Expliquer un alignement par opérateur de Frobenius (Denise Vella-Chemla, 4.10.2020)

Il s'agit de fournir l'explication d'une question qu'on se posait au sujet de l'alignement sur un axe vertical des images complexes qu'on a choisi d'associer aux nombres, en lien avec l'opérateur de Frobenius.

Poursuivant nos expérimentations informatiques dans le plan complexe, on représente les nombres par des nombres complexes particuliers qui sont leur image par certaines fonctions. Voici le programme qu'on utilise :

```
import math
from matplotlib import *
import matplotlib.pyplot as plt
from mpmath import *

def prime(atester):
  pastrouve = True ; k = 2 ;
  if (atester in [0,1]): return False ;
  if (atester in [2,3,5,7]): return True ;
  while (pastrouve):
    if ((k * k) > atester): return True
    else:
      if ((atester % k) == 0): return False
      else: k=k+1

fig = plt.figure()
ax = fig.gca()
ax.set_aspect('equal')

n = 100
m = n
for k in range(1,n):
    t = exp(-j*math.pi*k/n)              *****
    z = (1.0 - t**m)/(1.0 - t)           *****
    if prime(k):
        c = 'r' if prime(k) else 'g'
        plt.plot(z.real, z.imag, color=c, marker='o', markersize=1)
        ax.text(z.real, z.imag, str(k), color=c, fontsize=8, ha='right', alpha=0.8)

xmin, xmax, ymin, ymax = ax.axis()
ax.set_xlim(xmin-10, xmax+10) ;
ax.set_ylim(ymin-10, ymax+10)
plt.show()
```

Comme on le voit dans les lignes de code marquées de cinq étoiles, le programme calcule l'inverse de la racine de $t = e^{\frac{2i\pi x}{n}}$ et applique à ce nombre la fonction $f(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots$.

L'inverse de la racine carrée s'obtient en opposant l'exposant [1], et en enlevant le 2 du $2i\pi\ldots$ [2].

Le programme calcule donc $t_k = e^{\frac{-i\pi k}{n}}$, puis $z_k = \dfrac{1-t_k^m}{1-t_k} = \displaystyle\sum_{l=1}^{l=m-1} t_k^l$ pour $k \in [1, n-1]$ et "plotte" le complexe correspondant.

On a constaté que lorsque $m = n$, les points s'alignent alors qu'ils ne sont pas alignés lorsque $m \neq n$. Les figures 1 et 2 montrent l'alignement lorsque la somme est calculée "jusqu'au bout". Les figures 3 et 4 montrent l'absence d'alignement quand on calcule les sommes de puissances sans aller jusqu'au dernier terme [3]. Sur la figure 3, les nombres jusqu'à 100 sont dessinés en n'allant que jusqu'à la 98-ième puissance dans le calcul de la somme des termes de z_k, tandis que sur la figure 4, ne sont sommés, toujours pour les 100 premiers nombres, que les termes jusqu'à la 47-ième puissance.

1. $\frac{1}{z} = z^{-1}$.
2. $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$
3. Pour que les graphiques soient assez visuels, on a parfois omis les points très "excentrés".

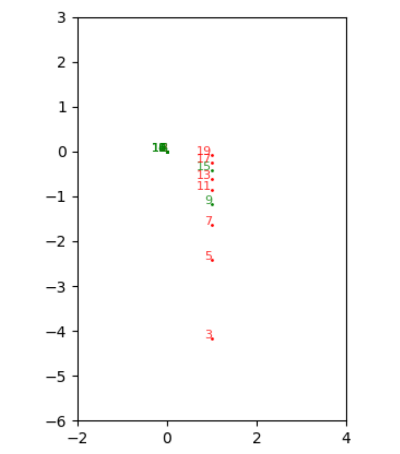


Fig. 1 : $x \leq 20$

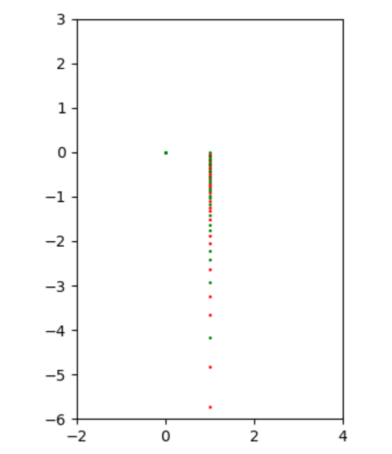
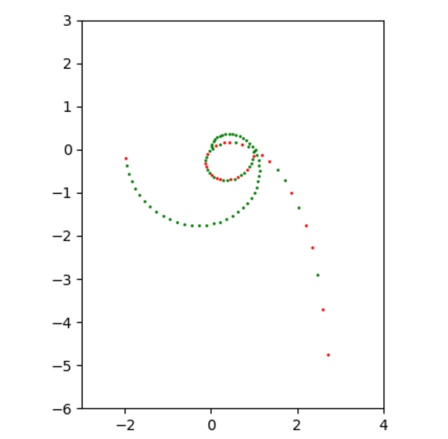


