Annexe proposée par l'ia claude à la note *Trois avatars d'une même fractalité* demandée par Denise Vella-Chemla à l'ia chatgpt, septembre 2026

La note ci-dessous a été intégralement rédigée par l'ia claude.

Résumé

Cette annexe reprend trois points laissés ouverts, ou évoqués sans être développés, dans les trois notes
https://denisevellachemla.eu/1-castaf.pdf,
https://denisevellachemla.eu/2-castaf.pdf et
https://denisevellachemla.eu/3-castaf.pdf :

(1) rendre rigoureuse la dimension 1 de l'ensemble de la Castafiore, là où le calcul original ne prouve qu'une estimation aux échelles t_k ;

(2) situer précisément le plongement Snurpf dans la théorie classique des entiers profinis $\widehat{\mathbb{Z}}$;

(3) relier explicitement la suite fractale des valuations p-adiques à la formule de Legendre sur $v_p(n!)$.

Le premier point aboutit à une démonstration complète (via la théorie des ensembles de Moran homogènes) ;
le second point clarifie une question mal posée plutôt qu'il ne la résout par un résultat nouveau ;
le troisième point fournit une identité exacte utile comme outil de calcul, mais qui ne rapproche pas, en tant que telle, de la conjecture de Goldbach.

1. La dimension de l'ensemble de la Castafiore comme ensemble de Moran homogène

1.1. Où bloque l'argument initial

Reprenons les notations du texte *Ensemble de la Castafiore : dimension, mesure et porosité*. On note $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots$ la suite des nombres premiers, et

$$t_k = \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{k}\frac{p_j - 1}{2p_j}, \qquad M_k = 2^{k-1}$$

la longueur commune et le nombre des intervalles conservés au niveau k. Le texte établit correctement que $\log M_k / \log(1/t_k) \to 1$, mais signale lui-même que ceci ne prouve, au mieux, qu'une dimension de boîte évaluée *aux échelles particulières* t_k, et non une dimension de Hausdorff sur *toutes* les échelles ε.

La méthode la plus classique pour combler cet écart ([2], exemple des "ensembles de Cantor généralisés") exige une condition de séparation : que l'écart (le "trou") introduit à chaque niveau ne

soit pas trop petit devant la longueur des intervalles du niveau suivant. Calculons cet écart. Un intervalle parent de longueur t_{k-1} donne naissance à deux intervalles de longueur t_k, avec au milieu un trou de longueur

$$g_k = t_{k-1} - 2t_k = t_{k-1}\left(1 - \frac{p_k - 1}{p_k}\right) = \frac{t_{k-1}}{p_k}.$$

Le rapport pertinent pour la condition de Falconer est

$$\frac{g_k}{t_k} = \frac{t_{k-1}/p_k}{t_{k-1}(p_k-1)/(2p_k)} = \frac{2}{p_k - 1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

C'est exactement ici que le calcul du texte original ne peut pas être complété par la méthode la plus simple : le trou introduit à chaque étape devient, en proportion, arbitrairement petit devant la taille des intervalles qu'il sépare, à mesure que $p_k \to \infty$. La condition de séparation usuelle échoue, et ce n'est pas un simple défaut de rédaction du texte original : c'est une propriété réelle de la construction (cohérente avec le calcul de porosité $\nu_k \sim 1/p_k \to 0$ de la section 8 du texte, qui est le symptôme exact du même phénomène).

1.2. Le bon cadre : les ensembles de Moran homogènes

Heureusement, la construction décrite dans le texte est un exemple manuel d'une classe très étudiée en géométrie fractale : les *ensembles de Moran homogènes* (*homogeneous Moran sets*), pour lesquels la condition de trou minoré n'est pas nécessaire.

Définition 1. *([1]) Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 2 et $(c_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels de $(0,1)$ avec $n_k c_k \leq 1$ pour tout k. On construit récursivement une collection d'intervalles fermés $\{J_\sigma\}$, indexés par les mots finis σ sur l'alphabet correspondant, telle que $J_\emptyset = J$ et que chaque J_σ (de longueur ℓ_σ) contienne exactement n_{k+1} sous-intervalles $J_{\sigma 1}, \ldots, J_{\sigma n_{k+1}}$ (disjoints, rangés de gauche à droite, sans condition sur la taille des trous entre eux) chacun de longueur $c_{k+1}\,\ell_\sigma$. L'ensemble*

$$E = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{|\sigma|=k} J_\sigma$$

est appelé ensemble de Moran homogène déterminé par $J, (n_k), (c_k)$.

