coutume d'appeler le principe d'inclusion / exclusion (ou formule de De Moivre, de Da Silva, du crible ou de Poincaré). La formulation mathématique de ce principe est :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

L'application de ce principe est nécessitée ici par le fait qu'on ne sait pas quelle case colorée d'une ligne se trouve partager une colonne avec une case colorée d'une autre ligne.

On va appliquer la formule aux ensembles de probabilités que l'on a identifiés pour trouver quelle est la probabilité que l'un de ces événements (qui représentent les caractères de divisibilité par les impairs successifs, et donc la nature d'être composé pour un nombre) advienne et nous multiplierons le complémentaire à 1 de cette probabilité par $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$, pour obtenir un nombre minorant le nombre de décomposants de Goldbach de $2x$.

La probabilité $Poincaré(2x)$ représente donc la probabilité qu'une décomposition de $2x$ comme somme de deux nombres impairs fasse intervenir un nombre composé et ne soit donc pas une décomposition de Goldbach de $2x$. En annexe 3, sont fournis les ensembles de probabilités $Probas(2x)$ pour $2x$ compris entre 24 et 100 et les valeurs de $Poincaré(2x)$ pour ces mêmes nombres pairs.

On note qu'une fois sur deux, le dénominateur des rationnels auxquels on applique la formule de Poincaré est augmenté de 1, ce qui nous fait appliquer la formule sur des nombres de plus en plus petits. On ne peut être sûr que le résultat ne croîtra pas trop, ce qui permettra, au-delà d'un certain nombre pair, d'obtenir toujours au moins un décomposant de Goldbach. On constate que pour les nombres pairs de 34 à 100, le résultat calculé est toujours supérieur ou égal à 1.

4 Spécificité de la formule de Poincaré dans le cas qui nous intéresse

Appliquons la formule de Poincaré à deux rationnels de même dénominateur : $\frac{p_1}{q}$ et $\frac{p_2}{q}$.
$\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q} = \frac{p_1q + p_2q - p_1p_2}{q^2} = \frac{-p_1p_2 + (p_1+p_2)q}{q^2}$. Si l'on note σ_2 le produit p_1p_2 et σ_1 la somme $p_1 + p_2$, le résultat s'écrit :

$$\frac{-\sigma_2 + q\sigma_1}{q^2}.$$

Effectuons un calcul similaire avec trois rationnels au lieu de deux : $\frac{p_1}{q}$, $\frac{p_2}{q}$ et $\frac{p_3}{q}$. Le résultat s'écrira :

$$\frac{+\sigma_3 - q\sigma_2 + q^2\sigma_1}{q^3}$$

avec σ_3 valant le produit des trois numérateurs, σ_2 valant la somme des produits des numérateurs pris deux à deux et σ_1 valant la somme des trois numérateurs.

Au niveau suivant, on a à effectuer le calcul :
$\frac{p_1p_2p_3 - q(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)+q^2(p_1+p_2+p_3)}{q^3} + \frac{p_4}{q} - \frac{p_4}{q}.\frac{p_1p_2p_3 - q(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)+q^2(p_1+p_2+p_3)}{q^3}$.

On obtient une somme de termes que l'on peut écrire symboliquement pour l'alléger de la manière suivante :

$$\frac{-\sigma_4 + q\sigma_3 - q^2\sigma_2 + q^3\sigma_1}{q^4}.$$

Au niveau 5, on aboutit à :

$$\frac{+\sigma_5 - q\sigma_4 + q^2\sigma_3 - q^3\sigma_2 + q^4\sigma_1}{q^5}.$$

On voit que si l'on souhaite majorer les résultats successifs des calculs, en ne se préoccupant que des termes des sommes qui sont précédés du signe $+$, ces termes sont toujours multipliés par des sommes de produits faisant intervenir un nombre impair de numérateurs.
Rappelons les connaissances dont on dispose :

- la définition récursive de la fonction f de calcul des divisibles qui fournit les numérateurs des fractions rationnelles représentant la probabilité de l'un des deux décomposants de $2x$ d'être composé (divisible par $2k+1$) ;
- le fait que les dénominateurs des fractions rationnelles sont augmentés de 1 tous les deux nombres pairs ;
- le fait que lorsque $2x$ est un carré, on ajoute à l'ensemble des probabilités une probabilité supplémentaire majorable par $2(\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \rceil) - 1$;
- les formules de calcul de la formule de Poincaré sur des ensembles de fractions rationnelles lorsqu'elles sont toutes de même dénominateur.

5 Conclusion

Si l'on arrive à démontrer[3] que $Poincaré(2x)$ est toujours inférieur ou égal à $\frac{x-4}{x-2} = 1 - \frac{2}{x-2}$, cela sera équivalent à $1 - Poincaré(2x) \geq \frac{2}{x-2}$ mais comme $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \geq \frac{x-2}{2}$, on aura alors $(1 - Poincaré(2x)\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \geq 1$, qui équivaut à $NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq 1$.

On arriverait alors à :

Théorème 5.1 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$$\forall\ 2x \geq 24,\ NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq (1 - Poincare(2x))\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$$

Théorème 5.2 (Conclusion)

$$\forall\ 2x \geq 34,\ NombreDeDécomposantsDeGoldbach(2x) \geq 1.$$

[3]ce que je ne sais pas faire.

Annexe 1 : Une nouvelle caractérisation des nombres premiers

Fournissons une nouvelle caractérisation des nombres premiers, qui est basée sur la fonction récursive f.

