Angles droits entre des bissectrices (Denise Vella-Chemla, 28.04.2024)

L'idée à l'origine de cette note est la suivante : un nombre premier est un nombre qui n'est divisible par aucun nombre autre que 1 et lui-même. Il n'est donc pas divisible par tout nombre compris entre 2 et sa propre racine.

On exprime cela en utilisant le nombre $\exp\left(\dfrac{2i\pi\ x}{p}\right)$ qui, si la division $\dfrac{x}{p}$ "tombe juste" (i.e. si p divise x) vaut 1, ce qui entraîne la nullité du nombre $1-\exp\left(\dfrac{2i\pi\ x}{p}\right)$. Prenons l'inverse et étendons l'expression à tous les nombres compris entre 2 et $\sqrt{x}$. Si p parcourt l'ensemble des nombres compris entre 2 et $\sqrt{x}$, x étant un nombre donné, x est un nombre premier si

$$\prod_{2\leq p\leq\sqrt{x}}\left(\exp\left(\frac{2i\pi\ x}{p}\right)\right) \quad \neq \quad 0.$$

Le caractère de primalité du nombre $n-x$ (si on cherche à décomposer le nombre pair n en somme de deux nombres premiers x et $n-x$) s'obtient en remplaçant x par $n-x$ dans la formule ci-dessus.

On peut remplacer l'expression $\exp\left(\dfrac{2i\pi\ x}{p}\right)$ par $i^{4x/p}$ (avec $i=\sqrt{-1}$).

On a ainsi une formulation qui impliquerait la conjecture de Goldbach si elle s'avérait vraie :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n\geq 6, \exists x\geq 3\ / \\ \qquad \displaystyle\prod_{\substack{2\leq x\leq \frac{n}{2}\\ 2\leq p\leq\sqrt{n}}}\left(1-i^{\frac{4x}{p}}\right) \qquad \neq 0 \qquad \text{(a)} \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \qquad \displaystyle\prod_{\substack{2\leq x\leq \frac{n}{2}\\ 2\leq p\leq\sqrt{n}}}\left(1-i^{\frac{4(n-x)}{p}}\right) \qquad \neq 0 \qquad \text{(b)} \end{array}}$$

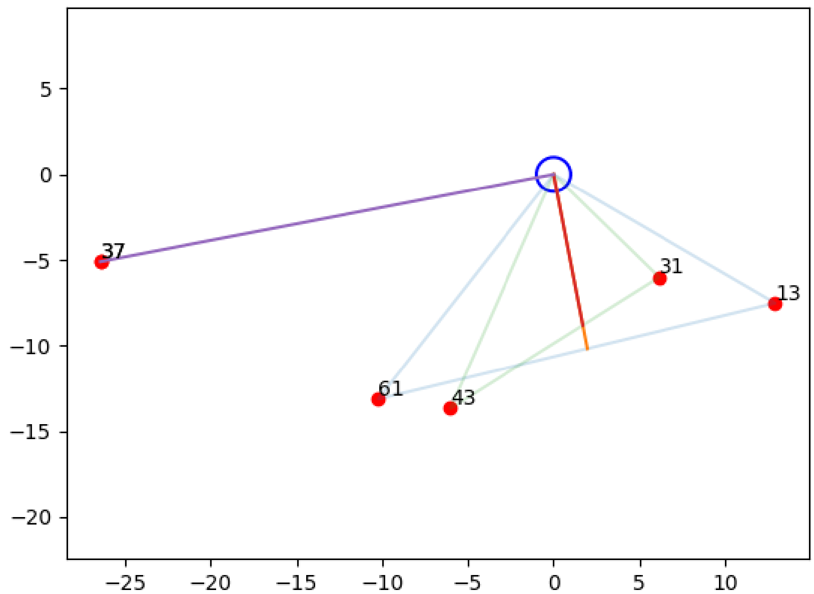
Cette idée permet de visualiser dans le plan complexe les décomposants de Goldbach (s'ils existent, ce qu'on ne sait pas démontrer) d'un nombre pair n : les décomposants de Goldbach de n sont les seuls nombres qui sont positionnés ailleurs qu'en le point zéro, i.e. les points dont l'affixe est non nul.

L'idée qui vient alors est de tracer les bissectrices des angles que font les droites (O,z_1) et (O,z_2) avec z_1 et z_2 les affixes de deux décomposants de Goldbach de n. Voici le programme[1].

[1] Merci J.C. pour le dessin des bissectrices.

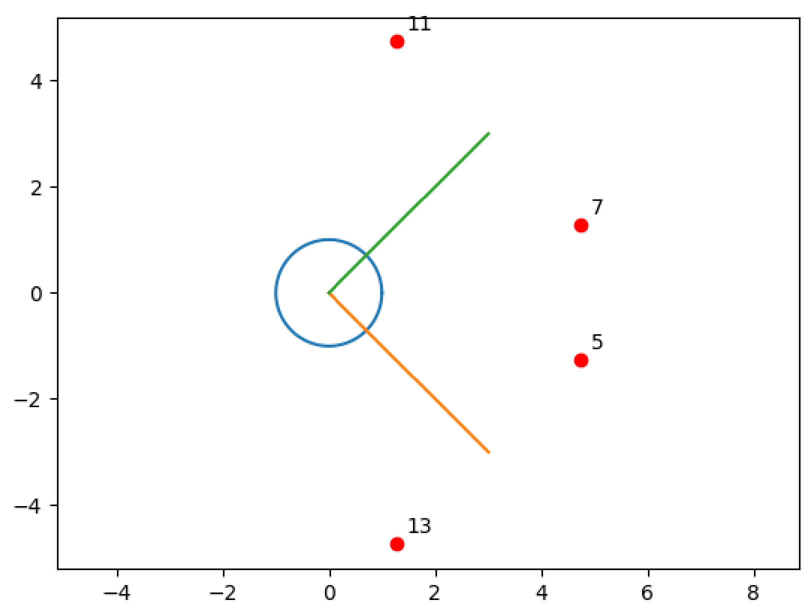
```
import numpy as np
from numpy import pi, sqrt
import matplotlib.pyplot as plt

for n in range(6,103,2):
     t = np.linspace(0, 1, 100)
     c = np.exp(2*pi*1j*t)
     plt.plot(c.real, c.imag)
     rac = int(sqrt(n))
     for x in range(2,n//2+1):
          p = np.arange(2, rac + 1)
          u = np.prod(1-np.power(1j,4*x/p))
          v = np.prod(1-np.power(1j,4*(n-x)/p))
          if min(abs(u),abs(v)) > 1e-10:
               print(x, ' dg de ',n)
               plt.scatter(u.real, u.imag, color='red')
               plt.annotate(x, xy=(u.real + 0.2, u.imag + 0.2))
               plt.scatter(v.real, v.imag, color='red')
               plt.annotate(n-x,xy=(v.real + 0.2, v.imag + 0.2))
               w = (u/abs(u) + v/abs(v))/2
               w = w/abs(w)
               r = (u.real*(u.imag - v.imag)-u.imag*(u.real-v.real))
                    /(w.real*(u.imag-v.imag)-w.imag*(u.real-v.real))
               b = r*w
               plt.plot([0, b.real], [0, b.imag])
     plt.axis('equal')
     plt.show()
```

Et voici les graphiques présentant les décomposants de Goldbach des nombres de 18 à 102 ; on constate que les bissectrices des angles que font les droites (O, z_1) et (O, z_2) avec z_1 et z_2 les affixes de 2 décomposants de Goldbach de n sont toujours alignées sur deux directions seulement (voire une seule), et qui sont perpendiculaires. On remarque pour les doubles de nombres premiers que la demi-droite “triviale” (les deux demi-droites sur les deux décomposants de Goldbach se confondent alors en une seule demi-droite) est également perpendiculaire à la droite bissectrice de l’angle “reliant” deux autres décomposants. On a marqué les doubles de nombres premiers, ces nombres pairs qui vérifient trivialement la conjecture de Goldbach d’une lettre p minuscule entre parenthèse car pour eux, on a omis de visualiser la demi-droite triviale dans le programme. L’œil aiguisé de la lectrice repèrera cette demi-droite triviale aisément. On a omis dans les graphiques, les petits triangles qui permettraient de repérer les décompositions plus aisément, pour mieux visualiser les angles droits systématiques mais le dessin ci-dessous, pour $n = 74$, montre la décomposition “dégénérée” sur 37, bien perpendiculaire aux deux autres décompositions, ainsi que les petits triangles qui font apparaître la décomposition $61 + 13$ et la décomposition $43 + 31$.

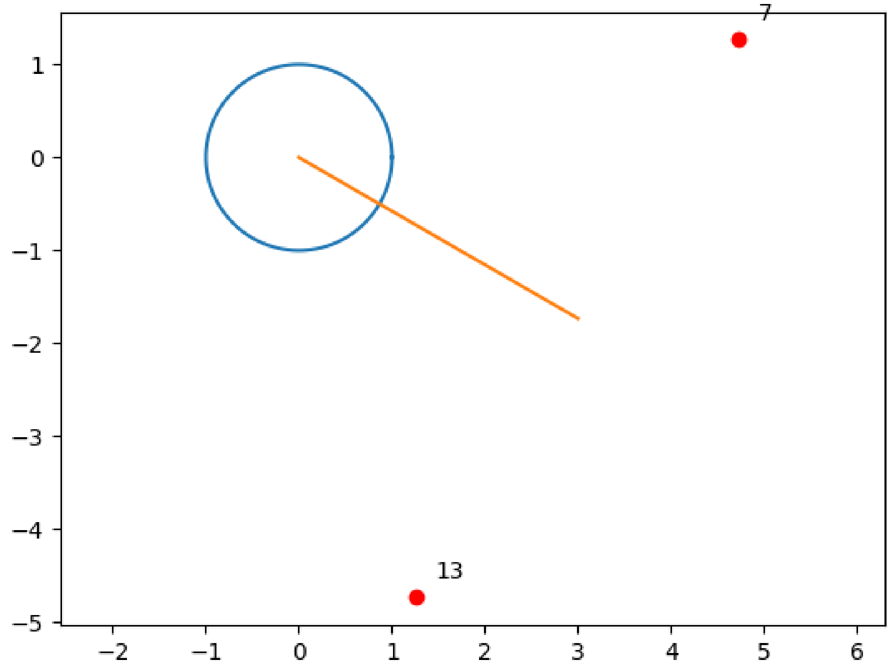


n=18

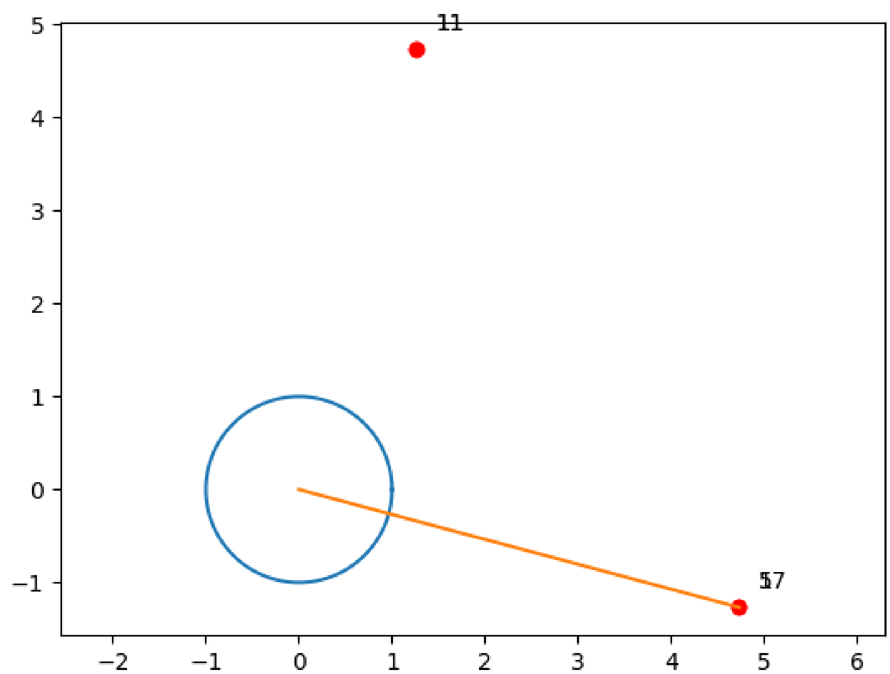
Parfois l'alignement de plusieurs demi-droites n'est pas trop visible car les demi-droites sont l'une au-dessous de l'autre, on repère ces circonstances par le fait que la demi-droite change de couleur en cours de chemin.



