Remarques sur deux textes consacrés à la primalité et aux cribles
chatgpt pour Denise Vella-Chemla, 8 novembre 2026

1. Objet de ces remarques

Ces notes portent sur les deux documents transmis :

- *Un triplet spectral pour la primalité, à partir des compositions additives et de leur codage booléen* (20 juin 2026)
  https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf ;
- *Cribles de Grothendieck, ensemble Cristal, ensemble de la Castafiore et formule de Victor Varin* (juillet 2026).
  https://denisevellachemla.eu/ia67.pdf ;

L'objectif n'est pas de réécrire ces textes, mais de distinguer les observations correctes, les erreurs techniques et les pistes qui pourraient être reprises. Les remarques ci-dessous portent sur les formulations présentes dans les deux documents.

2. Le codage des compositions additives

2.1. La caractérisation combinatoire

On code une composition additive de n par un mot de longueur $n-1$: chaque position indique si deux cases unitaires consécutives sont séparées ou accolées. En ajoutant un symbole terminal 1, on obtient un mot de longueur n.

La composition

$$\underbrace{x + x + \cdots + x}_{b \text{ termes}}, \qquad n = bx,$$

est alors codée par

$$(0^{x-1}1)^b.$$

Ce mot est une puissance stricte dès lors que $b \geq 2$ et $x \geq 2$.

Réciproquement, si un mot augmenté est une puissance stricte u^b, avec $b \geq 2$, alors chaque bloc se termine par le symbole terminal séparateur 1. Le bloc u code donc une composition d'un certain entier x, et la répétition du bloc code la composition de bx obtenue en répétant cette composition b fois. En particulier, $n = bx$ est composé, sous réserve que les compositions triviales aient bien été exclues.

Ainsi, avec le codage et les conventions indiqués, la proposition combinatoire est convaincante :

$$n \text{ est premier} \iff \text{aucun mot augmenté non trivial associé à } n \text{ n'est une puissance stricte.}$$

Il serait utile de donner une preuve complète dans le texte, plutôt que de renvoyer seulement à une vérification informatique.

2.2. Une réserve sur la portée du résultat

Cette caractérisation détecte la factorisation de n parce qu'une composition répétée en blocs identiques fournit précisément un facteur commun au nombre de blocs et à la somme codée par un bloc. C'est une reformulation combinatoire exacte de la composabilité, et non, à ce stade, un nouveau critère arithmétique indépendant.

Cela ne diminue pas son intérêt : le codage peut être utile pour étudier les compositions, les opérations sur les mots et les structures de symétrie qui leur sont associées.

3. Le passage au triplet spectral

C'est la partie qui demande les corrections les plus importantes.

3.1. L'orbite cyclique d'un mot

Soit m un mot de longueur ℓ, et soit S le décalage cyclique. Si la période minimale de m est j, alors l'orbite de m sous S contient exactement j mots distincts :

$$m,\ S(m),\ \ldots,\ S^{j-1}(m).$$

L'espace vectoriel engendré par cette orbite a donc dimension j, et non ℓ lorsque le mot est périodique.

Sur cet espace, S agit comme un cycle de longueur j. Son spectre est l'ensemble des racines j-ièmes de l'unité, chacune de multiplicité un. En particulier, la valeur propre 1 est toujours simple.

Il s'ensuit que, sur l'espace de Hilbert décrit dans le document, l'affirmation selon laquelle $D = I - S$ possède une valeur propre nulle de multiplicité supérieure à un exactement dans le cas périodique est fausse. La périodicité se lit dans la taille de l'orbite (ou dans l'ordre de S sur le vecteur considéré), pas dans une multiplicité supplémentaire de la valeur propre 1 sur l'espace engendré par les mots distincts de l'orbite.

Une reformulation correcte du fait combinatoire serait :

$$m \text{ est apériodique} \quad \Longleftrightarrow \quad |\operatorname{Orb}_S(m)| = \ell.$$

Cette propriété est exacte, mais elle ne constitue pas à elle seule un critère spectral au sens annoncé.