Définition 5.1 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x,k), 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *Double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est "un peu" le double de l'autre (i.e. les coordonnées de même position des deux n-uplets sont soit identiques, soit la seconde coordonnée est le double de la première).

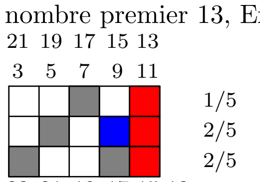
Définition 5.2 (Définition de la fonction *Double*)

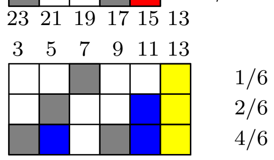
$$Double(2x,2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1, \ldots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \ldots, b_n), \\ \forall\, 1 \ \leq i \leq \ min(m,n),\ a_i \ = \ b_i \ ou \ a_i \ = \ 2.b_i. \end{cases}$$

$$Premier(x) \iff \exists\, k \ \geq \ 6, (\ x = 2k+1) \wedge (Double(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

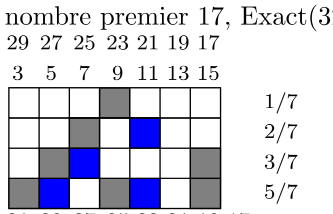
Observons les grilles associées aux doubles de nombres premiers conjointement à celles du double de leur prédécesseur.

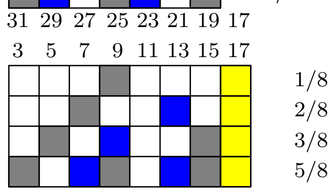
- nombre premier 13, Exact(24) = (2,2,1), Exact(26) = (4,2,1).





- nombre premier 17, Exact(32) = (5,3,2,1), Exact(34) = (5,3,2,1).

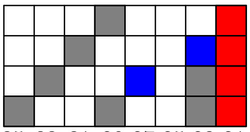




- nombre premier 19, Exact(36) = (3,3,2,1), Exact(38) = (6,3,2,2).

33 31 29 27 25 23 21 19

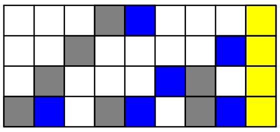
3 5 7 9 11 13 15 17



1/8
2/8
3/8
3/8

35 33 31 29 27 25 23 21 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19

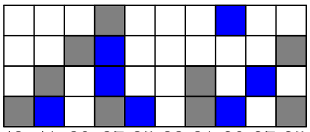


2/9
2/9
3/9
6/9

- nombre premier 23, Exact(44) = (7,4,3,2), Exact(46) = (7,4,3,2).

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

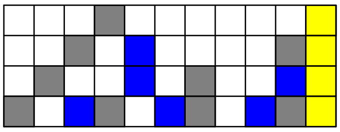
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



2/10
3/10
4/10
7/10

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

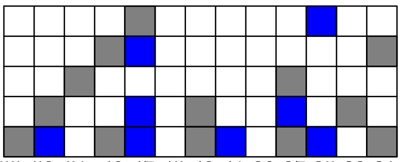


2/11
3/11
4/11
7/11

- nombre premier 29, Exact(56) = (9,5,2,3,2), Exact(58) = (9,5,4,3,2).

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

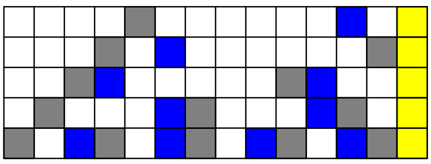
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27



2/13
3/13
2/13
5/13
9/13

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

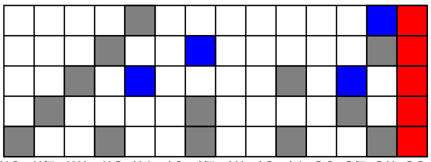


2/14
3/14
4/14
5/14
9/14

- nombre premier 31, Exact(60) = (5,3,4,3,2), Exact(62) = (10,6,4,3,2).

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

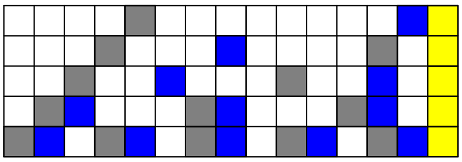
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29



2/14
3/14
4/14
3/14
5/14

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

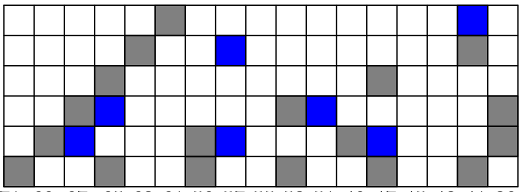


2/15
3/15
4/15
6/15
10/15

- nombre premier 37, Exact(72) = (6,7,5,2,3,2), Exact(74) = (12,7,5,4,3,2).

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

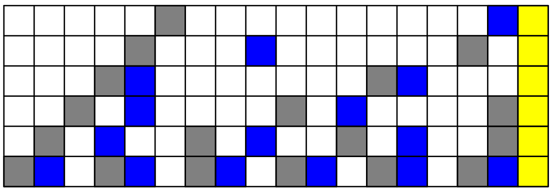
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35



2/17
3/17
2/17
5/17
7/17
6/17

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

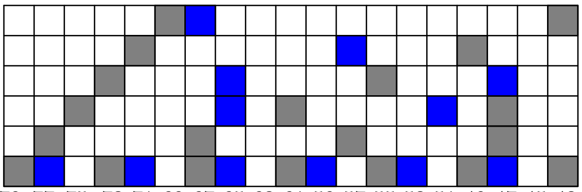


2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18 [74:P 5 2 1]

- nombre premier 41, Exact(80) = (13,4,5,4,3,3), Exact(82) = (13,8,5,4,3,3).