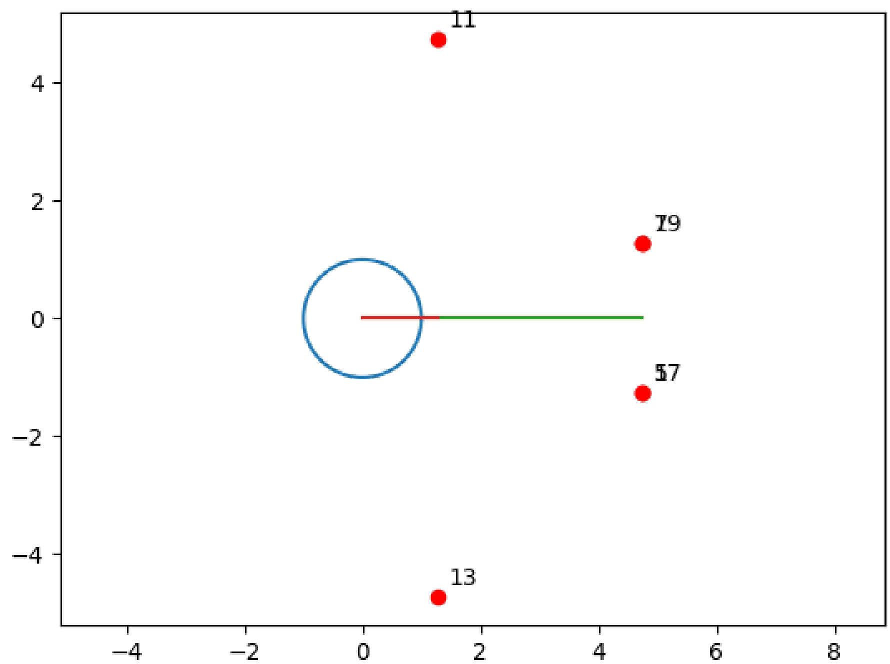
n=18



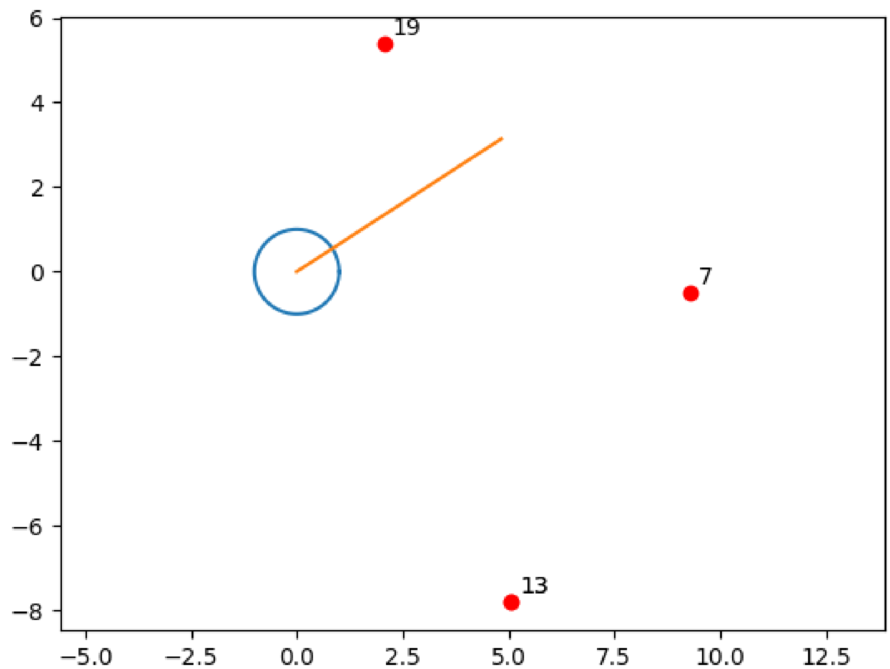
n=20



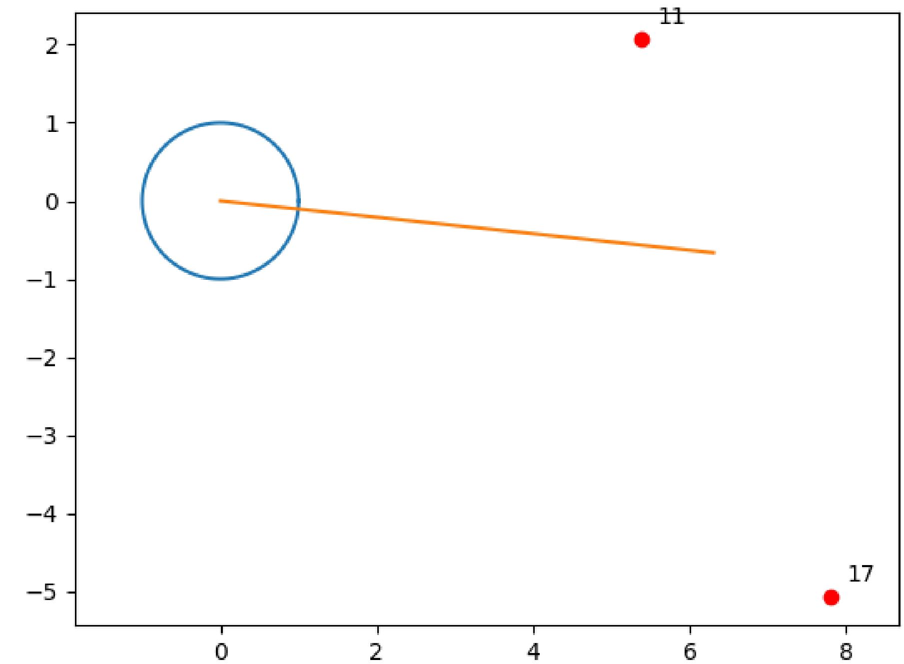
n=22 (p)


11
4
2
7
19
0
5
17
−2
−4
13
−4
−2
0
2
4
6
8

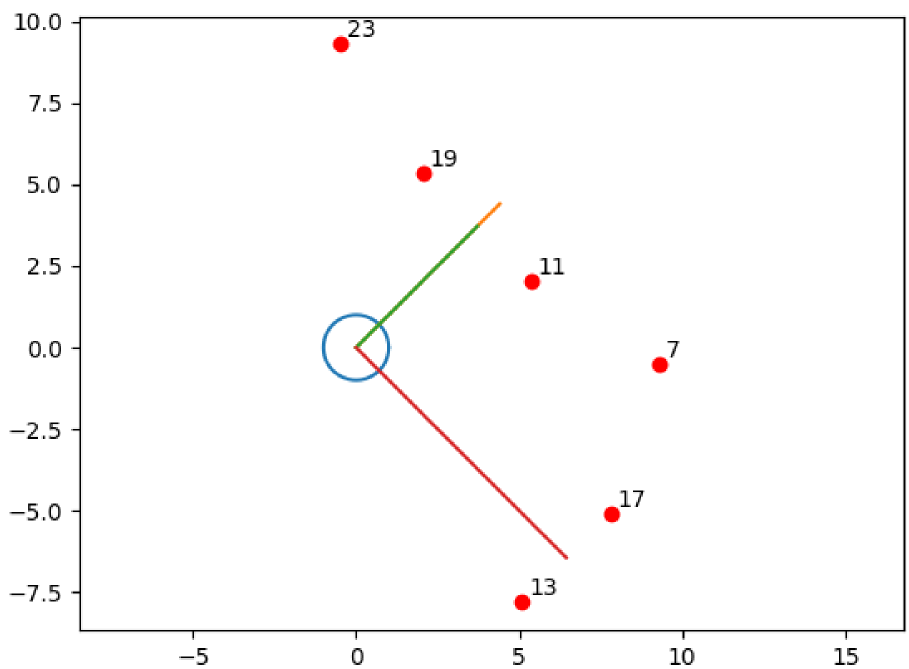
n=24


6
19
4
2
0
7
−2
−4
−6
−8
13
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5

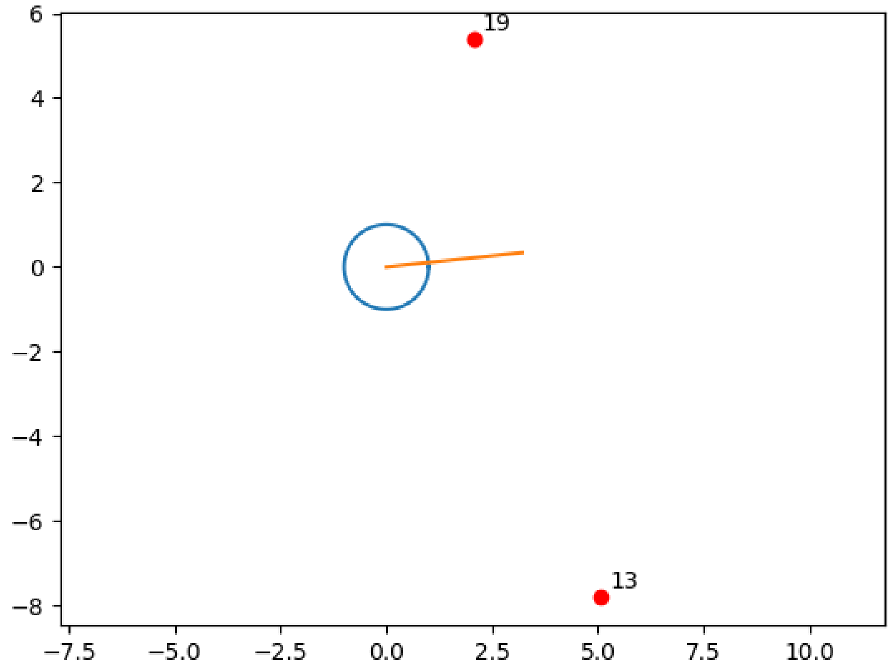
n=26 (p)


11
17
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
2
4
6
8

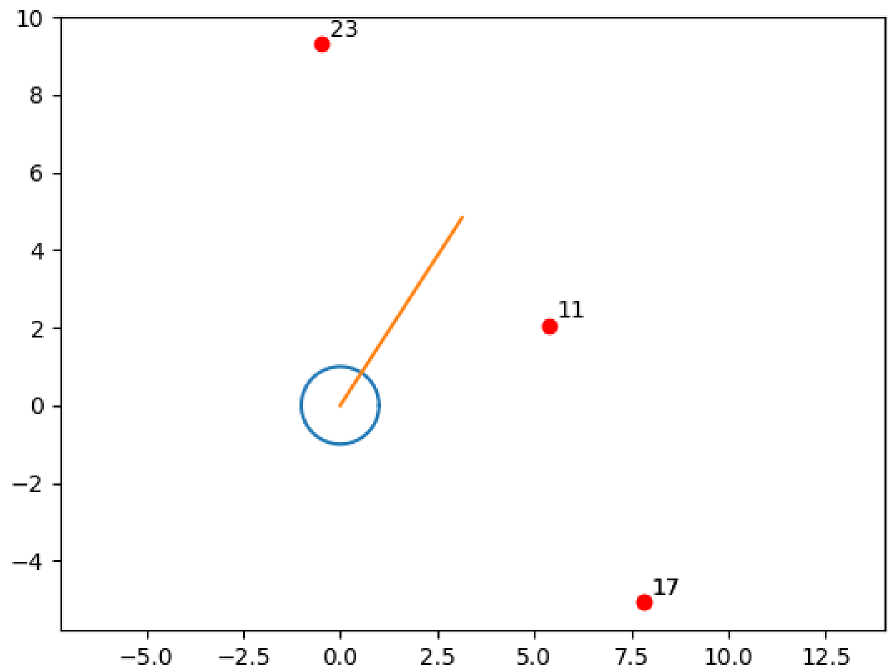
n=28


23
19
11
7
17
13
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−5
0
5
10
15