Fig. 2 : $x \leq 100$



$Fig.$ 3 : 100 nbs, exposants $\leq$ 98

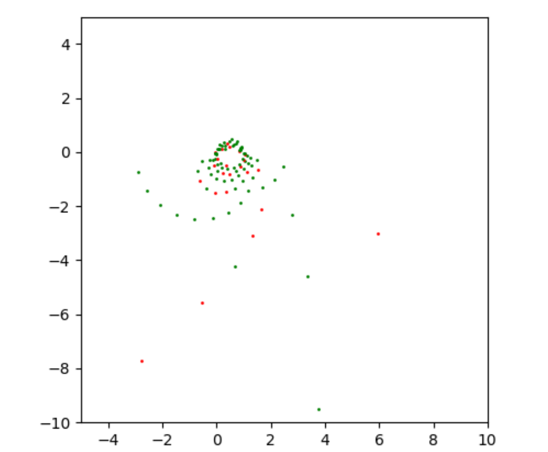


Fig. 4

L'explication de l'alignement de tous les nombres (si ce n'est un point qu'on semble distinguer comme non aligné avec les autres) sur la droite de partie réelle 1 est la suivante :

Puisque $t_k = e^{\frac{-i\pi k}{n}}$ et $z_k = \dfrac{1-t_k^m}{1-t_k}$, avec $k \in [1, n-1]$, si $m = n$, alors on a $t_k^m = e^{-i\pi k}$ et de ce fait,

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1-e^{-i\pi k}}{1-e^{\frac{-i\pi k}{n}}} \\ &= \frac{1-(-1)^k}{1-e^{\frac{-i\pi k}{n}}} \end{aligned}$$

Le dernier numérateur ci-dessus est nul lorsque k est pair.

Si k est impair, on a :

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{2}{1-e^{\frac{-i\pi k}{n}}} \\ &= \frac{2\left(1-e^{\frac{i\pi k}{n}}\right)}{\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{2\left(1-e^{\frac{i\pi k}{n}}\right)}{2-2\cos\frac{k\pi}{n}} \\
&= \frac{1-e^{\frac{i\pi k}{n}}}{1-\cos\frac{k\pi}{n}} \\
&= \frac{1-\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{1-\cos\frac{k\pi}{n}} \\
&= \frac{1-\cos\frac{k\pi}{n}}{1-\cos\frac{k\pi}{n}} + i\,\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{1-\cos\frac{k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

qui est de partie réelle constante égale à 1, d'où l'alignement des complexes obtenus comme images des nombres entiers.

La dernière figure ci-dessous montre les nombres pairs mal lisibles et tous collés sur 0. Pour ne pas écraser davantage les nombres les uns sur les autres, on a laissé de côté le nombre 1 qui est bien aligné aussi mais tout en bas à $-32i$.

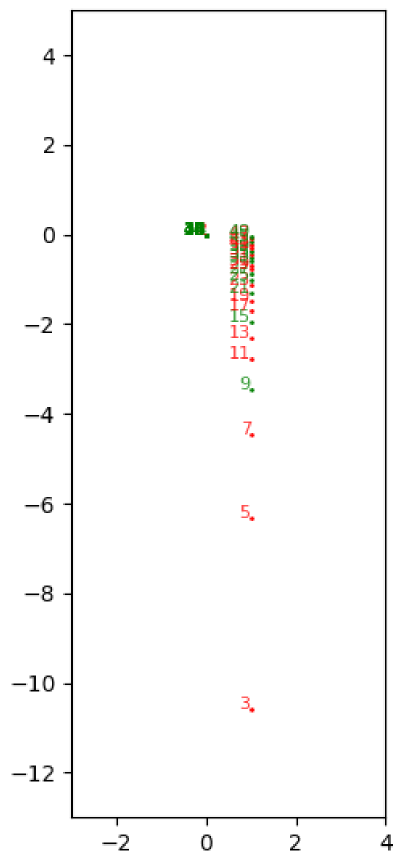


Fig. 4