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41

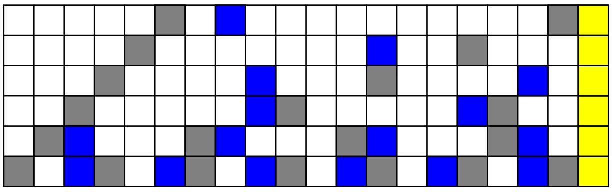
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39



3/19
3/19
4/19
5/19
4/19
13/19

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

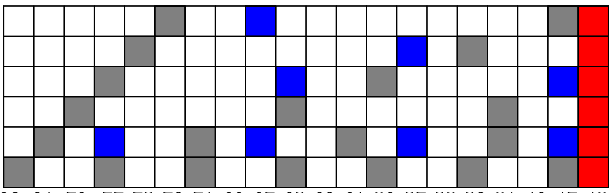


3/20
3/20
4/20
5/20
8/20
13/20 [82:P 5 3 1]

- nombre premier 43, Exact(84) = (7,8,3,4,3,3), Exact(86) = (14,8,6,4,3,3).

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43

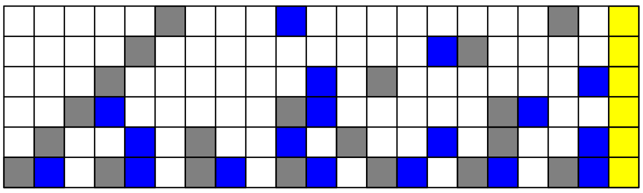
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41



3/20
3/20
4/20
3/20
8/20
7/20 [84:J 6 5 3]

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43

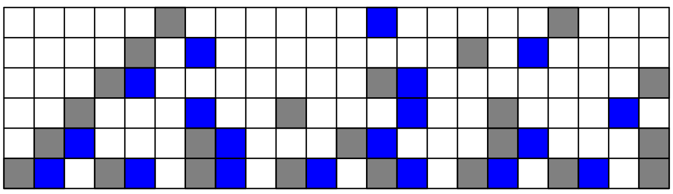


3/21
3/21
4/21
6/21
8/21
14/21 [86:P 5 2 1]

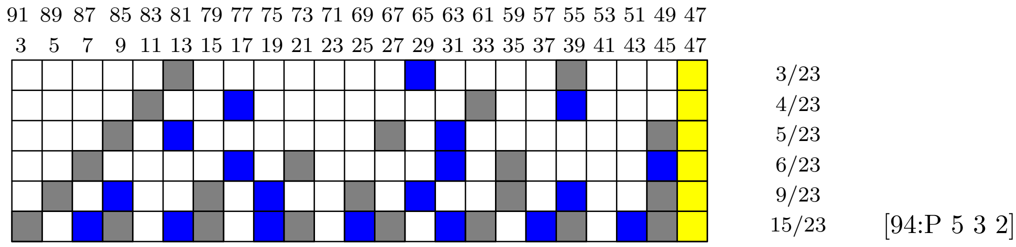
- nombre premier 47, Exact(92) = (15,9,6,5,4,3), Exact(94) = (15,9,6,5,4,3).

89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45



3/22
4/22
5/22
6/22
9/22
15/22 [92 4 2 1]



La caractérisation des nombres pairs compris entre deux nombres premiers jumeaux est similaire à la caractérisation des nombres premiers proposée ci-dessus : on définit une fonction $MoitiéDuSucc(2x, 2y)$ de la façon suivante :

Définition 5.3 (Définition de la fonction $MoitiéDuSucc$)

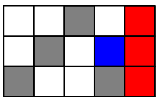
$$MoitiéDuSucc(2x, 2y) \iff \begin{cases} Exact(2x) = (a_1, \ldots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \ldots, b_n), \\ \forall\, 1 \ \leq i \leq \ min(m, n),\ a_i \ = \ b_i \ ou\ a_i \ = \ \frac{1}{2}.(b_i + 1). \end{cases}$$

$$EntreJumeaux(x) \iff \exists\, k \ \geq \ 6, (\ x = 2k) \wedge (MoitiéDuSucc(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$

Annexe 2 : Représentation graphique de certains décomposants de Goldbach

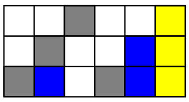
Les grilles ci-dessous sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 24 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ correspond à l'un des deux nombres impairs $2i+1$ et $2x-2i-1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). A droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (cela est représenté également par la coloration en jaune ou rouge de la dernière colonne qui ne présente ni case noire, ni case bleue). Puis sont fournies à droite des grilles d'une part les fractions rationnelles représentant pour chaque ligne la proportion de cases colorées en noir ou bleu, rapportée au nombre de colonnes de la grille. Enfin, à côté du nombre pair, on indique le nombre réel de décompositions de Goldbach de ce nombre, le nombre effectif de colonnes sans cases colorées de la grille, et le nombre de décomposants de Goldbach obtenu par minoration.

