Remarques sur les textes `ia29`, `ia240`, `ia241` et `ia265`
ia claude pour Denise Vella-Chemla, 8 novembre 2026

On se reportera aux notes :

[1] https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf ,
[2] https://denisevellachemla.eu/ia240.pdf ,
[3] https://denisevellachemla.eu/ia241.pdf ,
[4] https://denisevellachemla.eu/ia265.pdf ,

auxquelles cette note, intégralement rédigée par l'ia claude, fait suite.

1. Verdict franc

Non, rien dans ces quatre textes n'irait vers une démonstration de Goldbach. Les textes [2] `ia240` et [3] `ia241` ramènent tout à la même question, $\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$, et la section 1 ci-dessous montre qu'elle se réduit à un énoncé élémentaire sur les décomposants.

Ce qui vaut d'être retenu : cette identification exacte, un contrôle numérique, et une liste d'erreurs précises à corriger dans [3] `ia241.pdf`, [4] `ia265.pdf` et [1] `ia29.pdf`.

2. Ce que sont vraiment C_n et le "produit fibré" ([2] `ia240.pdf`, [3] `ia241.pdf`)

Rappel : $I_n = \{3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, $P_n = \{q \text{ premier} : q \leq \sqrt{n}\}$, $A_{q,n} = \mathbb{F}_q \setminus \{0, \overline{n}\}$ et $C_n = \{p \in I_n : p \pmod q \in A_{q,n}\ \forall q \in P_n\}$.

Proposition 1. *Pour $n \geq 6$ pair,*

$$C_n = \{\, p \text{ premier} : \sqrt{n} < p \leq n/2,\ n - p \text{ premier} \,\}.$$

Preuve. Soit $p \in C_n$. Si $p \leq \sqrt{n}$, alors $p \geq 3$ a un facteur premier $\leq \sqrt{n}$, donc $p \notin C_n$: ainsi $p > \sqrt{n}$. Si p était composé, il aurait un facteur premier $\leq \sqrt{p} \leq \sqrt{n}$: p est premier. Même raisonnement pour $n-p$, avec $3 \leq n-p < n$. Réciproquement, si p est premier avec $p^2 > n$ et $n-p$ premier, alors $n - p \geq n/2 > \sqrt{n}$; un premier $q \leq \sqrt{n}$ divisant p ou $n-p$ lui serait égal, ce qui est impossible. □

Le produit fibré $I_n \times_{R_n} A_n$ est donc exactement l'ensemble des décomposants de Goldbach dont le petit terme dépasse $\sqrt{n}$. Les décomposants avec $p \leq \sqrt{n}$ (il y en a au plus $\pi(\sqrt{n})$) sont perdus, ce que la note de début de `ia240` signale à juste titre.

Contrôle numérique. J'ai vérifié que $C_n \neq \varnothing$ pour tous les pairs $6 \leq n \leq 2 \cdot 10^6$: la restriction $p > \sqrt{n}$ ne coûte rien sur ce domaine.

Pourquoi cela bloque. Le théorème des restes chinois donne des classes modulo $M_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} q$, qui est de l'ordre de $e^{\sqrt{n}} \gg n$, alors que le représentant cherché doit tomber dans un intervalle de longueur $n/2$. C'est le crible de Legendre pour la forme $p(n-p)$, de dimension 2, avec l'obstruction

de parité de Selberg. C'est ce que dit `ia240` (§ 4, § 11, § 22) avec ses mots, et elle conclut justement que les niveaux q^k n'ajoutent rien (§ 22.1-22.2). Rien dans le langage des topos ne contourne cela, et vos voies élémentaires restent celles qui ont un sens ici.