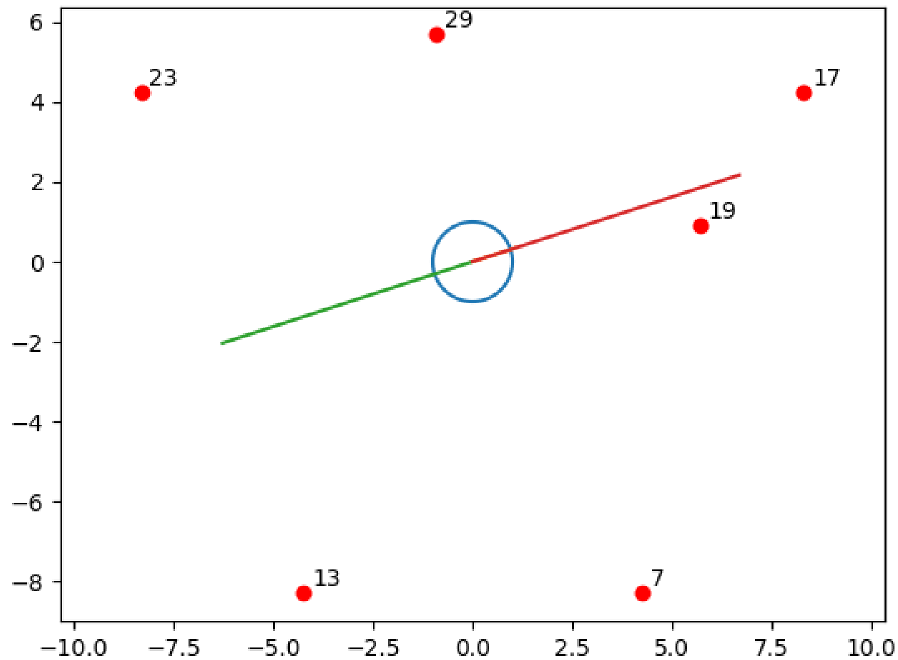
n=30



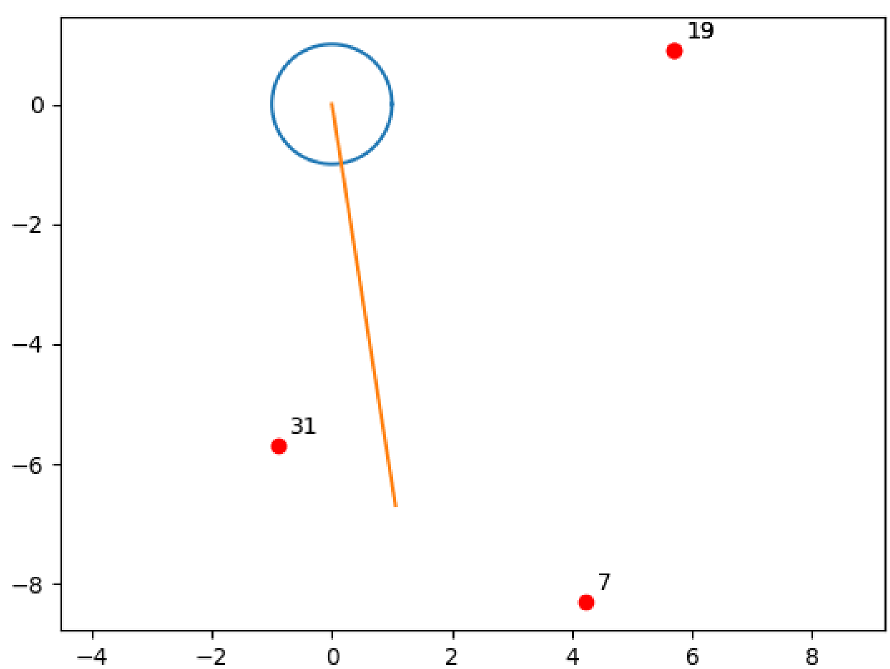
n=32



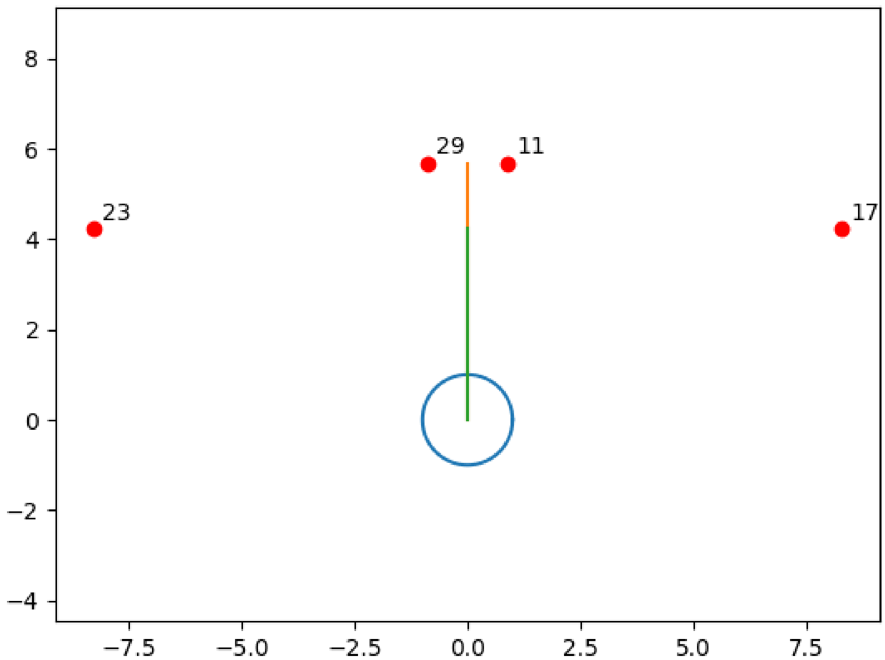
n=34 (p)


29
23
17
19
13
7
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0

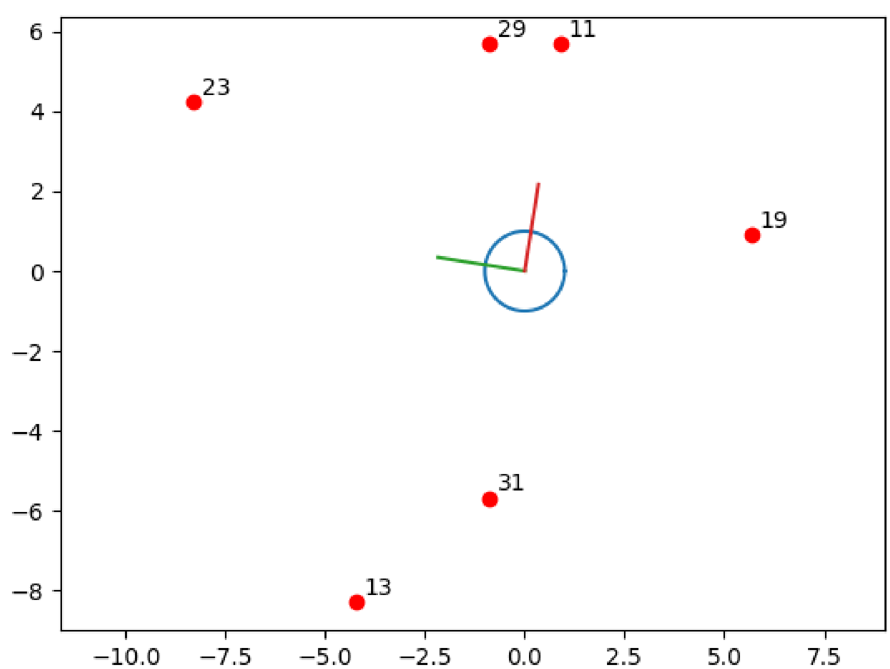
n=36


19
31
7
0
−2
−4
−6
−8
−4
−2
0
2
4
6
8

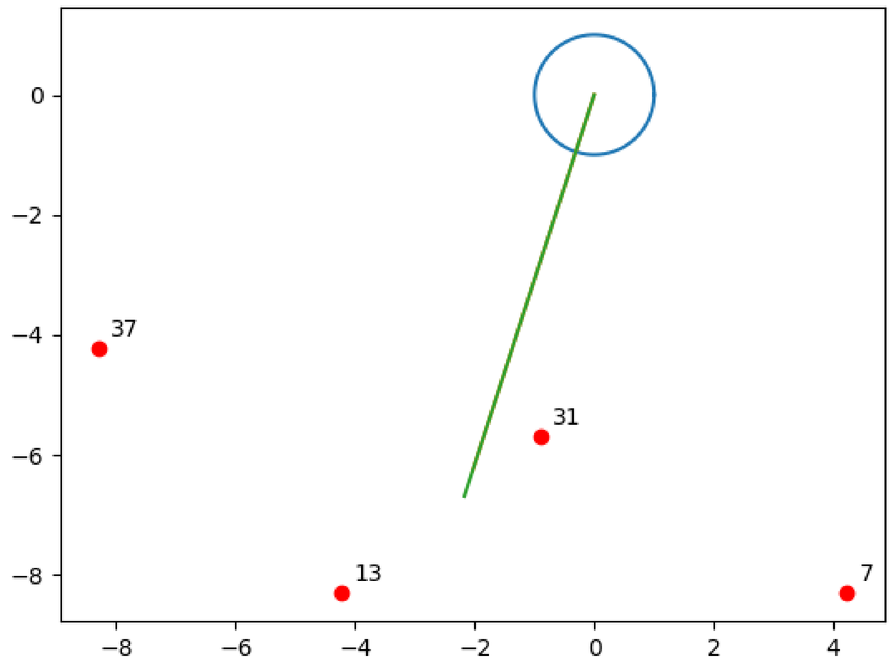
n=38 (p)


29
11
23
17
8
6
4
2
0
−2
−4
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5