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11



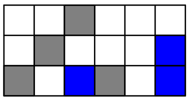
1/5
2/5
2/5 [24:J 3 1 1]

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13



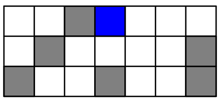
1/6
2/6
4/6 [26:P 3 1 1]

25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13



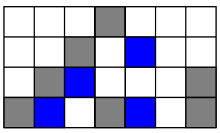
1/6
2/6
4/6 [28 2 1 1]

27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15



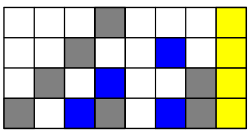
2/7
2/7
3/7 [30 3 2 2]

29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15



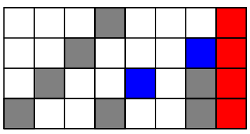
1/7
2/7
3/7
5/7 [32 2 1 0]

31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17



1/8
2/8
3/8
5/8 [34:P 4 2 1]

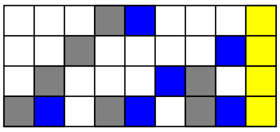
33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17



1/8
2/8
3/8
3/8 [36:J 4 2 2]

35 33 31 29 27 25 23 21 19

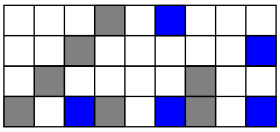
3 5 7 9 11 13 15 17 19



2/9
2/9
3/9
6/9 [38:P 2 1 1]

37 35 33 31 29 27 25 23 21

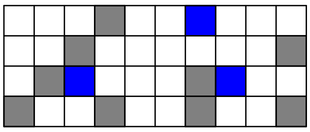
3 5 7 9 11 13 15 17 19



2/9
2/9
2/9
6/9 [40 3 1 1]

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21

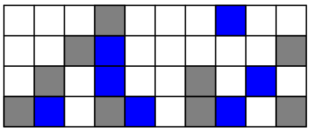
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



2/10
2/10
4/10
4/10 [42 4 3 2]

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

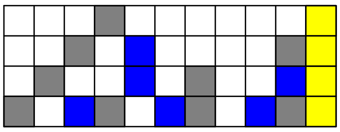
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21



2/10
3/10
4/10
7/10 [44 3 1 1]

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23

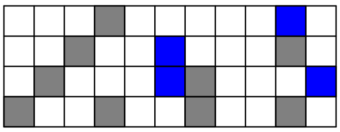
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



2/11
3/11
4/11
7/11 [46:P 4 2 1]

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

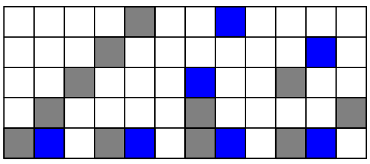
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23



2/11
3/11
4/11
4/11 [48 5 3 2]

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25

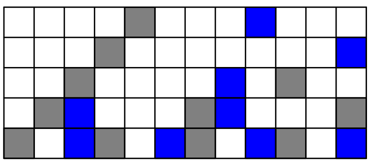
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25



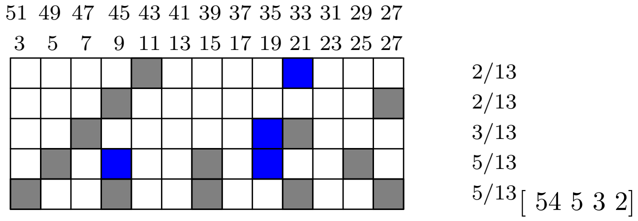
2/12
2/12
3/12
3/12
8/12 [50 4 2 1]

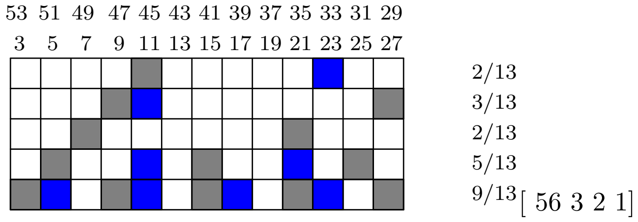
49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27

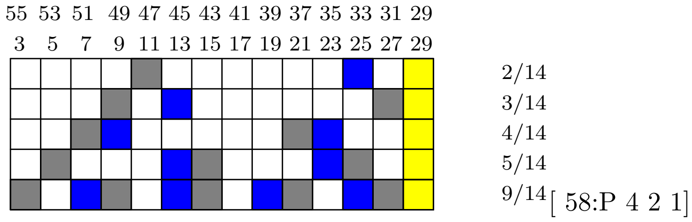
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

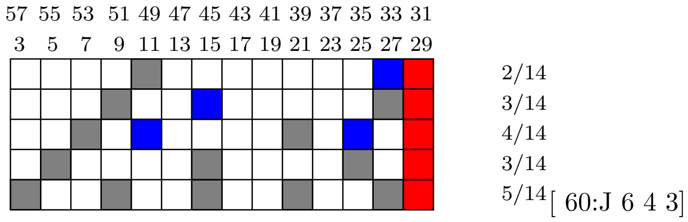


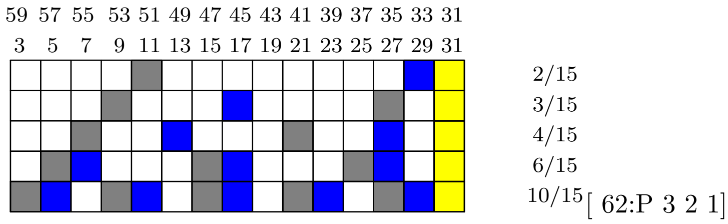
2/12
2/12
3/12
5/12
8/12 [52 3 1 1]