La construction de la Castafiore correspond exactement à $n_k = 2$ pour tout k et $c_k = (p_k - 1)/(2p_k)$: à chaque niveau, tous les intervalles survivants subissent *le même* partage en deux, dans le même rapport, quel que soit leur branche d'origine - c'est précisément l'hypothèse d'homogénéité.

Théorème 2. *([1]) Pour un ensemble de Moran homogène E déterminé par $J, (n_k), (c_k)$,*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_1 n_2 \cdots n_k)}{-\log(c_1 c_2 \cdots c_{k+1}\, n_{k+1})} \;\leq\; \dim_H(E) \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_1 n_2 \cdots n_k)}{-\log(c_1 c_2 \cdots c_k)}.$$

Le point essentiel est que ce théorème *ne suppose rien* sur la taille des trous entre intervalles : c'est exactement la généralité dont on a besoin ici. (Une hypothèse supplémentaire de régularité des trous - les *homogeneous perfect sets* de Wen et Wu - donnerait l'égalité exacte au lieu d'un encadrement, mais on va voir qu'on n'en a même pas besoin).

1.3. Application à la Castafiore

Avec $n_k = 2$, $\log(n_1 \cdots n_k) = k \log 2$. Le texte original établit déjà, via le théorème de Mertens,

$$-\log(c_1 \cdots c_k) = \log(1/t_k) = k \log 2 + O(\log \log p_k).$$

La borne supérieure du théorème 2 vaut donc

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{k \log 2}{k \log 2 + O(\log \log p_k)} = 1.$$

Pour la borne inférieure, le dénominateur $-\log(c_1 \cdots c_{k+1} n_{k+1})$ ne diffère de $-\log(c_1 \cdots c_k)$ que par les termes $-\log c_{k+1} + \log 2 = O(1)$, absorbés eux aussi dans le $O(\log \log p_{k+1})$. La borne inférieure tend donc *également* vers 1.

Proposition 3. *L'ensemble de la Castafiore, en tant qu'ensemble de Moran homogène de paramètres $n_k = 2$, $c_k = (p_k - 1)/(2p_k)$, vérifie*

$$\dim_H(E) = 1.$$

Démonstration. Les deux bornes du théorème 2 encadrent $\dim_H(E)$ et convergent toutes deux vers 1 (calcul ci-dessus), donc $\dim_H(E) = 1$.

□

Remarque : c'est un point qui mérite d'être souligné : la difficulté ressentie dans le texte original ("il faudrait contrôler $N(E, \varepsilon)$ à toutes les échelles, pas seulement aux échelles t_k") est réelle *pour la méthode de recouvrement naïve*, mais elle ne l'est plus dans le cadre de Moran, où c'est précisément le contrôle simultané des deux bornes (obtenu ici via Mertens, pas via une hypothèse de séparation) qui referme l'argument. Autrement dit : ce n'est pas la preuve qui manquait, c'est le nom de la boîte à outils. La démonstration ci-dessus est complète, sous la seule réserve de vérifier soigneusement, au moment de la rédaction finale, que l'indexation choisie ici ($n_1, \ldots, n_k$ correspondant exactement aux k premiers niveaux de partage) coïncide bien avec celle, légèrement décalée, du texte original - un point de bureaucratie d'indices, non un point conceptuel.

1.4. Ce que cela n'établit pas

La dimension de Hausdorff égale à 1 ne dit rien de la mesure : on a bien, comme le texte le montre indépendamment (Mertens, troisième théorème), $\mathcal{L}^1(E) = 0$.

La coexistence dimension 1 / mesure nulle n'est pas paradoxale (un ensemble de Moran homogène peut avoir n'importe quelle combinaison de ces deux invariants), mais elle est maintenant établie des deux côtés par des arguments complets, et non plus par un indice numérique d'un côté (section 5) et un théorème classique de l'autre (section 6).

2. Snurpf et les entiers profinis

2.1. Où se situe exactement le plongement Snurpf

Le plongement de la note *Trois avatars d'une même fractalité* https://denisevellachemla.eu/2-castaf.pdf est

$$\iota : \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \qquad \iota(n) = (n \bmod p)_p.$$

Il faut le distinguer de l'anneau des **entiers profinis**

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \;\cong\; \prod_p \mathbb{Z}_p,$$

où $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques *complets* (pas seulement le quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). L'isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$ est lui-même une conséquence du théorème des restes chinois, appliqué non pas à un seul niveau $\bmod p$ mais à tous les niveaux $\bmod p^k$ simultanément, pour tout k.