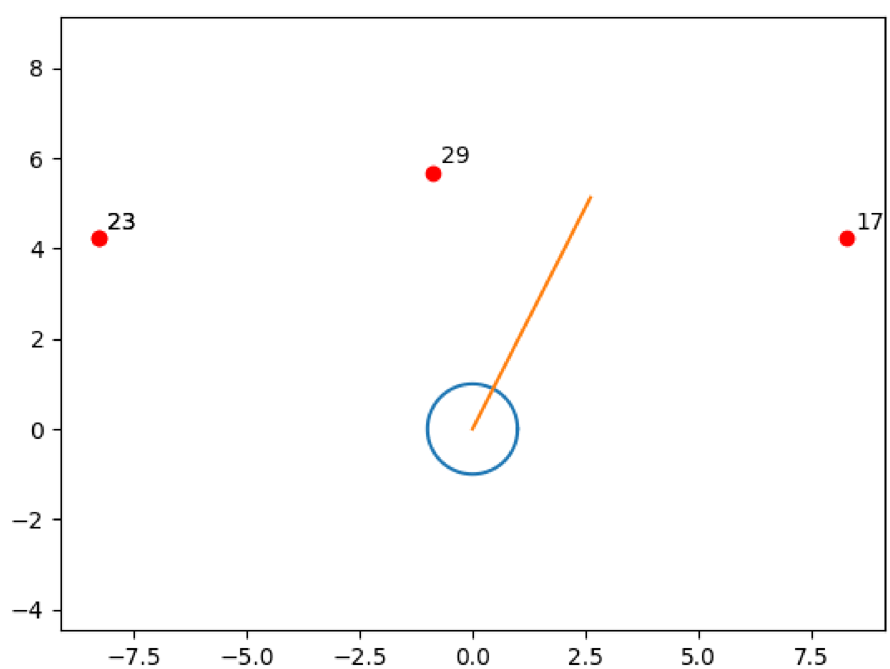
n=40


29
11
23
19
31
13
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5

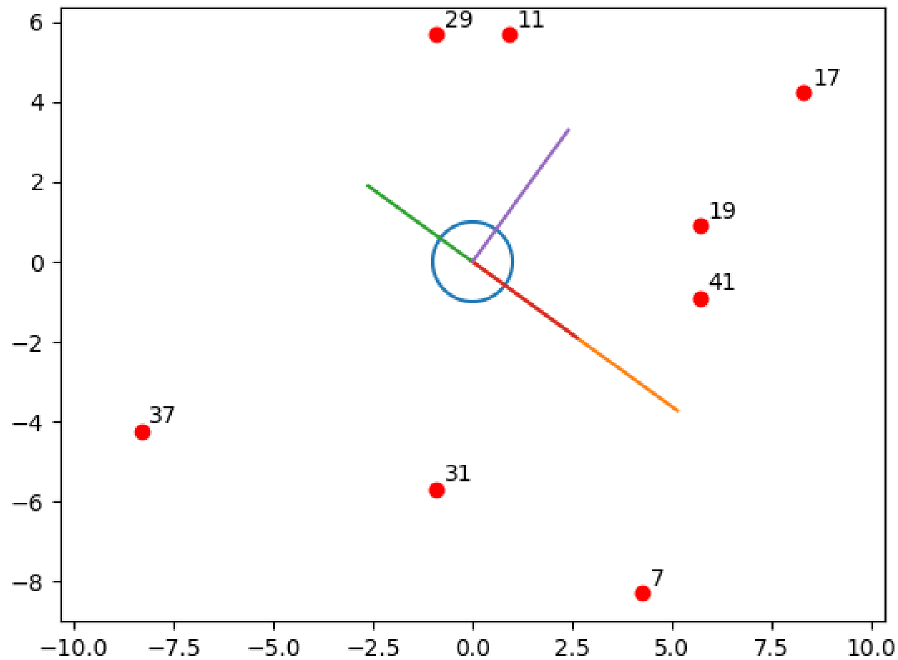
n=42



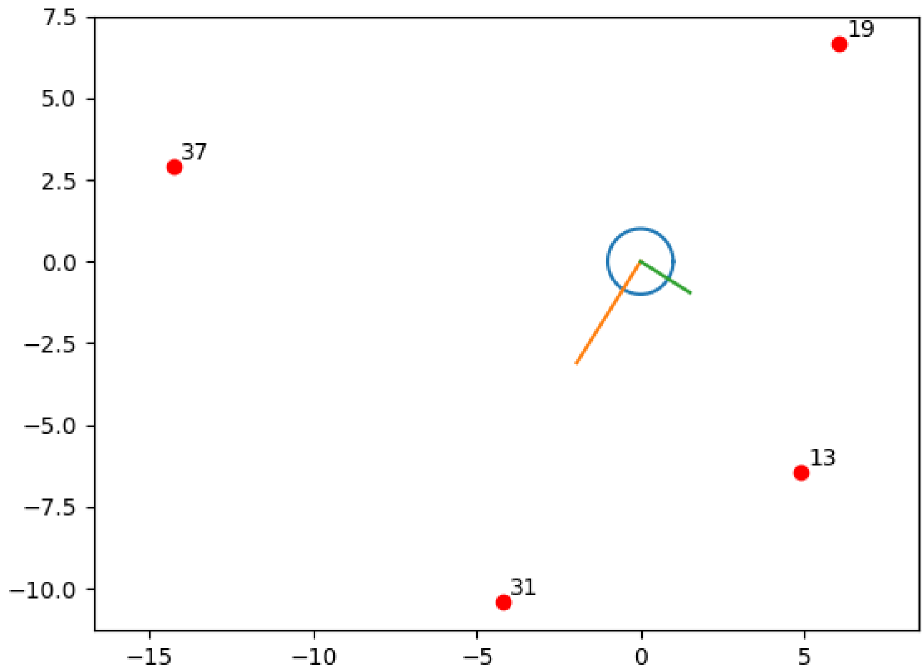
n=44



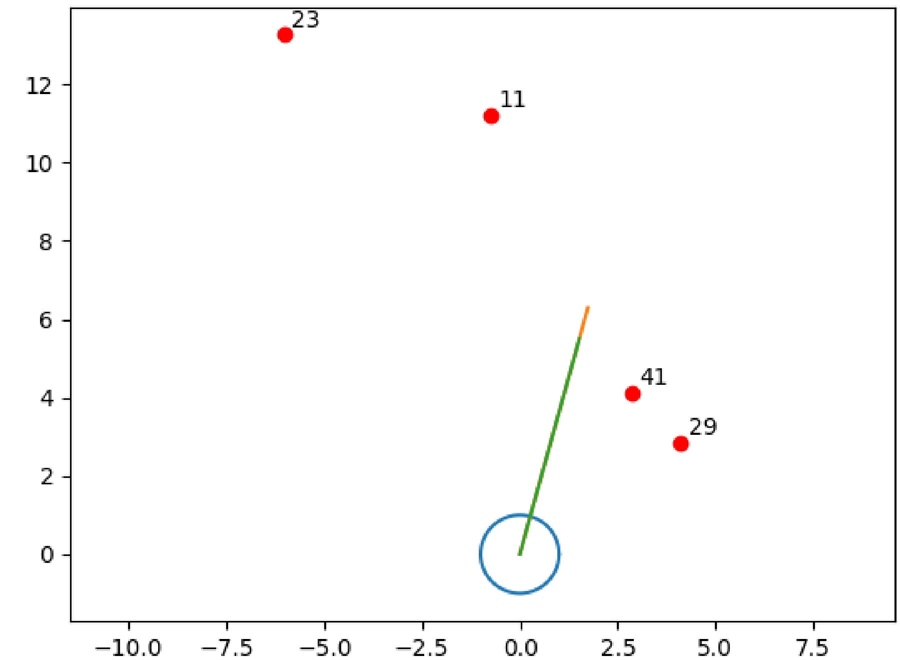
n=46 (p)


29
11
17
19
41
37
31
7
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0

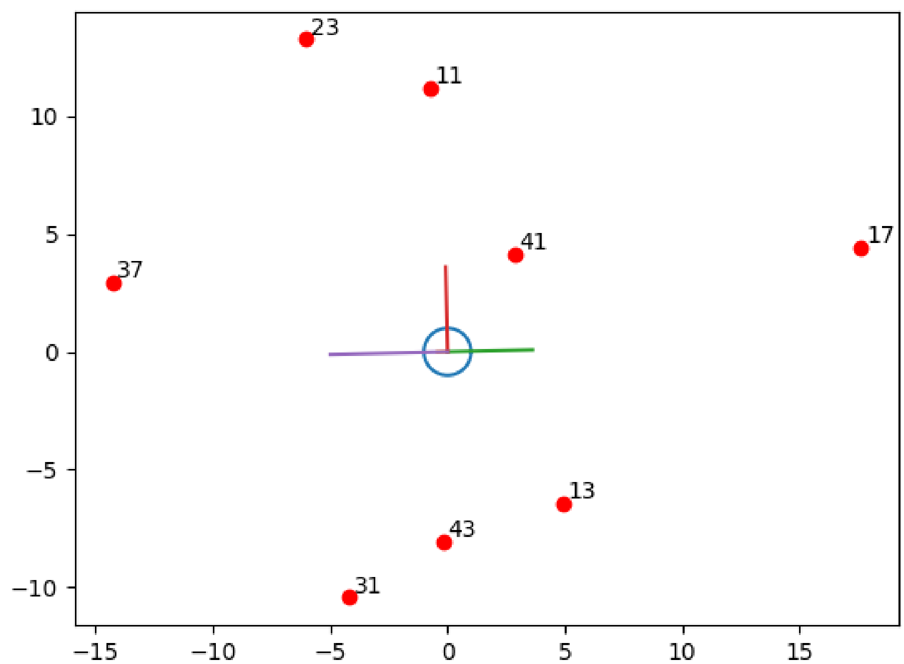
n=48


19
37
13
31
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−15
−10
−5
0
5

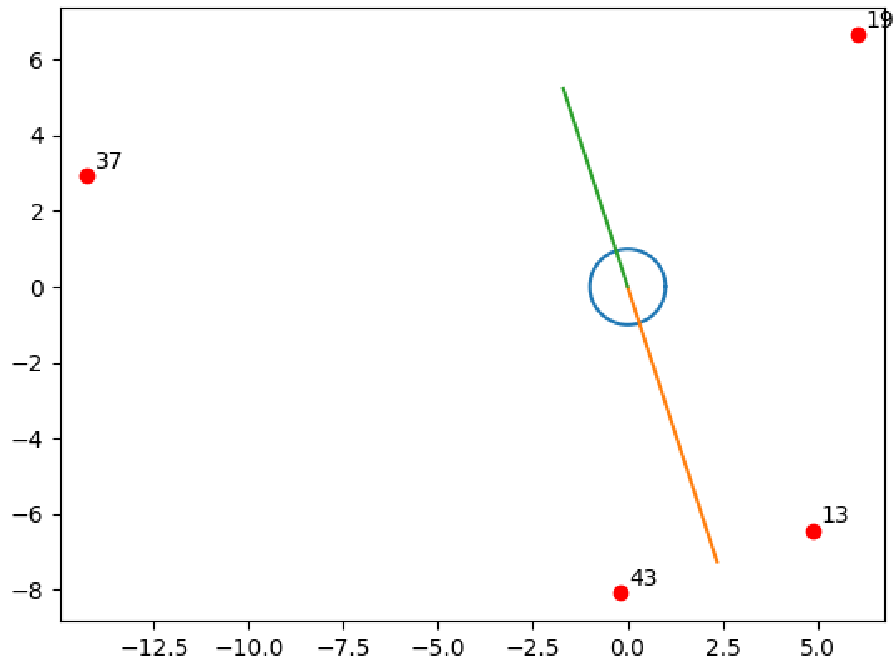
n=50


23
11
41
29
12
10
8
6
4
2
0
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5

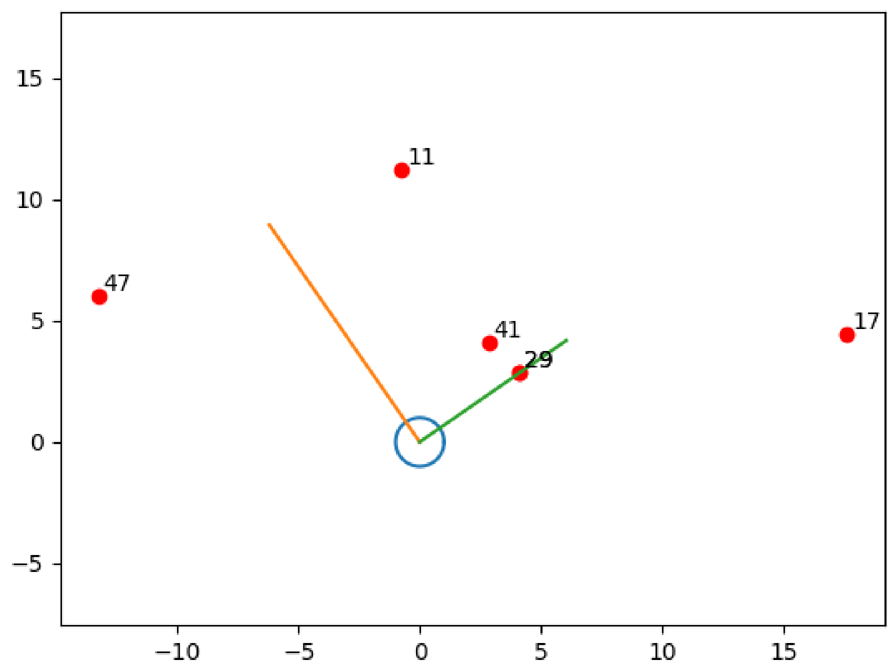
n=52


23
11
41
17
37
13
43
31
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−5
0
5
10
15

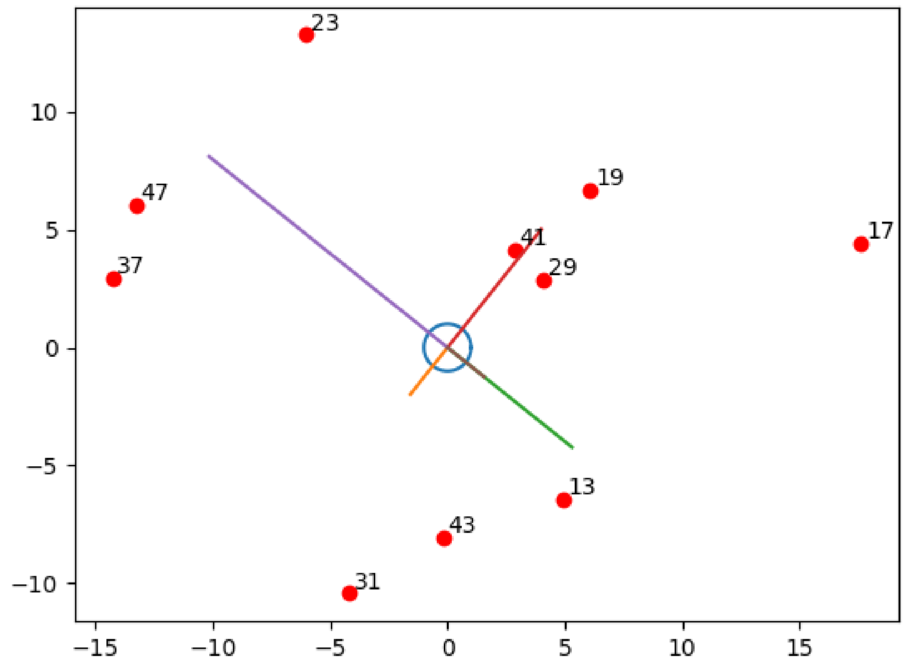
n=54


19
37
13
43
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−12.5
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0