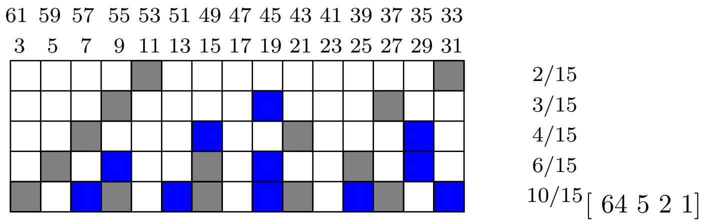

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27
2/13
2/13
3/13
5/13
5/13 [54 5 3 2]

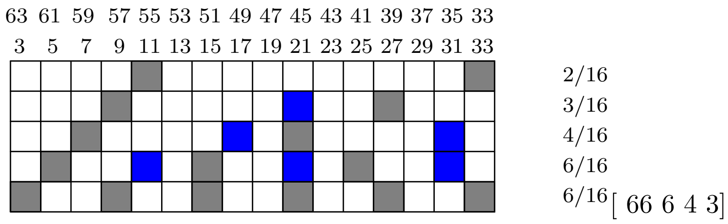

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27
2/13
3/13
2/13
5/13
9/13 [56 3 2 1]

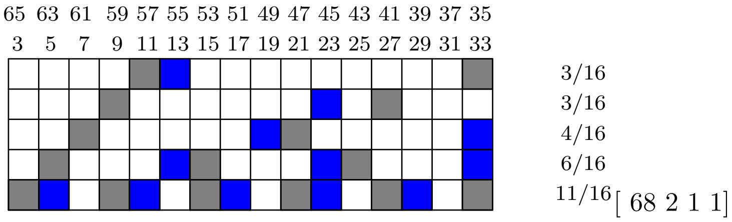

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
2/14
3/14
4/14
5/14
9/14 [58:P 4 2 1]

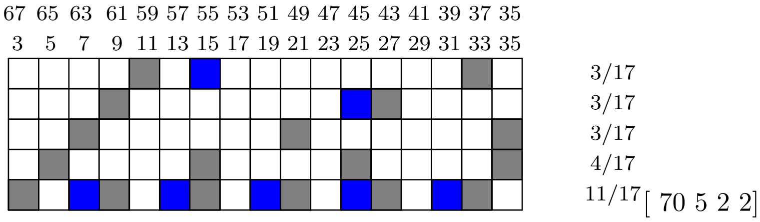

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29
2/14
3/14
4/14
3/14
5/14 [60:J 6 4 3]

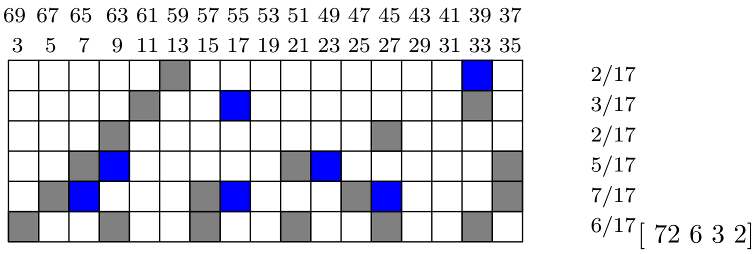

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
2/15
3/15
4/15
6/15
10/15 [62:P 3 2 1]

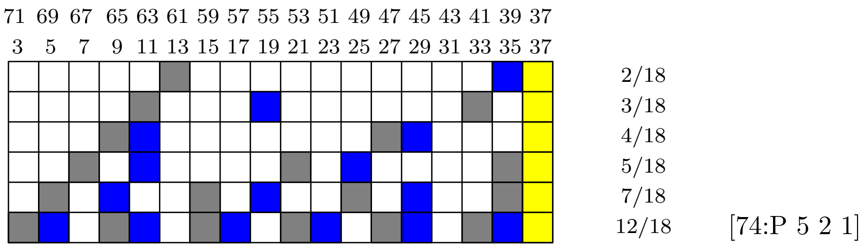

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
2/15
3/15
4/15
6/15
10/15 [64 5 2 1]

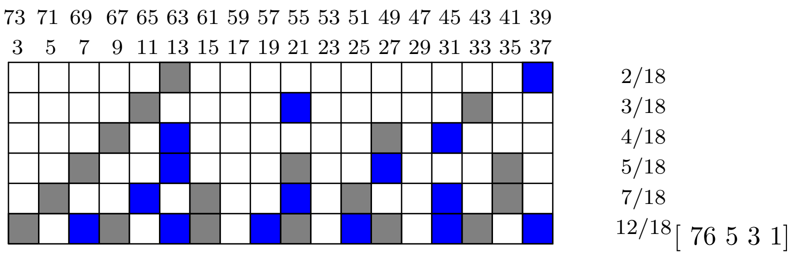

63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
2/16
3/16
4/16
6/16
6/16 [66 6 4 3]

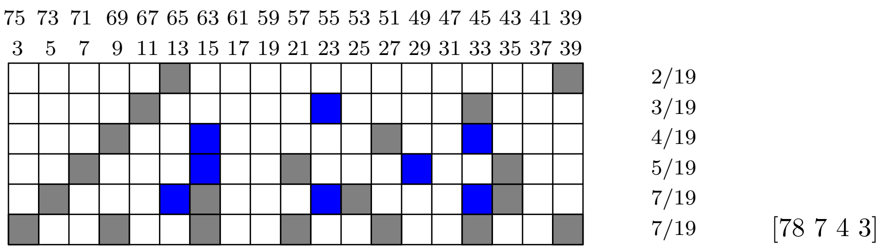

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
3/16
3/16
4/16
6/16
11/16
[68 2 1 1]