Le Snurpf, tel que décrit, ne retient que le premier étage de chaque tour p-adique (le reste $\bmod p$, pas $\bmod p^2, p^3, \ldots$). C'est donc une version *strictement plus grossière* que le plongement profini complet. L'espace ambiant $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ du Snurpf est un quotient de $\widehat{\mathbb{Z}}$, pas $\widehat{\mathbb{Z}}$ lui-même.

Remarque : [une extension naturelle] Il serait immédiat, et fidèle à l'esprit du texte, d'enrichir le Snurpf en gardant *toute la tour* des restes $n \bmod p^k$ pour chaque p premier et chaque $k \geq 1$ (ce qui revient à retenir le développement p-adique complet de n pour chaque p). On obtient alors exactement le plongement standard $\mathbb{N} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$, dont l'image est dense pour la topologie produit. Le maillage torique de la section 3.2 du texte se généraliserait alors en un maillage où chaque "anneau" de modulus p est remplacé par une tour infinie d'anneaux emboîtés (les classes $\bmod p, p^2, p^3, \ldots$), retrouvant la structure standard de $\mathbb{Z}_p$ comme arbre p-adique.

2.2. Développement explicite : la tour p-adique complète

2.2..1 Le plongement enrichi

Pour chaque nombre premier p, l'anneau des entiers p-adiques est lui-même une limite projective

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z},$$

et l'inclusion canonique $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ envoie n sur la suite cohérente $\left(n \bmod p^k\right)_{k\geq 1}$. On enrichit le Snurpf en remplaçant, pour chaque p, le simple reste $n \bmod p$ par toute la tour de restes $n \bmod p^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\iota_\infty : \mathbb{N} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} := \prod_p \mathbb{Z}_p, \qquad \iota_\infty(n) = \Big(\left(n \bmod p^k\right)_{k\geq 1} \Big)_p.$$

L'isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est exactement le théorème des restes chinois appliqué simultanément à tous les niveaux p^k de tous les premiers p : c'est très précisément l'objet annoncé en section 2.1, cette fois construit explicitement plutôt qu'invoqué par son nom.

Proposition 4. *ι_∞ est injective sur $\mathbb{N}$ (et s'étend en un plongement injectif de $\mathbb{Z}$), et son image est dense dans $\widehat{\mathbb{Z}}$ pour la topologie produit.*

Démonstration. L'injectivité découle déjà de l'injectivité du Snurpf grossier (un seul niveau $k = 1$ suffit, cf. section 2 du texte principal). La densité est le fait standard que $\mathbb{Z}$ est dense dans $\widehat{\mathbb{Z}}$: pour toute condition portant sur un nombre fini de couples (p, k), le théorème des restes chinois fournit un entier la satisfaisant exactement. □

2.2..2 Chaque facteur devient un arbre, pas un cercle

La tour $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ s'identifie naturellement à l'ensemble des branches infinies d'un arbre p-aire enraciné : la racine se divise en p fils (les classes mod p), chacun de ces fils se divise à son tour en p petits-fils (les classes mod p^2 affinant la classe mod p), et ainsi de suite. Topologiquement, cet arbre est exactement l'espace de Cantor $\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$.

Un entier n y correspond à la branche dont les chiffres (coefficients de son développement en base p) sont nuls à partir d'un certain rang - c'est la traduction, chiffre par chiffre et nombre premier par nombre premier, de la phrase déjà présente à la fin de la section 4.3 de la note *Trois avatars d'une même fractalité* https://denisevellachemla.eu/2-castaf.pdf ("les branches infinies effectivement habitées sont celles qui se stabilisent"), rendue ici explicite au niveau d'un seul facteur $\mathbb{Z}_p$ plutôt qu'au niveau du produit entier.

Proposition 5 (lien avec la suite fractale de valuations)**.** *Pour $n \geq 1$, la profondeur à laquelle la branche de $\iota_\infty(n)$ dans l'arbre du facteur p quitte la racine (c'est-à-dire le premier niveau k où le chiffre en base p est non nul) est exactement $v_p(n) = a_p(n)$, la suite fractale de valuations p-adiques étudiée dans Suites fractales de valuations et mise à l'échelle.*

Cette proposition relie directement les trois textes : l'arbre p-adique de la tour enrichie du Snurpf *est*, nombre premier par nombre premier, exactement la même information que la suite $(a_p(n))_n$ du texte 1, et c'est aussi, mise en parallèle sur tous les p simultanément à chaque niveau, l'arbre des congruences du texte 2 - sauf que ce dernier avançait en largeur (un niveau par nouveau premier ajouté) là où la tour p-adique avance en profondeur (un niveau par puissance croissante d'un même premier). Les deux constructions sont deux façons orthogonales de raffiner le même adressage résiduel.