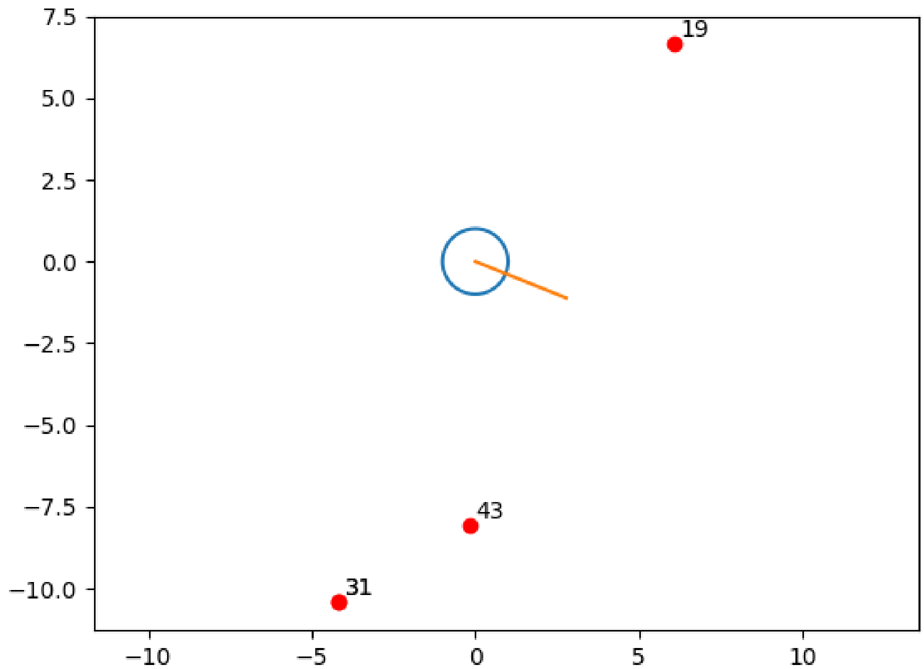
n=56


11
47
41
29
17
15
10
5
0
−5
−10
−5
0
5
10
15

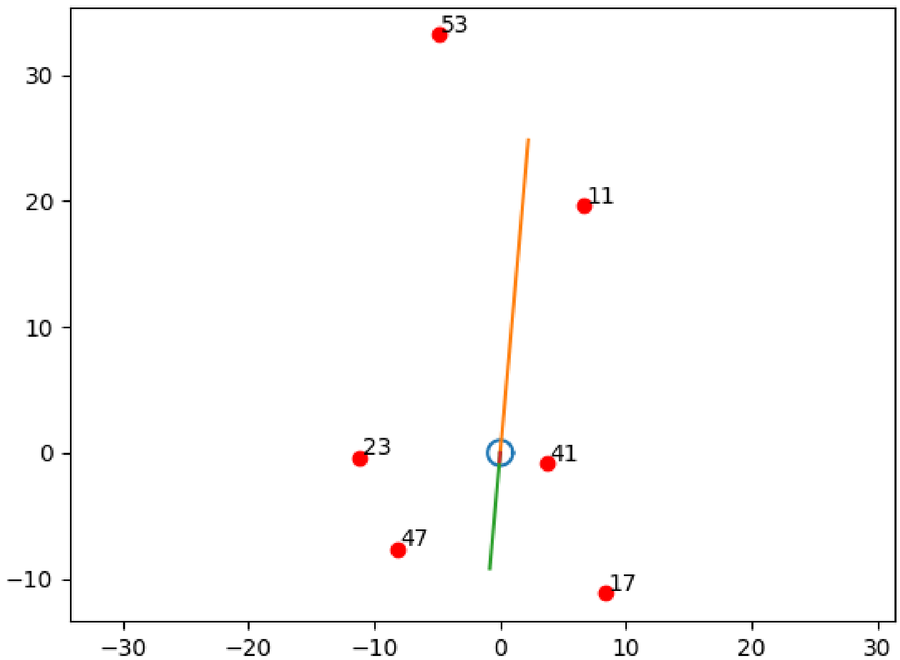
n=58 (p)


23
10
47
19
5
41
17
37
29
0
−5
13
43
−10
31
−15
−10
−5
0
5
10
15

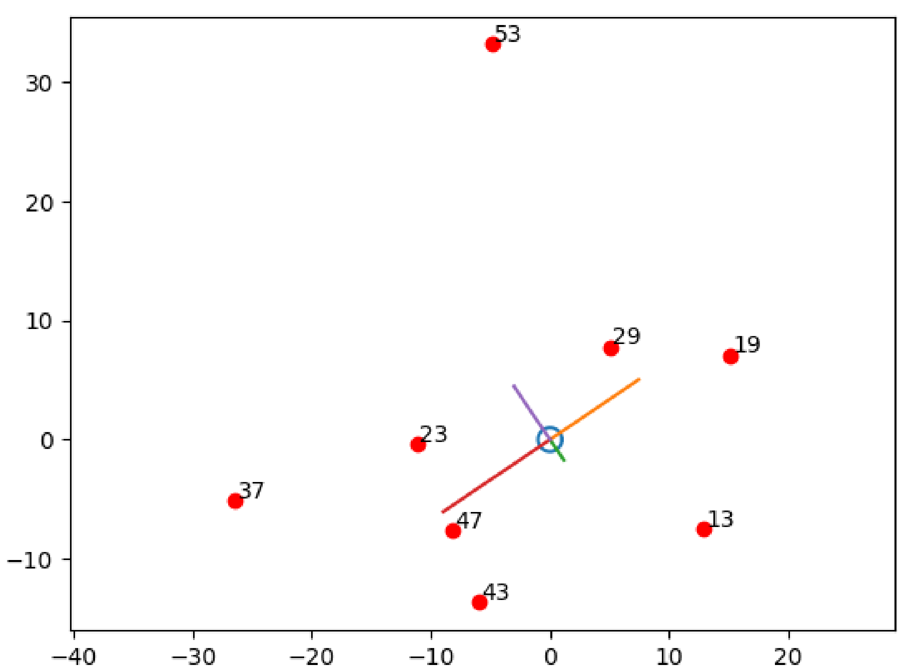
n=60


7.5
19
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
43
−10.0
31
−10
−5
0
5
10

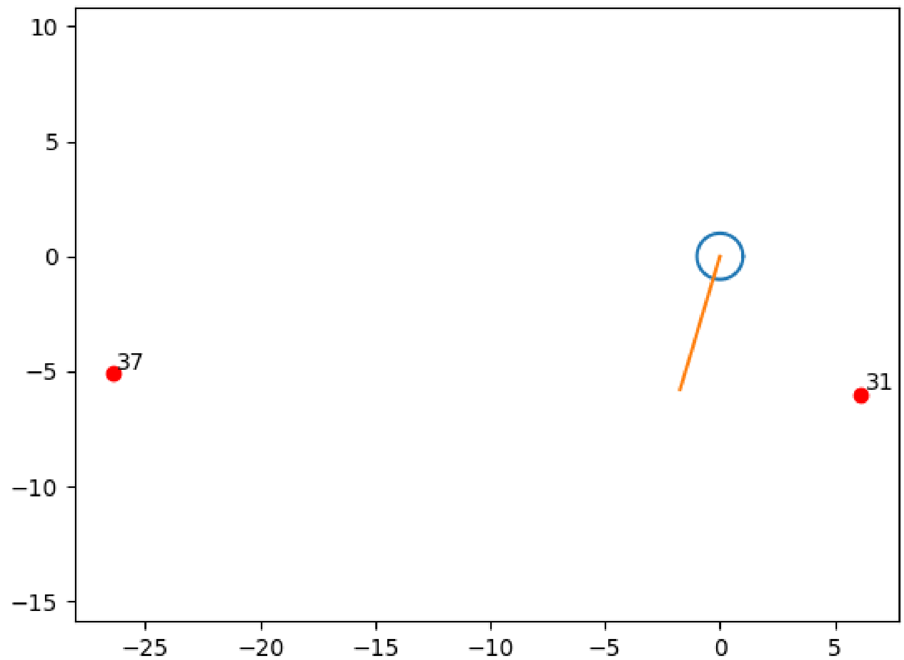
n=62 (p)