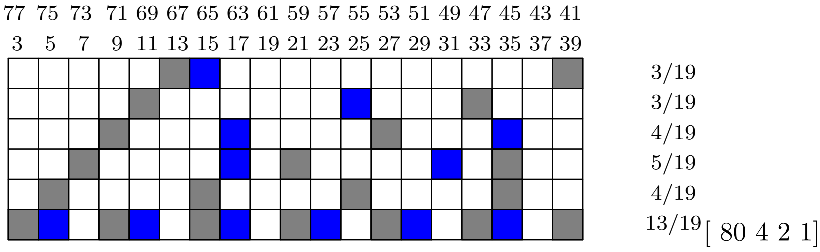

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
3/17
3/17
3/17
4/17
11/17
[70 5 2 2]

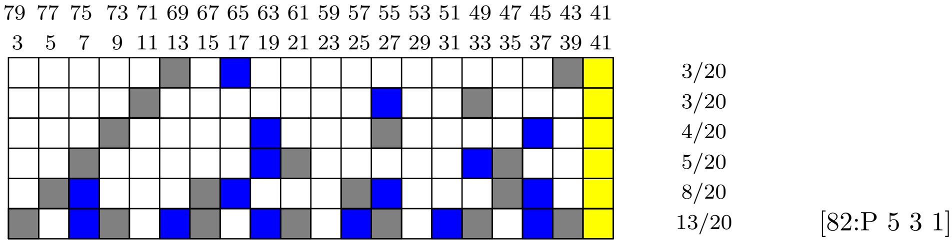

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
2/17
3/17
2/17
5/17
7/17
6/17
[72 6 3 2]

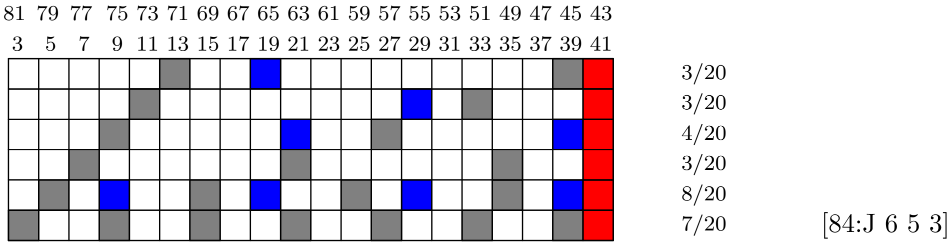

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18
[74:P 5 2 1]

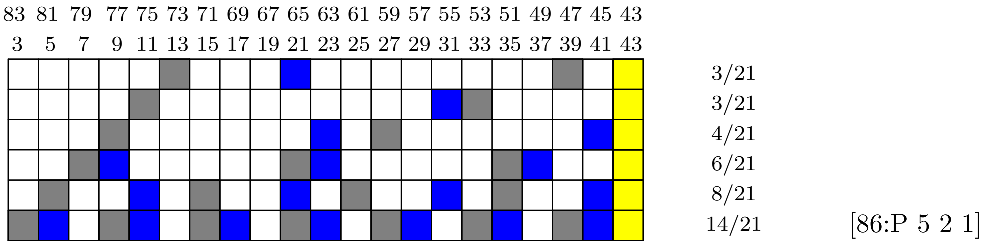

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37
2/18
3/18
4/18
5/18
7/18
12/18
[76 5 3 1]

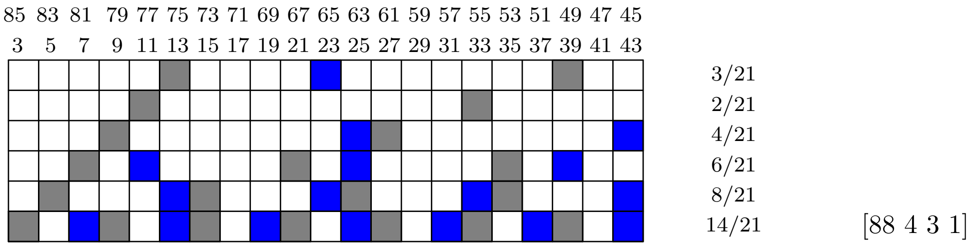

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
2/19
3/19
4/19
5/19
7/19
7/19
[78 7 4 3]

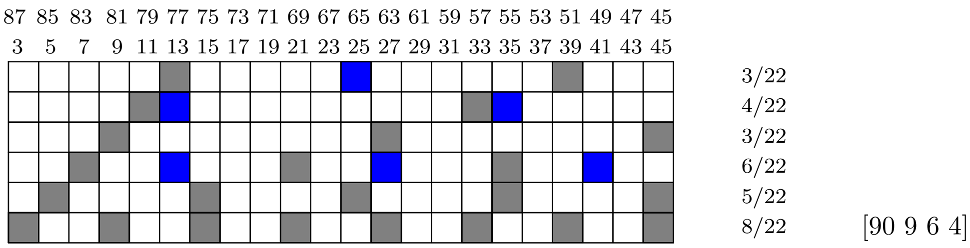

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
3/19
3/19
4/19
5/19
4/19
13/19
[80 4 2 1]

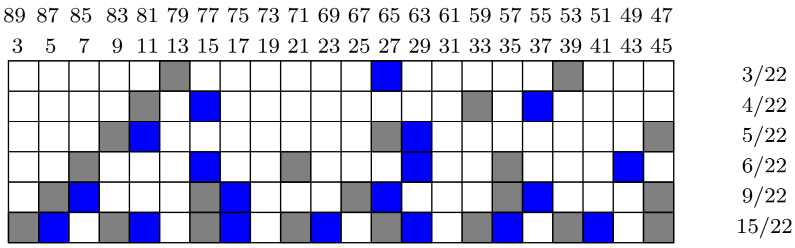

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3/20
3/20
4/20
5/20
8/20
13/20
[82:P 5 3 1]


