Goldbach en min-plus (suite) : le noyau correct, Fonction de composabilité, graphe de Cayley, graphe triangulaire épointé
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, 30 septembre 2026

M'interrogeant sur la façon d'intégrer dans un même modèle l'addition et la multiplication, j'écris un petit programme (fichier lieaddmult.pdf ci-dessous) que je fournis à l'ia claude ; je lui fournis également les textes suivants :

https://denisevellachemla.eu/synthese-cg-centres-minplus-dvc.pdf
https://denisevellachemla.eu/excentricite-pointe-retiree-preuve-claude-dvc-20260708.pdf
https://denisevellachemla.eu/lieaddmult.pdf
https://denisevellachemla.eu/addmult-mistral-dvc-20260930.pdf
https://denisevellachemla.eu/reprise-centre-graphe-triangulaire-claude-dvc.pdf

et lui demande de les analyser en insistant sur le fait qu'il s'auto-attribue ou attribue à l'ia mistral des idées que je leur ai fournies.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claude.

Dans toute la note, n et N désignent des entiers pairs ≥ 6 (le cas $4 = 2 + 2$ est exclu : dans la construction du graphe triangulaire, 2 n'est pas retenu).

Toutes les reformulations ci-dessous sont des *équivalences* avec la conjecture de Goldbach ; aucune n'en est une preuve.

1. Primalité lue dans la matrice des quotients

Soit $M_{\text{mult}}[x, y] = x/y$ pour $1 \leq x, y \leq N$.

Proposition 1. *Pour $x \geq 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *x est premier ;*
2. *la ligne x de M_{mult} ne contient aucun entier aux colonnes $2 \leq y \leq x - 1$;*
3. *la ligne x ne contient aucun entier aux colonnes $2 \leq y \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.*

Démonstration. $M_{\text{mult}}[x, y] \in \mathbb{N}$ équivaut à $y \mid x$, d'où (1)⇔(2). Les implications (2)⇒(3) et (3)⇒(1) : si $x = ab$ est composé avec $1 < a \leq b < x$, alors $a^2 \leq ab = x$, donc la colonne $a \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ contient l'entier b. □

C'est le crible d'Ératosthène écrit en matrice : la colonne y contient des entiers exactement aux multiples de y.

2. Fonction de composabilité et convolution min-plus

Dans l'algèbre min-plus $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, posons pour $k \geq 2$

$$a(k) = \#\{d : \ 2 \leq d \leq k - 1, \ d \mid k\}.$$

Alors $a(k) = 0$ si et seulement si k est premier (proposition 1).

Théorème 2. *Pour N pair ≥ 4, posons $(a \otimes a)(N) = \min_{2 \leq p \leq N-2}\Big(a(p) + a(N-p)\Big)$. Alors*

$$\textit{Goldbach est vraie pour } N \iff (a \otimes a)(N) = 0,$$

et l'ensemble des p réalisant le minimum est, dans ce cas, exactement l'ensemble des p tels que p et $N-p$ sont premiers.

Démonstration. Les $a(\cdot)$ sont des entiers naturels : la somme $a(p)+a(N-p)$ est nulle si et seulement si $a(p) = a(N-p) = 0$, c'est-à-dire si p et $N-p$ sont premiers. □

Remarque : seul le *support* $\{k : a(k) = 0\}$ intervient. Remplacer a par l'indicatrice des composés (valeurs 0/1) donne le même énoncé : le fait que a *compte* les diviseurs n'apporte rien à l'équivalence.

3. Matrice de Goldbach : vision graphe de Cayley

Soit $W_N[i,j] = a\Big((j-i) \bmod N\Big)$ pour $i, j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, avec $a(0) = a(1) = +\infty$.