53
11
23
41
47
17
30
20
10
0
−10
−30
−20
−10
0
10
20
30

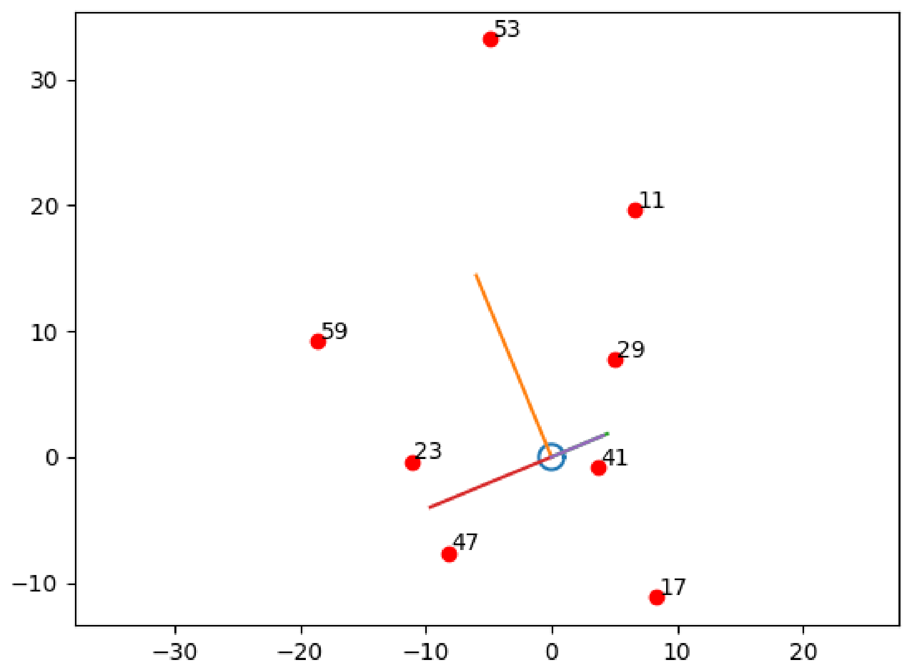
n=64


53
29
19
23
37
47
13
43
30
20
10
0
−10
−40
−30
−20
−10
0
10
20

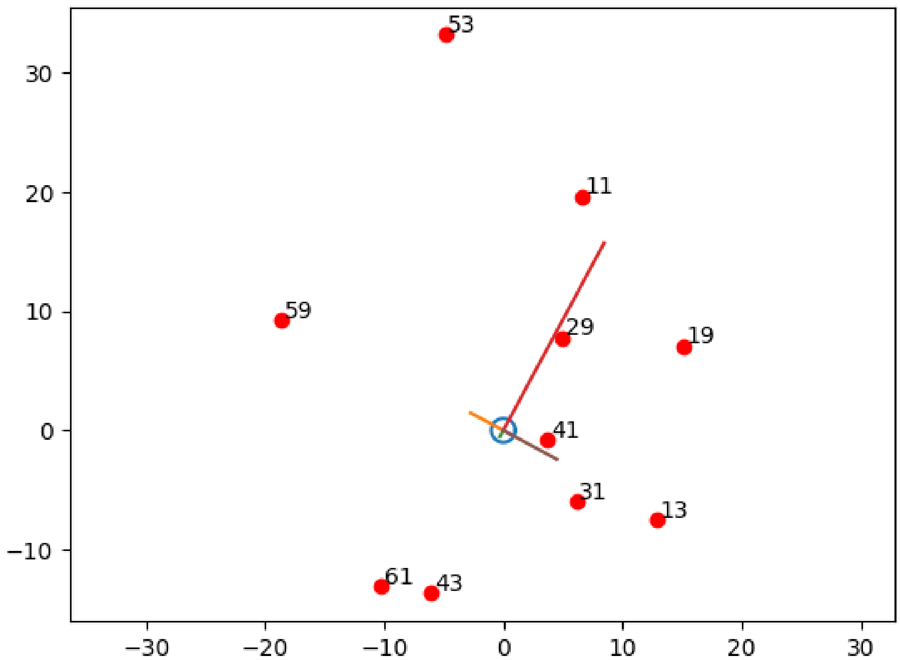
n=66


10
5
0
−5
−10
−15
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
37
31

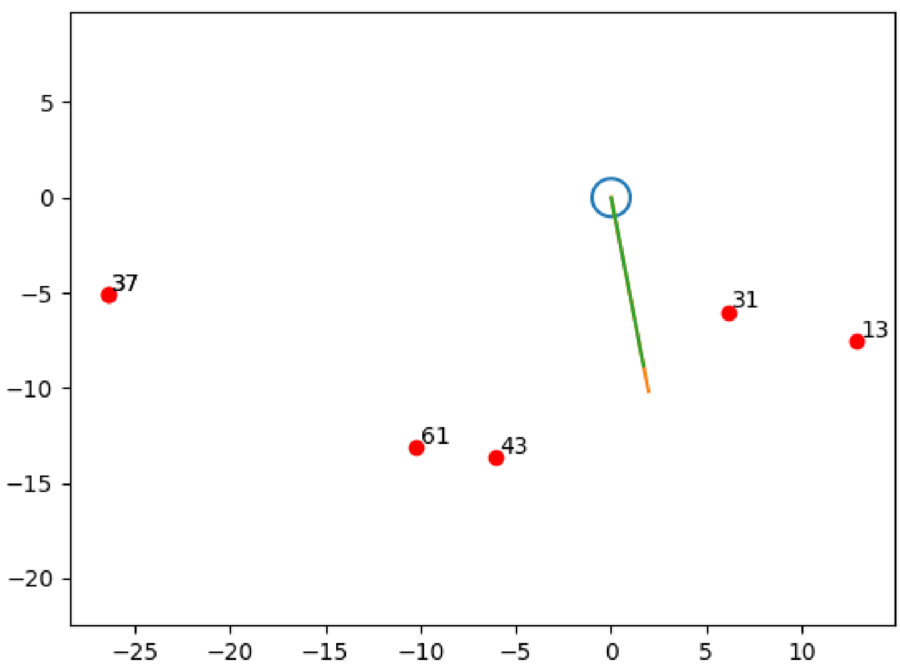
n=68


30
20
10
0
−10
−30
−20
−10
0
10
20
53
11
59
29
23
41
47
17

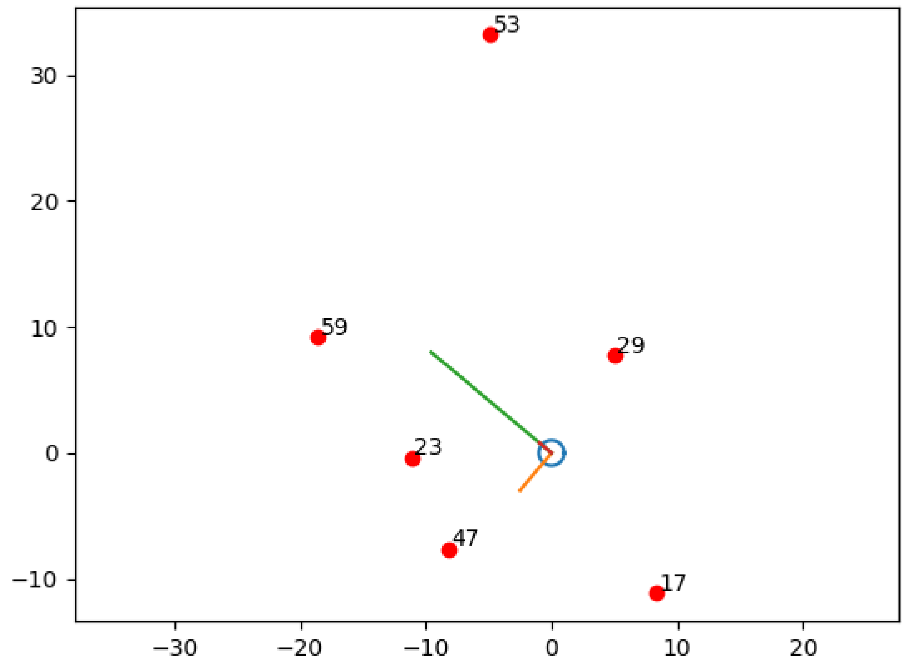
n=70


53
30
11
20
59
29
19
10
0
41
31
13
−10
61
43
−30
−20
−10
0
10
20
30

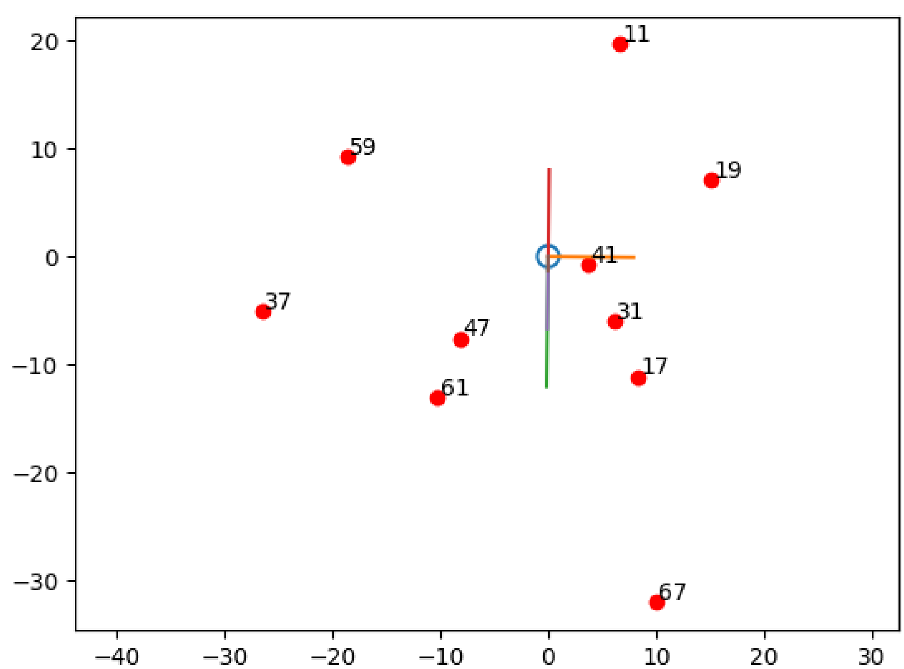
n=72


5
0
37
−5
31
13
−10
61
43
−15
−20
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10

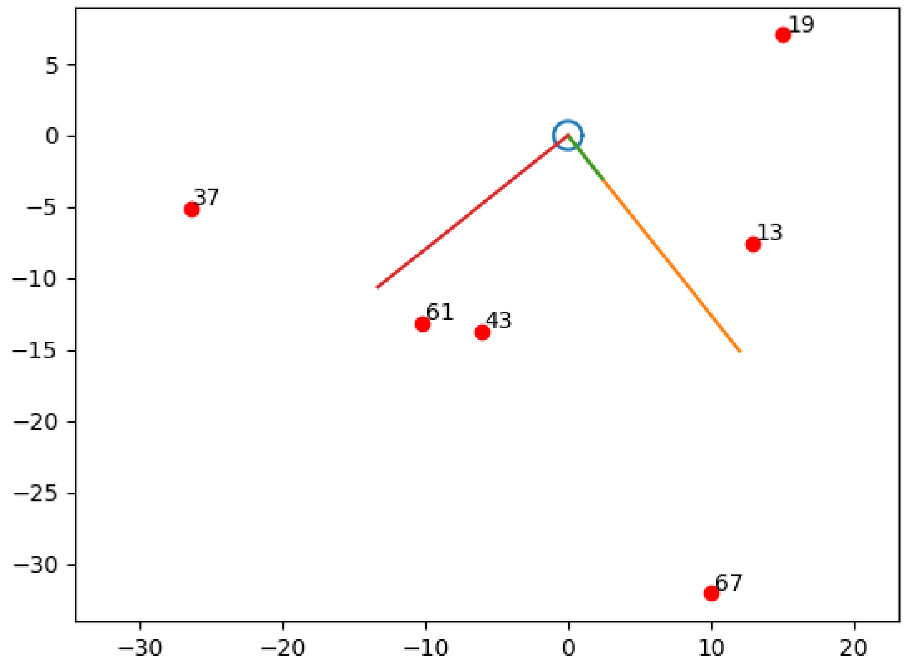
n=74 (p)


53
59
29
23
47
17
30
20
10
0
−10
−30
−20
−10
0
10
20

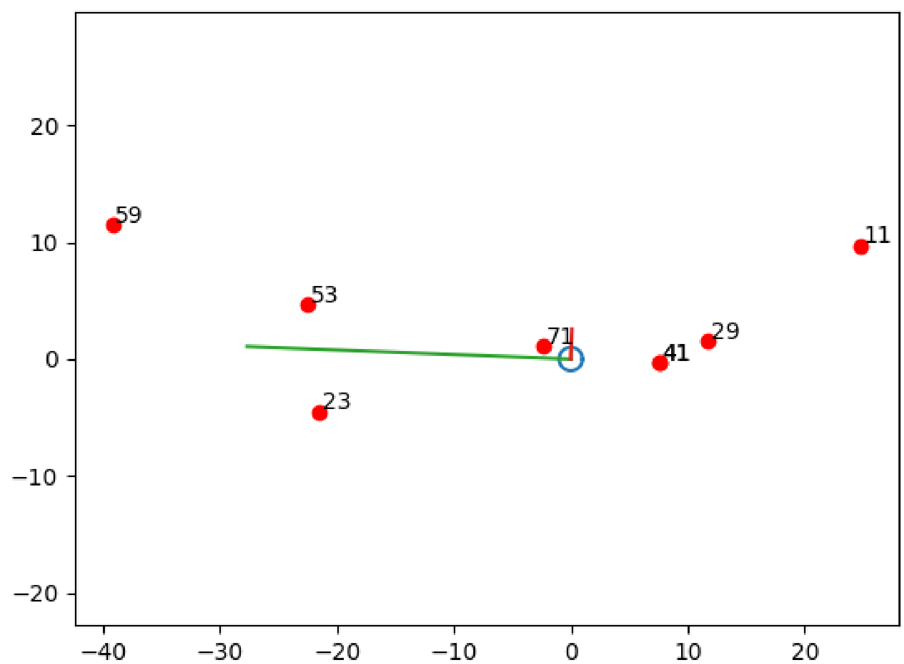
n=76


11
59
19
41
37
31
47
17
61
67
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−30
−20
−10
0
10
20
30