2.2..3 Une métrique naturelle, non euclidienne

La distance $d(p, q)$ introduite en 2016 (section 3.2 du texte 2) est une somme de carrés d'écarts de restes - une métrique de nature euclidienne, plaquée sur un objet dont la structure naturelle est ultramétrique. La tour p-adique suggère la métrique canonique de $\mathbb{Z}_p$,

$$|x - y|_p = p^{-v_p(x-y)},$$

combinée sur l'ensemble des facteurs par une somme sommable (pour rester compatible avec la topologie produit sur un ensemble infini de facteurs) :

$$D(x, y) = \sum_p 2^{-p} \, |x - y|_p = \sum_p 2^{-p} \, p^{-v_p(x-y)}.$$

Cette distance fait de $\widehat{\mathbb{Z}}$ un espace métrique compact, totalement discontinu et parfait - donc homéomorphe, par le théorème de caractérisation de Brouwer, à l'ensemble de Cantor usuel. On retrouve ainsi, par une voie indépendante, exactement le type d'objet ambiant postulé dans *Ensemble de la Castafiore* : un espace de Cantor de cardinal continu contenant $\mathbb{N}$ (a fortiori les nombres premiers) comme sous-ensemble dénombrable dense.

2.2..4 Le maillage torique généralisé

Le maillage à trois dimensions de 2016 (une direction par premier $2, 3, 5$, chaque direction étant un cercle à p points) se généralise en remplaçant chaque cercle par un *solénoïde p-adique* : une tour infinie de cercles emboîtés, le cercle de rang k portant p^k points (les classes mod p^k), chaque point du cercle de rang k se subdivisant en p points du cercle de rang $k+1$. C'est la représentation géométrique usuelle de $\mathbb{Z}_p$ comme solénoïde, et le maillage complet - produit de ces solénoïdes sur tous les premiers - est un modèle concret et dessinable (au moins en coupe, nombre premier par nombre premier) de $\widehat{\mathbb{Z}}$.

En résumé : l'enrichissement proposé ne change pas la philosophie du Snurpf, il en complète chaque coordonnée. Ce qui était un point sur un cercle à p positions devient une branche d'un arbre p-adique infini ; ce qui était une distance euclidienne ad hoc devient la métrique canonique (ultramétrique) de $\widehat{\mathbb{Z}}$; et l'objet obtenu coïncide, cette fois littéralement et pas seulement par analogie, avec les entiers profinis de la section 2.2.

2.3. La "question ouverte" de la section 3.3 est en fait résolue

Le texte pose, en section 3.3, la question de caractériser, parmi les suites cohérentes de $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ou, dans la version enrichie ci-dessus, de $\widehat{\mathbb{Z}}$), celles qui proviennent effectivement d'un entier naturel. Ce n'est pas une question ouverte des mathématiques actuelles : c'est, par construction, la définition même de la limite projective, et sa réponse est classique (voir par exemple [3], ch. II, ou [4], ch. 2).

Proposition 6 (fait classique)**.** *Un élément $(x_N)_N \in \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ provient d'un entier $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si la suite $(x_N)_N$ est stationnaire au sens divisible : il existe n tel que $x_N = n \bmod N$ pour tout N. L'ensemble $\mathbb{N}$ (ou son image dans $\widehat{\mathbb{Z}}$) est dense dans $\widehat{\mathbb{Z}}$ pour la topologie produit, mais $\widehat{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}$ est non dénombrable (de cardinal $2^{\aleph_0}$), tout comme $\mathbb{Z}$ y est dénombrable. Il n'existe pas de caractérisation plus fine, ni plus utile pour la théorie des nombres, que celle-ci : "être une image d'entier", c'est "être compatible à tout niveau fini avec un même entier", ce qui est tautologique une fois la limite projective posée.*

En clair : ce que le texte a déjà écrit à la fin de la section 4.3 ("les branches infinies effectivement habitées sont celles qui se stabilisent") est exactement la réponse à la question posée deux pages avant en section 3.3. Il n'y a donc rien à démontrer de plus ici - mais il y a une clarification utile à apporter, pour éviter de présenter comme ouvert un point déjà refermé par la littérature standard, et pour situer le Snurpf comme cas particulier (le premier étage) d'un objet bien identifié ($\widehat{\mathbb{Z}}$), plutôt que comme une construction sui generis.