Proposition 3. *1. W_N est une matrice circulante : c'est (aux poids près) la matrice d'adjacence du graphe de Cayley orienté de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ pour l'ensemble de générateurs $\{2, \ldots, N-2\}$, l'arc $i \to i+p$ ayant le poids $a(p)$. Les arcs de poids nul correspondent aux générateurs premiers.*

2. Le minimum de $W_N[i,k] + W_N[k,i]$ sur les couples (i,k) vaut $(a \otimes a)(N)$.

3. W_N possède un 2-cycle de poids nul si et seulement s'il existe un premier $p \in [2, N-2]$ tel que $-p \equiv N-p$ soit aussi premier, c'est-à-dire si et seulement si Goldbach est vraie pour N. Autrement dit, en notant $\overline{\mathcal{P}}$ l'image dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ des premiers de $[2, N-2]$:

$$\textit{Goldbach}(N) \iff \overline{\mathcal{P}} \cap (-\overline{\mathcal{P}}) \neq \emptyset.$$

4. Le nombre de 2-cycles de poids nul (paires non ordonnées $\{i,k\}$) vaut $N\,g(N)$, où $g(N)$ est le nombre de décompositions non ordonnées $N = p+q$, sauf si $N/2$ est premier, auquel cas il vaut $N\,g(N) - N/2$.

Démonstration. (1) et (2) : par définition, un 2-cycle passant par i et k a pour poids $a(p)+a(N-p)$ avec $p = (k-i) \bmod N \in [2, N-2]$, et $(i,k) \mapsto (p,i)$ est une bijection. (3) découle de (2) et du théorème 2. (4) : le nombre de couples ordonnés (i,k) de poids nul est $N \cdot r(N)$, où $r(N) = \#\{p \in [2, N-2] :\ p,\ N-p \text{ premiers}\}$; chaque paire non ordonnée correspond à deux couples, donc il y a $N\,r(N)/2$ paires. On a $r(N) = 2g(N)$, sauf si $N/2$ est premier où $r(N) = 2g(N) - 1$ (la décomposition $N/2 + N/2$ n'est comptée qu'une fois dans r). □

Remarque : la valeur propre min-plus $\lambda(W_N)$ vaut 0 pour tout N : les poids sont ≥ 0, et répéter $N/2$ fois le pas 2 (de poids $a(2) = 0$) ferme un circuit de poids nul, puisque N est pair. La valeur propre ne dit donc rien sur les circuits de longueur 2, et ne peut pas être reliée au théorème de Vinogradov.

4. Contrainte de résidus sur les écarts critiques

Appelons *écart critique* de N un entier $p \in [3, N-3]$ tel que p et $N-p$ soient premiers.

Proposition 4. *Soit q un premier impair.*

1. *Un écart critique divisible par q est égal à q.*
2. *Si $q \mid N$, il n'y a aucun écart critique divisible par q, sauf si $N = 2q$ (auquel cas $p = q = N/2$).*
3. *Si $q \nmid N$, q est écart critique si et seulement si $N - q$ est premier.*

Démonstration. (1) Un premier divisible par q est égal à q. (2) Si $q \mid N$ et $q \mid p$, alors $q \mid N-p$, donc $N - p = q$ par (1), d'où $p = q = N - p$ et $N = 2q$. (3) est la définition. □

C'est exactement la condition du crible d'Ératosthène : elle restreint le lieu de recherche, sans garantir qu'il soit non vide.

5. Excentricités dans le graphe triangulaire épointé

5.1. Cadre

Soit $L = [0 = \ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_m = n]$ la liste croissante formée de 0, des premiers impairs de 3 à $n-2$, et de n ; soit $\delta_k = \ell_{k+1} - \ell_k$. Le graphe T a pour sommets les couples (i, j) avec $0 \le j \le i \le m$; les arêtes sont

- horizontales, entre (i, j) et $(i, j+1)$, de poids δ_j ;
- verticales, entre (i, j) et $(i+1, j)$, de poids δ_i.

On note $A = (0, 0)$, $B = (m, m)$, $Z = (m, 0)$ (la pointe) et $T' = T \setminus \{Z\}$. On suppose $m \ge 2$.