3.2. Les axiomes du triplet spectral

Dans un triplet spectral usuel (A, H, D), l'opérateur D doit être (essentiellement) autoadjoint et avoir une résolvante compacte ; on demande également que les commutateurs $[D, a]$ soient bornés pour les éléments de l'algèbre considérée.

Or S, qui permute les vecteurs de base, est un opérateur unitaire. En général, $I - S$ n'est pas autoadjoint. De plus, $I - S$ est borné. Sur un espace de Hilbert de dimension infinie, un opérateur

borné ne peut pas avoir une résolvante compacte : pour un nombre complexe z dans l'ensemble résolvant, $(D - zI)^{-1}$ est inversible et borné, donc ne peut être compact sur un espace de dimension infinie.

Il manque donc au moins deux propriétés essentielles à la construction proposée. Vérifier numériquement des commutateurs sur un espace tronqué ne démontre pas les conditions requises sur l'espace complet.

Enfin, il faut vérifier la compatibilité entre l'involution proposée sur l'algèbre des mots et la représentation sur H. L'involution par renversement des mots n'est pas automatiquement l'adjoint de la représentation par concaténation à gauche. Une représentation d'une $*$-algèbre doit respecter cette relation.

3.3. Recommandation

Je recommande de conserver la partie combinatoire, qui peut constituer une note autonome, et de présenter le triplet spectral comme une tentative à reconstruire plutôt que comme une construction établie. Il faudrait repartir des axiomes, choisir un opérateur autoadjoint à résolvante compacte, puis démontrer les propriétés sur l'espace complet. Une simple correction du critère de multiplicité ne suffirait pas.

4. Les cribles de Grothendieck

4.1. Le cadre catégorique

On considère la catégorie à un objet dont le monoïde des endomorphismes est $(\mathbb{N}^*, \times)$. Un crible sur cet objet est une partie $J \subseteq \mathbb{N}^*$ stable par multiplication à droite :

$$s \in J,\ m \in \mathbb{N}^* \quad \Longrightarrow \quad sm \in J.$$

Comme le monoïde est commutatif, cela revient à dire que J est stable par passage aux multiples.

La description du classifiant des sous-objets par les cribles (ou idéaux à droite) est correcte dans ce cadre. L'action indiquée,

$$J.m = \{n \in \mathbb{N}^* : mn \in J\},$$

est également la formule attendue.

4.2. Correction de terminologie : le crible associé à p

Le document pose, pour p premier,

$$\Gamma(p) = \{pk : k \geq 2\}.$$

Cet ensemble est bien un crible : si $pk \in \Gamma(p)$ et $m \geq 1$, alors $p(km) \in \Gamma(p)$ puisque $km \geq 2$.

En revanche, ce n'est pas le crible principal engendré par p. Dans la catégorie considérée, le crible principal engendré par le morphisme p est

$$p\mathbb{N}^* = \{p, 2p, 3p, \ldots\},$$

qui contient p lui-même.

Il faut donc conserver la définition de $\Gamma(p)$ si l'objectif est de ne pas éliminer p à son propre palier, mais remplacer l'expression "crible principal engendré par p" par "crible associé à p, constitué de ses multiples stricts" ou "idéal à droite des multiples stricts de p".

Avec cette correction de vocabulaire, l'identité ensembliste

$$\mathbb{N}^* \setminus \left(\{1\} \cup \bigcup_{p \text{ premier}} \Gamma(p) \right) = \{p : p \text{ premier}\}$$

est exacte.

4.3. Cristal et Castafiore

Le rattachement des constructions géométriques Cristal et Castafiore au crible des multiples stricts est une identification utile, à condition de préciser exactement, pour chaque construction et chaque niveau de troncature, quelle application associe les points géométriques aux entiers ou aux classes considérées.

La seule ressemblance visuelle avec un tamis ne suffirait pas ; il faut établir que les points conservés et éliminés correspondent bien aux ensembles définis. Le document affirme cette correspondance, mais le détail géométrique permettant de la vérifier n'est pas reproduit dans les cinq pages examinées.