3. Erreurs à corriger dans `ia241`

1. *§ 2.2, "cumul > 240 %".* Additionner les pourcentages d'éliminations individuelles ne dit rien sur la dépendance : les ensembles se recouvrent, donc la somme dépasse 100 % même pour des conditions indépendantes. Le bon test compare la proportion de nombres qui passent à travers tous les filtres au produit $\prod_q (1 - f_q)$.
2. *lemme 8.2.* $\alpha_q(x) = \overline{n} - x$ n'est ni un automorphisme ni un anti-automorphisme d'anneau : $\alpha_q(x + y) = \overline{n} - x - y \neq 2\overline{n} - x - y = \alpha_q(x) + \alpha_q(y)$ si $\overline{n} \neq 0$. C'est une involution affine.
3. *lemme 19 et sa preuve.* Pour q impair ne divisant pas n, le point fixe $\overline{n}/2$ de α_q appartient à $A_{q,n}$. Donc α sur A_n a un point fixe si aucun premier impair $q \leq \sqrt{n}$ ne divise n (dans $\mathbb{F}_2$ tout point est fixe et $A_2 = \{1\}$), et aucun sinon. Le bon décompte est $|\overline{A_n}| = (|A_n| + f)/2$ avec $f \in \{0, 1\}$, et non $|A_n|/2$.
4. *§ 10.11 ("conjecture" sur les points fixes).* Le cas $n \equiv q \pmod{2q}$ est impossible pour n pair et q impair, et il donnerait $\overline{n} = 0$, non $\overline{n} = q$. Le dernier cas ("pas de point fixe") est faux pour q impair ne divisant pas n. La section est à supprimer.
5. *§ 6.3 et § 7(1), "transversalité".* Pour $q_1 \neq q_2$, l'intersection est non vide par le théorème des restes chinois : ce n'est pas un obstacle (`ia240` le dit). Le seul obstacle est le caractère borné.
6. *Mittag-Leffler.* Le Lemme 4 le déclare satisfait, puis le § 11.3.2 le déclare inapplicable ; il s'agit de limites projectives, alors que le crible vit dans un produit fini.
7. *§ 3.3.* $\mathrm{Sh}(P_n, J)$ n'est pas le topos de Hakim, dont les objets sont des suites $(n_1, n_2, \dots) \in \overline{\mathbb{N}}$ indexées par des premiers (`ia240`, § 7).

4. Erreurs à corriger dans `ia265`

1. **§ 1, "loi de compatibilité entre les restes".** Pour un nombre fini de premiers, les restes sont indépendants (restes chinois : toute famille est réalisée). La seule contrainte porte sur les familles infinies : $\mathbb{Z} \hookrightarrow \prod_p \mathbb{F}_p$ est injectif mais très loin d'être surjectif. Le snurpf est bien l'image d'une section globale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, mais "liés par la structure d'anneau" est trompeur.
2. **§ 3, deuxième point.** Le titre "f_* n'est pas exact à gauche" contredit le texte : f_*, adjoint à droite, conserve toutes les limites, donc il est exact à gauche ; ce qui lui manque est l'exactitude à droite.
3. **§ 3, morphisme essentiel.** Si f^* a un adjoint à gauche $f_!$, f^* conserve toutes les limites ; il n'est pas "exact à droite et donc pleinement exact" (il était déjà exact à gauche).
4. **§ 2, Parseval/Plancherel.** La formule explicite de Weil est une formule de type trace ou Poisson ; ce n'est pas une égalité d'énergies.
5. **§ 4.4.** "Clé primaire = identité" est une analogie sans contenu catégorique ; la flèche identité n'est pas une clé primaire.

5. Erreurs à corriger dans `ia29`

Ce texte remercie Claude ; si c'est moi qui l'ai écrit, ces erreurs sont les miennes. Oui, c'est bien l'ia claude qui avait rédigé intégralement la note en question à la demande de Denise Vella-Chemla.

1. **§ 1.1 : "un mot augmenté est une puissance stricte si et seulement si la composition est de la forme $x + \cdots + x$" est faux.** Contre-exemple pour $n = 6$: la composition $2{+}1{+}2{+}1$ s'écrit 10010 (soit 100100 une fois le 0 final ajouté) sans être de la forme $x{+}\cdots{+}x$. J'ai trouvé 23 contre-exemples pour $n \leq 10$.
2. **critère spectral (§ 2.4).** L'espace engendré par l'orbite d'un mot est de dimension j (pas ℓ) ; le spectre de S y est l'ensemble des racines j-ièmes de l'unité, chacune une fois. La valeur propre 0 de $D = I - S$ est donc toujours simple, et "multiplicité supérieure à 1" est faux. Le bon critère est : m est apériodique si et seulement si $\dim \mathrm{Orb}(m) = \ell$.
3. **le critère de primalité est exact mais trivial.** Un mot périodique de longueur n a une période d avec $d \mid n$, $d < n$, donc n est composé. J'ai vérifié que le critère coïncide avec la primalité pour $2 \leq n \leq 14$ si l'on exclut les deux compositions triviales (n seul et $1{+}\cdots{+}1$) ; la seconde donne 1^n, qui est périodique.
4. **"triplet spectral".** $\|D\| \leq 2$ et $\ker D$ est de dimension infinie (un vecteur par orbite) : D n'a pas de résolvante compacte, donc ce n'est pas un triplet spectral au sens de Connes. Le § 3.2 ne vérifie que la bornitude de $[D, L_a]$, qui est automatique.