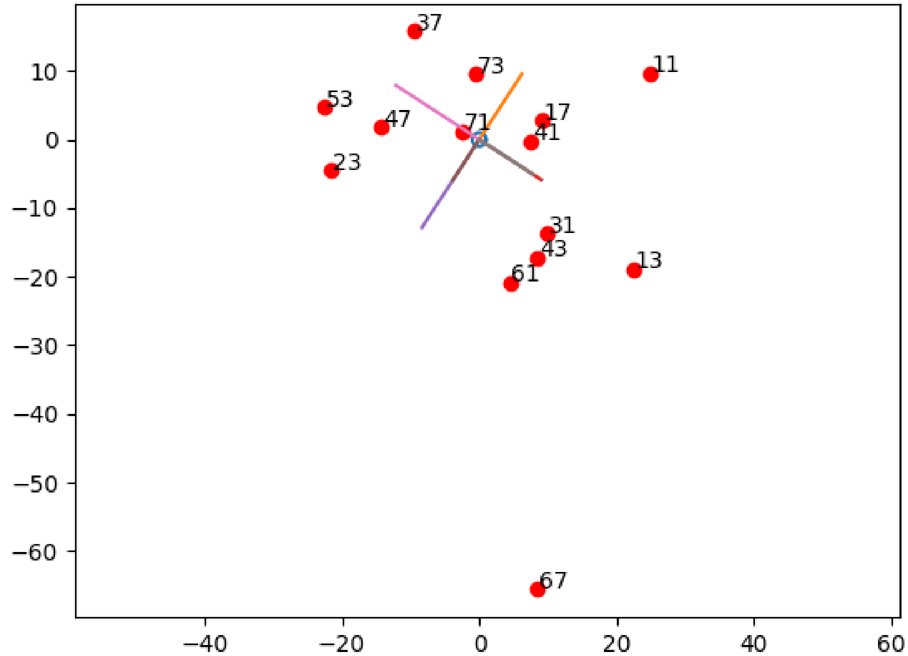
n=78



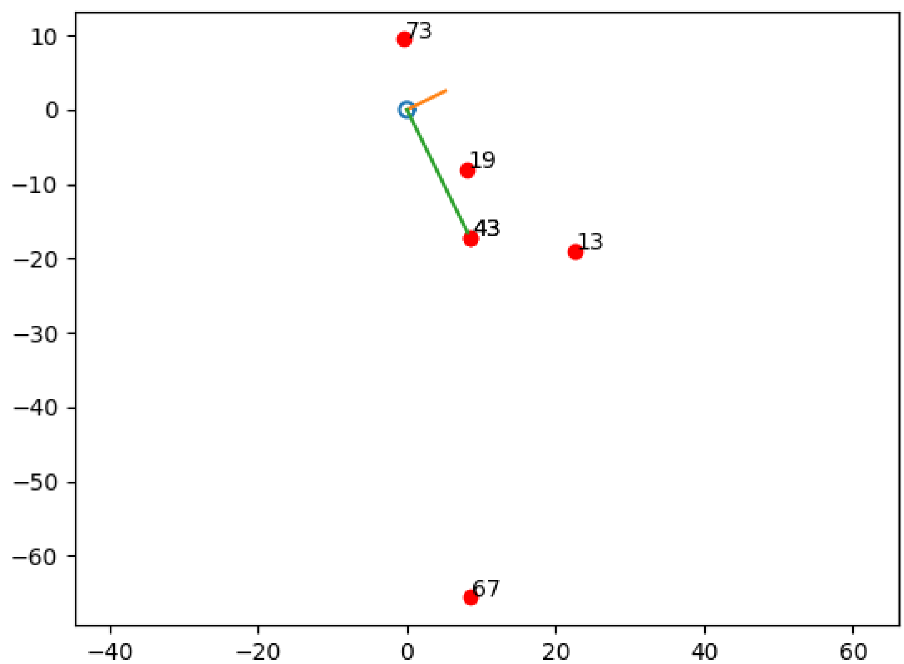
n=80



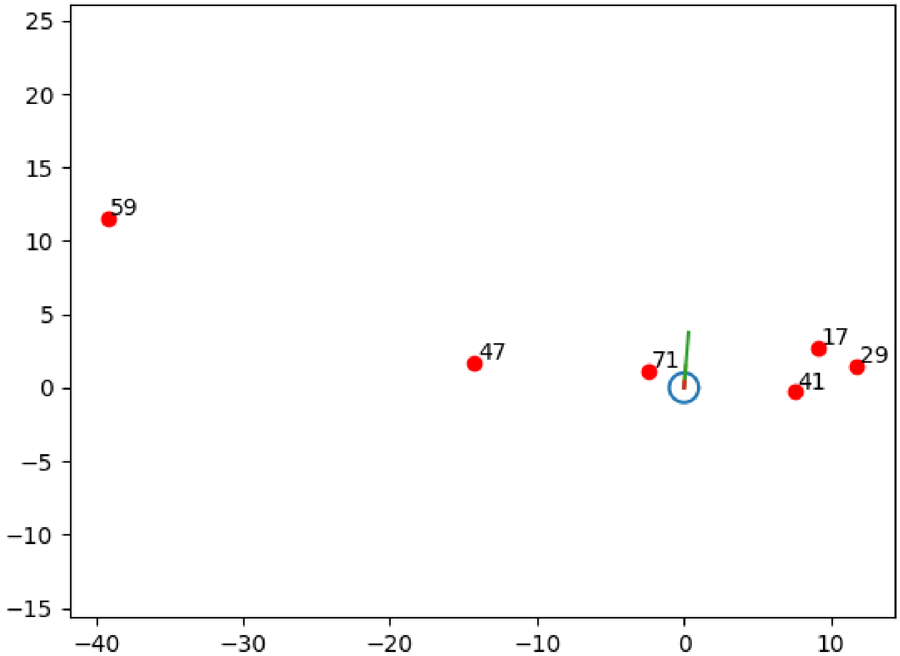
n=82 (p)


37
73
11
53
47
71
17
41
23
31
43
13
61
67
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−40
−20
0
20
40
60

n=84

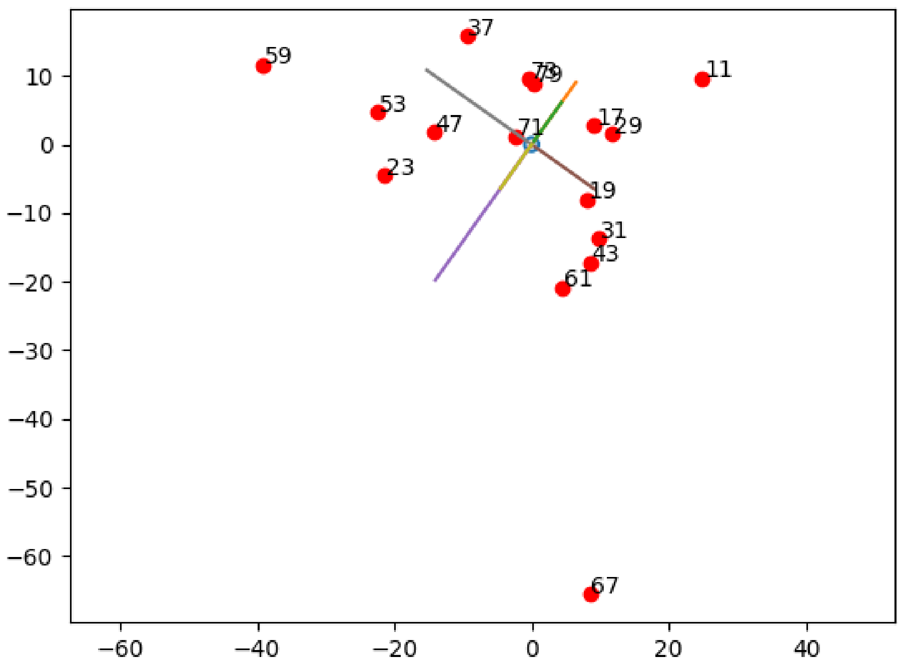

73
19
43
13
67
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−40
−20
0
20
40
60

n=86 (p)



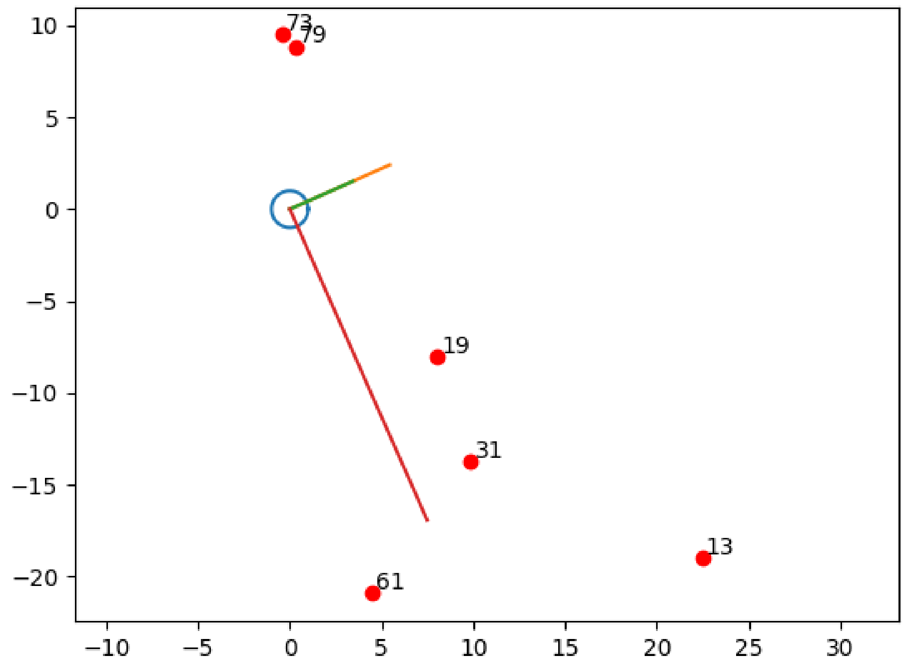
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−40
−30
−20
−10
0
10
59
47
71
17
29
41

n=88

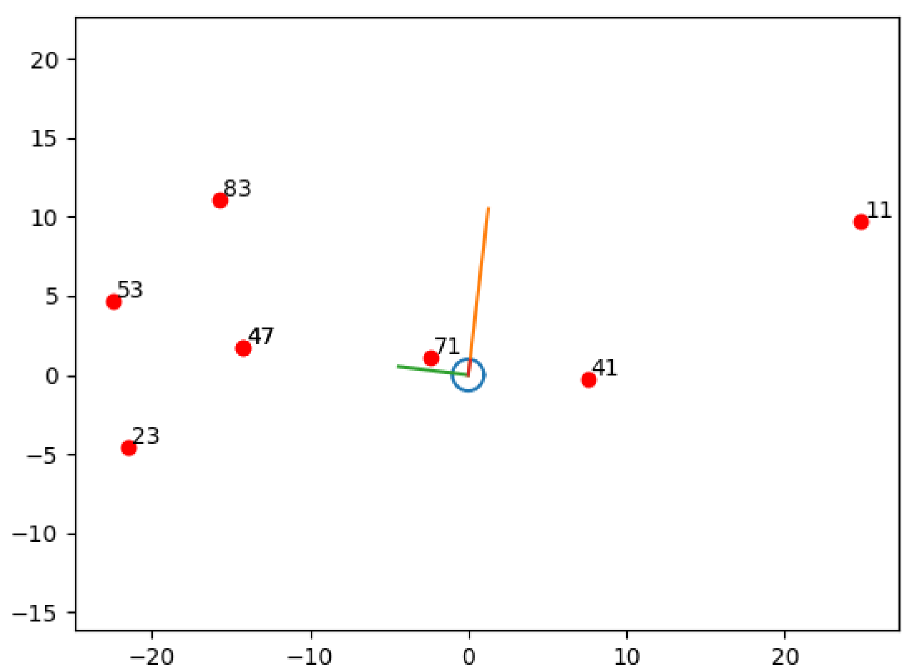


10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−60
−40
−20
0
20
40
37
59
11
53
47
71
17
29
23
19
31
43
61
67