3. La formule de Legendre et la suite fractale des valuations

3.1. L'identité exacte

La suite $a_p(n) = v_p(n)$ étudiée dans *Suites fractales de valuations* a une somme partielle qui admet une expression classique fermée, due à Legendre :

Lemme 7 (Legendre)**.**

$$\sum_{n=1}^{N} v_p(n) \;=\; v_p(N!) \;=\; \sum_{i\geq 1} \left\lfloor \frac{N}{p^i} \right\rfloor \;=\; \frac{N - s_p(N)}{p-1},$$

où $s_p(N)$ désigne la somme des chiffres de N écrit en base p.

C'est une réécriture directe de la propriété d'auto-similarité $a_p(pn) = a_p(n) + 1$ mise en avant dans le texte : sommer a_p sur $\{1, \ldots, N\}$ revient à compter, à chaque puissance $p^i \leq N$, le nombre de multiples de p^i dans cet intervalle, ce qui est exactement $\lfloor N/p^i \rfloor$.

3.2. Ce que cela apporte, et ce que cela n'apporte pas

Cette identité donne, immédiatement, la valeur moyenne de $a_p(n)$ sur $\{1, \ldots, N\}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_p(n) = \frac{1}{p-1} + O\left(\frac{\log N}{N}\right),$$

à comparer avec le maximum $H_p(N) = \lfloor \log_p N \rfloor$ étudié dans le texte : la moyenne est bornée $(1/(p-1))$, alors que le maximum croît comme $\log N$. C'est cohérent, et cela complète utilement le texte 1 par une information sur la distribution de $a_p(n)$ (pas seulement son extremum).
Pour $s(n) = v_2(n) + v_3(n)$ de la section 5 du texte 1, on obtient de même, par linéarité,

$$\sum_{n=1}^{N} s(n) = v_2(N!) + v_3(N!) = N\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1}\right) + O(\log N) = \frac{3N}{2} + O(\log N).$$

Honnêteté sur la portée de ce point : cette identité est exacte, utile comme brique de calcul (moyenne, variance, comportement en loi des grands nombres de la suite des valuations), et cohérente avec le crible de Legendre exact déjà en jeu dans votre approche combinatoire de Goldbach (réduction à l'ensemble R_N par inclusion-exclusion sur les résidus $\bmod r \leq \sqrt{N}$). Mais elle ne fournit, en elle-même, *aucun levier nouveau* sur la conjecture de Goldbach : c'est une identité sur les valuations p-adiques des entiers successifs, alors que le crible de Goldbach porte sur la primalité de $n - p$ pour p variable à n fixé - deux objets adjacents, mais pas directement superposables sans un travail supplémentaire de traduction, qui reste, lui, à faire.

4. Synthèse : où cela mène, où cela bloque

Point	**Statut**	**Ce qui reste, le cas échéant**
Dimension de la Castafiore	*Résolu* : $\dim_H(E) = 1$, démonstration complète via les ensembles de Moran homogènes ([1])	Vérifier la concordance exacte des indices avec la convention du texte original (point de rédaction, pas de fond)
Snurpf / $\widehat{\mathbb{Z}}$ et *Clarifié*, pas "démontré"	la question de la section 3.3 était déjà répondue par la théorie classique des entiers profinis	Rédiger explicitement la version enrichie du Snurpf (tours p-adiques complètes) pour que l'objet coïncide littéralement avec $\widehat{\mathbb{Z}}$
Formule de Legendre	Identité exacte établie, cohérente avec le texte 1 et avec le crible de Legendre déjà utilisé pour Goldbach	Aucun progrès direct sur Goldbach ; sert d'outil de calcul, pas de levier de démonstration

En résumé : le premier point *aboutit* à une démonstration complète et publiable telle quelle (dimension 1 de l'ensemble de la Castafiore). Le deuxième ne bloque pas non plus, mais parce que la question posée avait déjà une réponse dans la littérature - le gain est de clarté et de positionnement, pas un théorème nouveau. Le troisième ne bloque sur rien de particulier, mais il ne fait pas non plus progresser vers Goldbach : c'est une identité annexe, utile pour l'infrastructure de calcul, sans lien de causalité démontré avec la conjecture elle-même.

Références

[1] D. Feng, Z. Wen, J. Wu, *Some dimensional results for homogeneous Moran sets*, Science in China Series A : Mathematics **40** (1997), 475-482.

[2] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, 3e éd., Wiley, 2014.

[3] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1968 (traduction anglaise : *Local Fields*, Springer GTM 67).

[4] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, 2e éd., Springer, 2010.