81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41
3/20
3/20
4/20
3/20
8/20
7/20
[84:J 6 5 3]

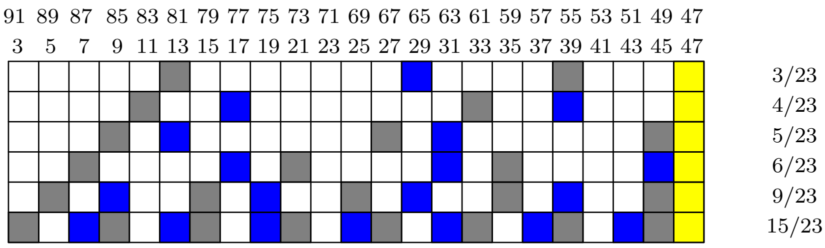

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3/21
3/21
4/21
6/21
8/21
14/21
[86:P 5 2 1]


85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43
3/21
2/21
4/21
6/21
8/21
14/21
[88 4 3 1]

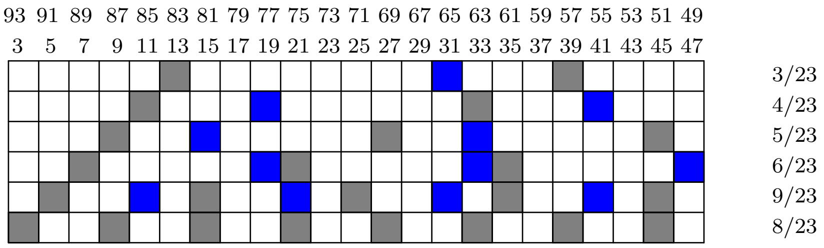

87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45
3/22
4/22
3/22
6/22
5/22
8/22
[90 9 6 4]



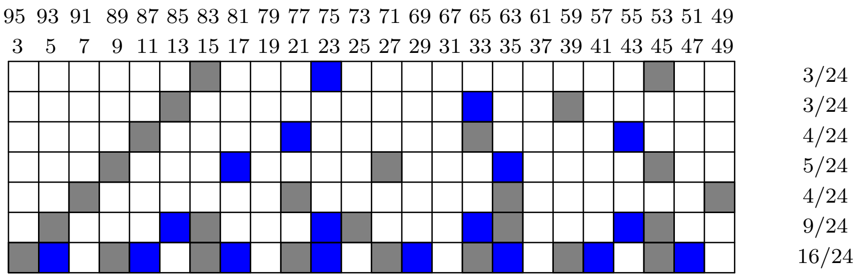
[92 4 2 1]



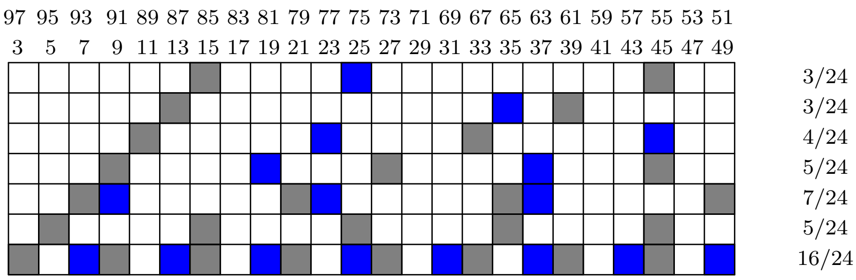
[94:P 5 3 2]



[96 7 5 3]



[98 3 3 2]



[100 6 4 2]

Annexe 3 : Ensembles $Probas(2x)$, et leur valeur de Poincaré$(2x)$ comparée à $\frac{x-4}{x-2})pour$ **2x**$comprisentre$**24**et**100**

$Probas(24) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$.
$Poincaré(24) = 0.712$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{8}{10} = 0.8$.

Probas(26) $= \left\{\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right\}$.
$Poincaré(26) = 0.814815$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{9}{11} = 0.8181$.

Probas(28) $= \left\{\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right\}$.
$Poincaré(28) = 0.814815$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{10}{12} = 0.8333$.

Probas(30) $= \left\{\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right\}$.
$Poincaré(30) = 0.708455$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{11}{13} = 0.846153$.

Probas(32) $= \left\{\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right\}$.
$Poincaré(32) = 0.900042$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{12}{14} = 0.85714$.

Probas(34) $= \left\{\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
$Poincaré(34) = 0.846191$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{13}{15} = 0.8666$.

Probas(36) $= \left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right\}$.
$Poincaré(36) = 0.743652$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{14}{16} = 0.875$.

Probas(38) $= \left\{\frac{6}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.
$Poincaré(38) = 0.865569$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{15}{17} = 0.8823$.

Probas(40) $= \left\{\frac{6}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.
$Poincaré(40) = 0.843164$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{16}{18} = 0.888888$.

Probas(42) $= \left\{\frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}\right\}$.
$Poincaré(42) = 0.7696$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{17}{19} = 0.894736$.

Probas(44) $= \left\{\frac{7}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right\}$.
$Poincaré(44) = 0.8992$.
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{18}{20} = 0.9$.

Probas(46) $= \left\{\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right\}$.
$Poincaré(46) = 0.862304$.