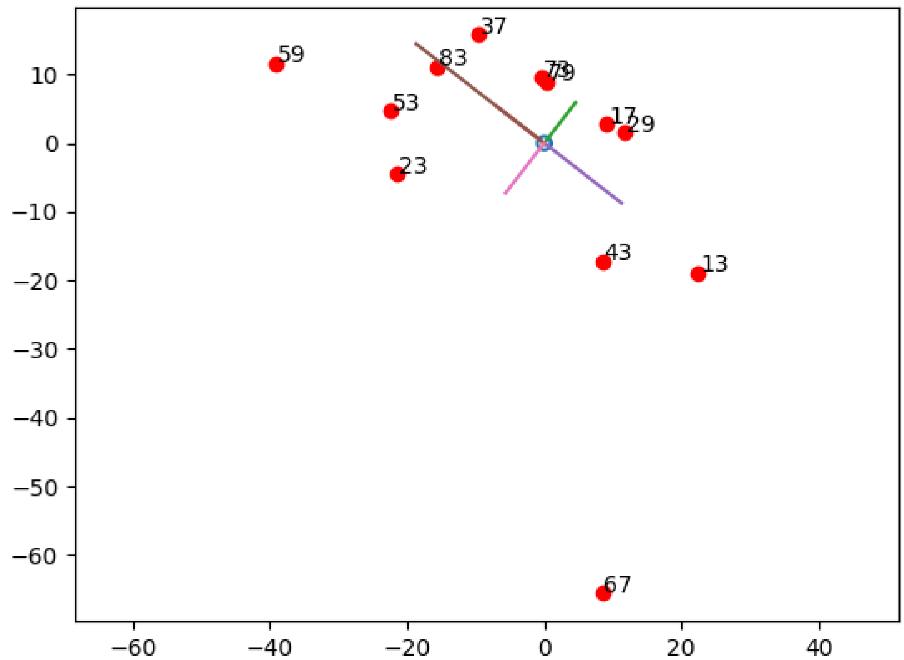
n=90


73
79
19
31
13
61
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

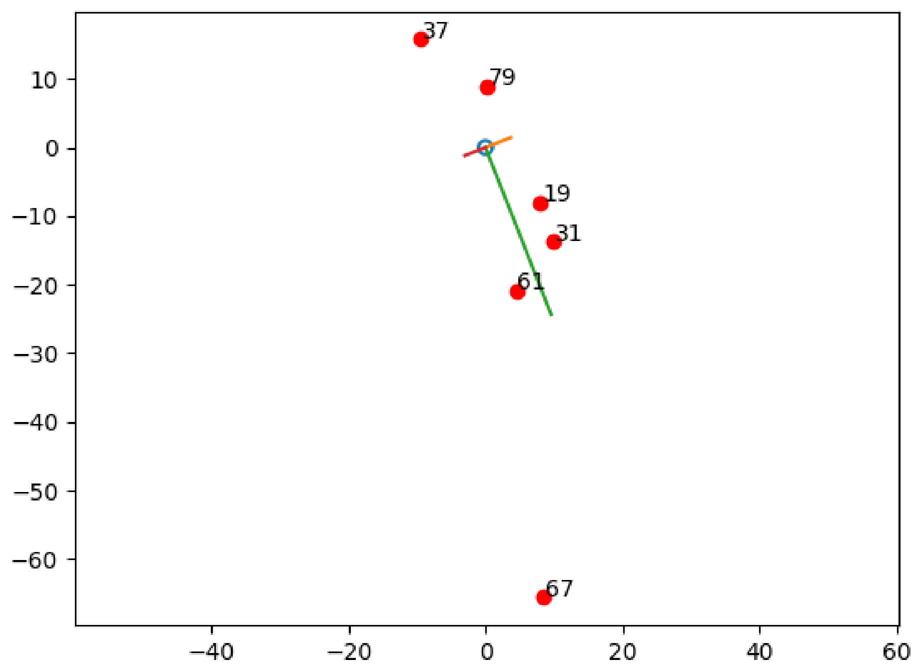
n=92


83
11
53
47
71
41
23
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−10
0
10
20

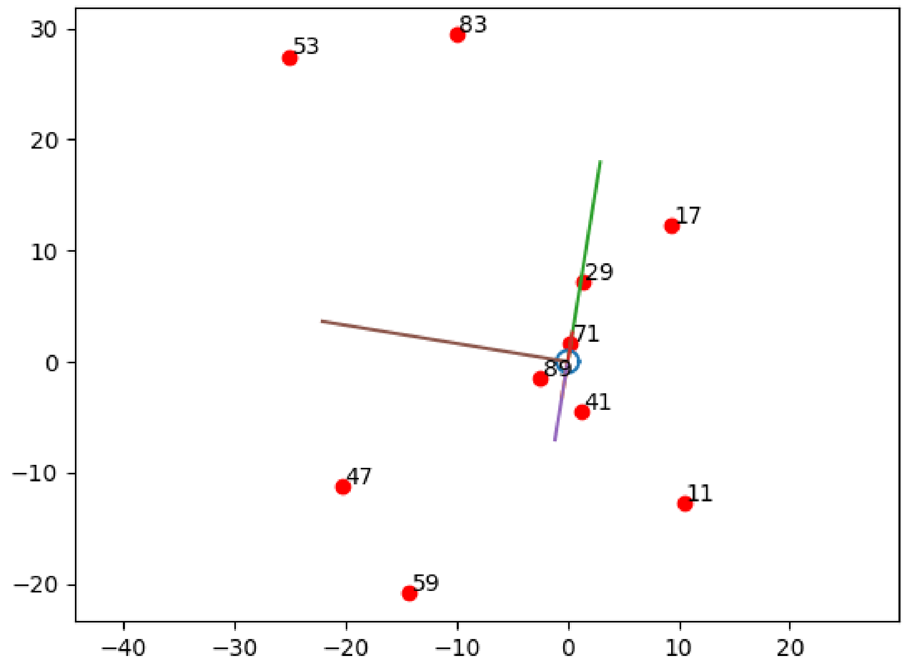
n=94 (p)


37
59
83
73
79
53
17
29
23
43
13
67
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−60
−40
−20
0
20
40

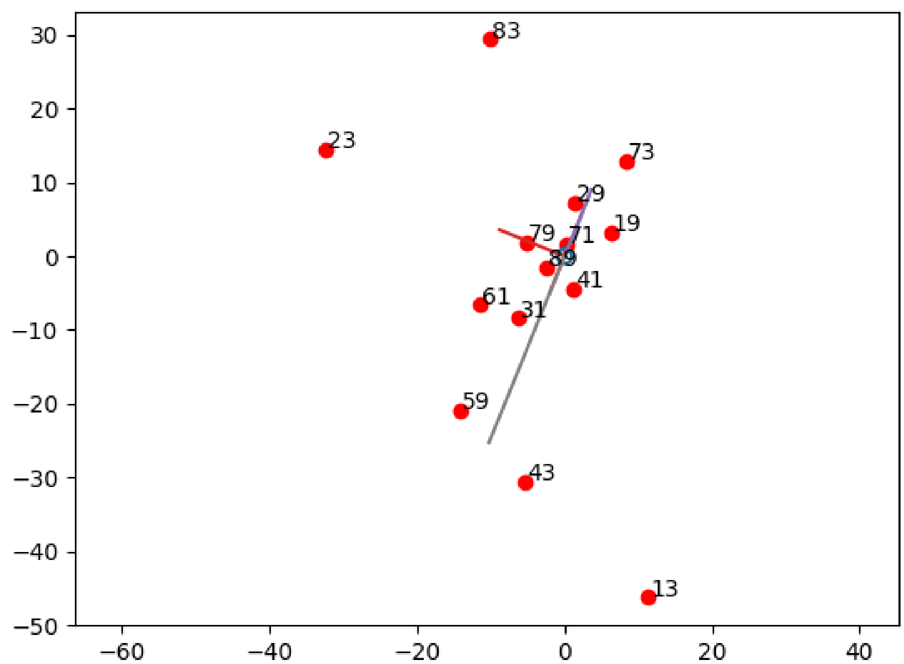
n=96


37
79
19
31
61
67
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−40
−20
0
20
40
60

n=98

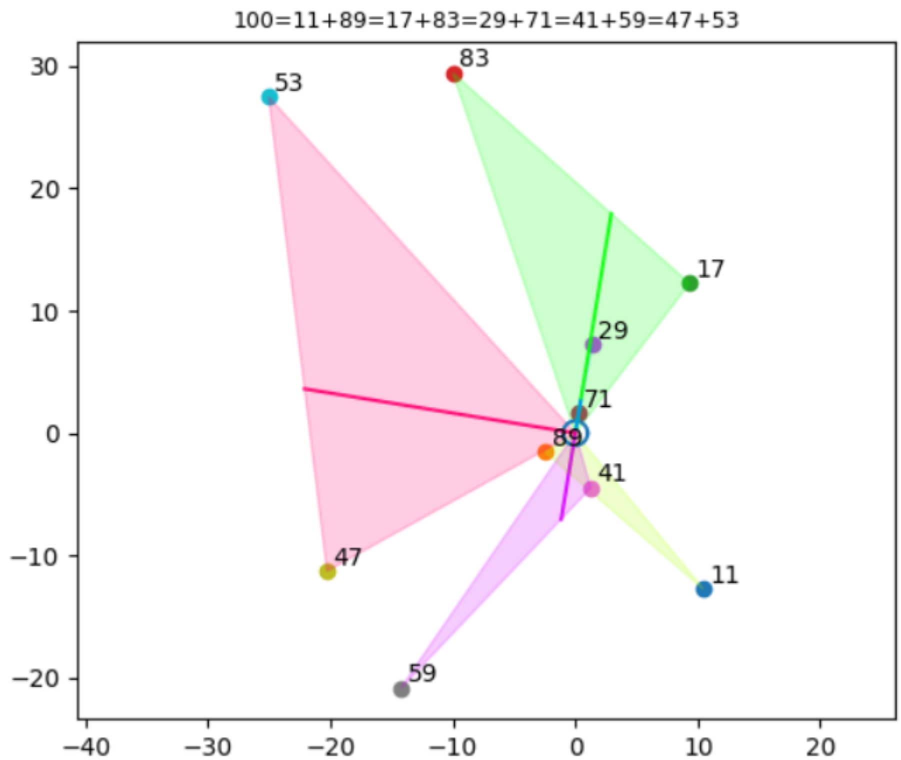


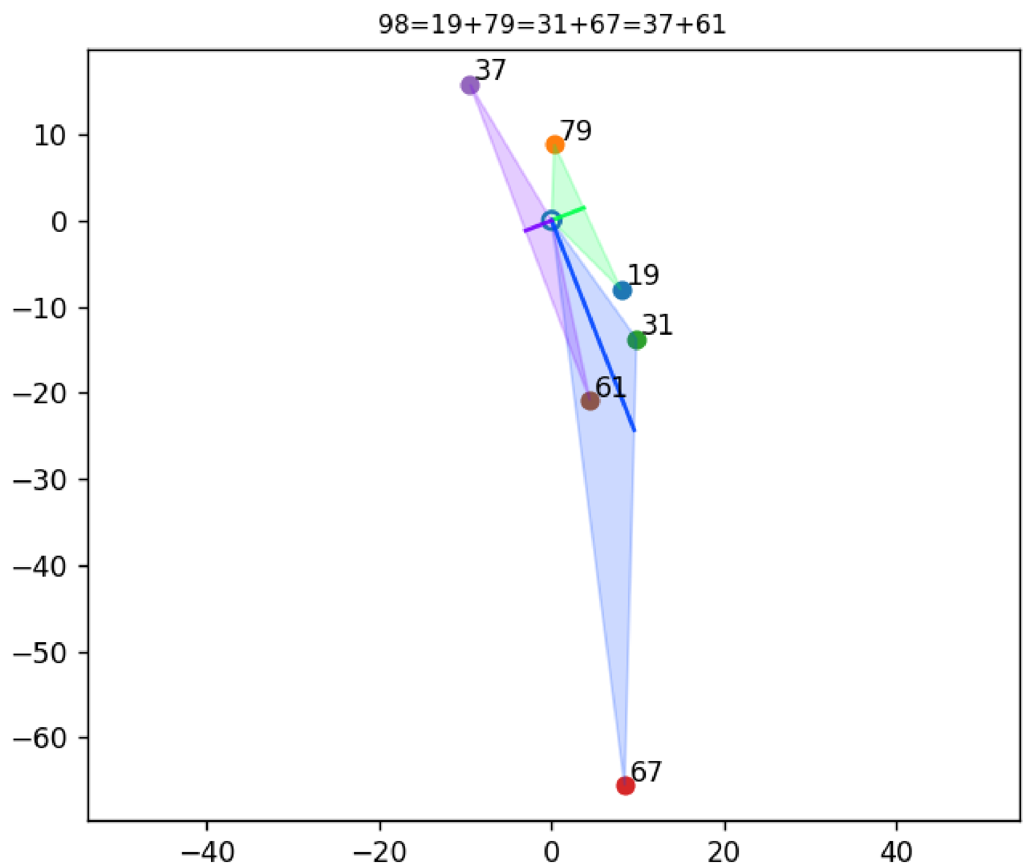
n=100



n=102

La visualisation des petits triangles $(0, z_1, z_2)$ permet d'obtenir les papillons multi-ailes ci-dessous :


100=11+89=17+83=29+71=41+59=47+53
83
53
17
29
71
89
41
47
11
59
30
20
10
0
−10
−20
−40
−30
−20
−10
0
10
20


98=19+79=31+67=37+61
37
79
19
31
61
67
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−40
−20
0
20
40