5. Le double crible et Goldbach

Pour un entier pair n, le principe consistant à éliminer les x pour lesquels x est composé, puis ceux pour lesquels $n - x$ est composé, est correct. Le complémentaire recherché est bien

$$\{x \in \{1, \ldots, n-1\} : x \text{ et } n - x \text{ sont premiers}\}.$$

Il faut toutefois être attentif aux conventions aux extrémités et aux cas particuliers, notamment $x = 1$ et $n - x = 1$, qui ne sont pas premiers.

La formulation en langage de cribles catégoriques rend les ensembles et les opérations plus précis, mais elle ne démontre pas que ce complémentaire est non vide. Elle reformule le problème de Goldbach ; elle ne le résout pas.

5.1. Sur l'obstruction de parité

La référence à l'obstruction de parité est pertinente : les méthodes classiques de crible rencontrent une difficulté structurelle lorsqu'il s'agit de distinguer les nombres ayant un nombre impair de facteurs premiers de ceux qui en ont un nombre pair, et donc d'isoler les nombres premiers.

Il faut néanmoins éviter une formulation trop absolue. L'obstruction de parité est une limite des méthodes de crible classiques dans leurs cadres usuels ; elle ne constitue pas un théorème affirmant que toute construction qui utilise un crible, quelle qu'en soit la nature, est incapable de contribuer à Goldbach. Pour un texte de recherche, cette nuance est essentielle.

6. La formule de Victor Varin

L'identité

$$\sum_{l=1}^{k} \exp\left(\frac{2\pi i n l}{k}\right) = k\,\mathbf{1}_{k|n}$$

est exacte. Elle résulte de la somme d'une progression géométrique : si $k \mid n$, tous les termes valent 1 ; sinon, la somme des k racines correspondantes de l'unité est nulle.

Par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{n-1} k\,\mathbf{1}_{k|n}$$

est nulle si et seulement si n n'a aucun diviseur propre supérieur ou égal à 2, ce qui caractérise les nombres premiers (pour $n \geq 2$; $n = 1$ est également dans le cas vide).

La formule est donc une expression de Fourier finie et explicite de tests de divisibilité. Elle peut être utile pour des calculs ou des reformulations, mais elle ne fournit pas, en elle-même, une information nouvelle sur l'existence d'un couple de nombres premiers complémentaires. La piste des sommes de Ramanujan peut être examinée, mais il faudrait préciser quel nouvel invariant elles feraient apparaître et démontrer ce qu'il apporterait au double crible.

7. Bilan et priorités de travail

1. **à conserver :** le codage des compositions par mots et la caractérisation combinatoire de la primalité, après rédaction d'une preuve complète.
2. **à corriger substantiellement :** le triplet spectral. Le critère de multiplicité annoncé est faux sur l'espace de Hilbert défini, et $D = I - S$ ne satisfait pas les axiomes usuels d'un opérateur de Dirac spectral.
3. **à conserver avec une correction de vocabulaire :** le cadre des cribles de Grothendieck et l'ensemble des multiples stricts $\Gamma(p)$. Celui-ci est un crible, mais pas le crible principal engendré par p.
4. **à présenter comme reformulation, non comme preuve :** le double crible de Goldbach. Il identifie correctement les candidats, mais ne démontre pas que l'ensemble des candidats est non vide.

5. **à explorer sans promesse prématurée :** les sommes de Ramanujan et leur éventuelle utilisation dans une expression plus informative du double crible.

8. Conclusion

Le second texte est, dans son ensemble, le plus solide des deux : il contient une formalisation catégorique utile et plusieurs identités exactes, à condition de corriger la terminologie concernant le crible principal. Il a aussi le mérite de ne pas prétendre résoudre Goldbach.

Le premier texte contient une idée combinatoire intéressante, mais son habillage en triplet spectral n'est pas valide en l'état. Il faut séparer nettement le résultat combinatoire, qui mérite d'être conservé, de la construction spectrale, qui reste à établir.

Le critère de jugement à garder pour les textes suivants est le suivant : une nouvelle terminologie ou un nouveau cadre formel ne constitue un progrès mathématique que s'il apporte une proposition démontrée, un invariant nouveau, une estimation nouvelle ou un lien rigoureux qui n'était pas disponible auparavant.