$\frac{x-4}{x-2} = \frac{19}{21} = 0.904761.$

$\text{Probas}(48) = \left\{\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right\}.$
$Poincaré(48) = 0.759033.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{20}{22} = 0.9090.$

$\text{Probas}(50) = \left\{\frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12}\right\}.$
$Poincaré(50) = 0.869792.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{21}{23} = 0.913043.$

$\text{Probas}(52) = \left\{\frac{8}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{2}{12}\right\}.$
$Poincaré(52) = 0.898727.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{22}{24} = 0.916666.$

$\text{Probas}(54) = \left\{\frac{5}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right\}.$
$Poincaré(54) = 0.791432.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{23}{25} = 0.92.$

$\text{Probas}(56) = \left\{\frac{9}{13}, \frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right\}.$
$Poincaré(56) = 0.895716.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{24}{26} = 0.923076.$

$\text{Probas}(58) = \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}, \frac{3}{14}, \frac{2}{14}\right\}.$
$Poincaré(58) = 0.889555.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{25}{27} = 0.925925.$

$\text{Probas}(60) = \left\{\frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{14}, \frac{3}{14}, \frac{2}{14}\right\}.$
$Poincaré(60) = 0.757021.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{26}{28} = 0.928571.$

$\text{Probas}(62) = \left\{\frac{10}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}\right\}.$
$Poincaré(62) = 0.898311.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{27}{29} = 0.931034.$

$\text{Probas}(64) = \left\{\frac{10}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}\right\}.$
$Poincaré(64) = 0.898311.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{28}{30} = 0.933333.$

$\text{Probas}(66) = \left\{\frac{6}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}\right\}.$
$Poincaré(66) = 0.791718.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{29}{31} = 0.935483.$

$\text{Probas}(68) = \left\{\frac{11}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right\}.$
$Poincaré(68) = 0.903297.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{30}{32} = 0.9375.$

$\text{Probas}(70) = \left\{\frac{11}{17}, \frac{4}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}, \frac{3}{17}\right\}.$
$Poincaré(70) = 0.849258.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{31}{33} = 0.939393.$

$\text{Probas}(72) = \left\{\frac{6}{17}, \frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \frac{2}{17}\right\}.$
$Poincaré(72) = 0.827737.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{32}{34} = 0.941176.$

$\text{Probas}(74) = \left\{\frac{12}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}\right\}.$
$Poincaré(74) = 0.91524.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{33}{35} = 0.942857.$

$\text{Probas}(76) = \left\{\frac{12}{18}, \frac{7}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}\right\}.$
$Poincaré(76) = 0.91524.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{34}{36} = 0.944444.$

$\text{Probas}(78) = \left\{\frac{7}{19}, \frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}, \frac{2}{19}\right\}.$
$Poincaré(78) = 0.825165.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{35}{37} = 0.945945.$

$\text{Probas}(80) = \left\{\frac{13}{19}, \frac{4}{19}, \frac{5}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}, \frac{3}{19}\right\}.$
$Poincaré(80) = 0.897156.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{36}{38} = 0.947368.$

$\text{Probas}(82) = \left\{\frac{13}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{4}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}.$
$Poincaré(82) = 0.908965.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{37}{39} = 0.948717.$

$\text{Probas}(84) = \left\{\frac{7}{20}, \frac{8}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right\}.$
$Poincaré(84) = 0.808393.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{38}{40} = 0.95.$

$\text{Probas}(86) = \left\{\frac{14}{21}, \frac{8}{21}, \frac{6}{21}, \frac{4}{21}, \frac{3}{21}, \frac{3}{21}\right\}.$
$Poincaré(86) = 0.912338.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{39}{41} = 0.951219.$

$\text{Probas}(88) = \left\{\frac{14}{21}, \frac{8}{21}, \frac{6}{21}, \frac{4}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}\right\}.$
$Poincaré(88) = 0.907468.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{40}{42} = 0.9523.$

$\text{Probas}(90) = \left\{\frac{8}{22}, \frac{5}{22}, \frac{6}{22}, \frac{3}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}\right\}.$
$Poincaré(90) = 0.781757.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{41}{43} = 0.953488.$

$\text{Probas}(92) = \left\{\frac{15}{22}, \frac{9}{22}, \frac{6}{22}, \frac{5}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}\right\}.$
$Poincaré(92) = 0.925338.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{42}{44} = 0.954545.$

$\text{Probas}(94) = \left\{\frac{15}{23}, \frac{9}{23}, \frac{6}{23}, \frac{5}{23}, \frac{4}{23}, \frac{3}{23}\right\}.$
$Poincaré(94) = 0.912026.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{43}{45} = 0.955555.$

$\text{Probas}(96) = \left\{\frac{8}{23}, \frac{9}{23}, \frac{6}{23}, \frac{5}{23}, \frac{4}{23}, \frac{3}{23}\right\}.$
$Poincaré(96) = 0.835048.$

$\frac{x-4}{x-2} = \frac{44}{46} = 0.956521.$

$\text{Probas}(98) = \left\{\frac{16}{24}, \frac{9}{24}, \frac{4}{24}, \frac{5}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24}\right\}.$
$Poincaré(98) = 0.912309.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{45}{47} = 0.957446.$

$\text{Probas}(100) = \left\{\frac{16}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{4}{24}, \frac{3}{24}, \frac{3}{24}\right\}.$
$Poincaré(100) = 0.905586.$
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{46}{48} = 0.958333.$