Lemme 5 (séparabilité)**.** *Pour $s_1 = (i_1, j_1)$ et $s_2 = (i_2, j_2)$ dans T,*

$$d_T(s_1, s_2) = |\ell_{i_1} - \ell_{i_2}| + |\ell_{j_1} - \ell_{j_2}|.$$

Démonstration. Minoration. Une arête verticale ne modifie que i (d'un pas), une arête horizontale ne modifie que j. Pour passer de i_1 à i_2, tout chemin emprunte au moins une fois chaque arête verticale "entre" ces indices, de poids total au moins $|\ell_{i_1} - \ell_{i_2}|$; de même pour j. Les deux contributions s'additionnent.
Chemin réalisant la borne. Monter i de i_1 à $i^* = \max(i_1, i_2)$ en gardant $j = j_1 \le i_1 \le i$, puis déplacer j de j_1 à j_2 à la ligne $i^* \ge j_1, j_2$, puis ramener i de i^* à i_2 en gardant $j = j_2 \le i_2 \le i$. Chaque arête n'est franchie que dans un sens, donc par télescopage le poids vaut la borne. □

Lemme 6 (le retrait de la pointe ne change pas les distances)**.** *Pour $s_1, s_2 \in T'$, $d_{T'}(s_1, s_2) = d_T(s_1, s_2)$.*

Démonstration. Z n'a que deux voisins, $(m-1, 0)$ et $(m, 1)$. Un plus court chemin de T ne traversant Z qu'en sommet intérieur emprunte $(m-1, 0) \to Z \to (m, 1)$, de poids $\delta_{m-1} + \delta_0$. Le chemin $(m-1, 0) \to (m-1, 1) \to (m, 1)$ a le même poids $(\delta_0 + \delta_{m-1})$, reste dans T puisque $1 \le m-1$, et évite Z. □

5.2. Formule de l'excentricité

Théorème 7. *Pour tout sommet $s = (i, j)$ de T',*

$$e_{T'}(s) = \max\Big(d(s, A), d(s, B)\Big) = \max\Big(\ell_i + \ell_j,\ 2n - \ell_i - \ell_j\Big).$$

Démonstration. Par les lemmes 5 et 6, pour $t = (x, y) \in T'$, $d_{T'}(s, t) = |\ell_i - \ell_x| + |\ell_j - \ell_y| =: f(\ell_x, \ell_y)$. La fonction f est convexe en (ℓ_x, ℓ_y). Les points (ℓ_x, ℓ_y), $(x, y) \in T$, appartiennent au triangle convexe $\Delta = \{0 \le v \le u \le n\}$ de sommets $(0, 0), (n, 0), (n, n)$, qui sont les images de A, Z, B. Le maximum d'une fonction convexe sur un polytope est atteint en un sommet, donc

$$\max_{t \in T} d_T(s, t) = \max\Big(d(s, A), d(s, B), d(s, Z)\Big).$$

Or $d(s, Z) = (n - \ell_i) + \ell_j \le n$ car $\ell_j \le \ell_i$, tandis que $d(s, A) + d(s, B) = 2n$ donne $\max(d(s, A), d(s, B)) \ge n$. Donc $d(s, Z) \le \max(d(s, A), d(s, B))$ et le maximum sur T est atteint en A ou en B. Comme $A, B \in T'$ et $T' \subset T$, ce maximum est aussi $e_{T'}(s)$. □

Corollaire 8. *Pour tout $s = (i, j) \in T'$, $e_{T'}(s) \ge n$, avec égalité si et seulement si $\ell_i + \ell_j = n$. Les sommets de T' vérifiant $\ell_i + \ell_j = n$ sont exactement les (i, j) tels que ℓ_i, ℓ_j sont deux premiers impairs de somme n. Par conséquent, pour $n \ge 6$ pair :*

$$\mathit{Goldbach}(n) \iff \min_{s \in T'} e_{T'}(s) = n,$$

et les centres de T' sont alors exactement les décompositions de Goldbach de n.

Démonstration. $\max(u, 2n - u) \ge n$ avec égalité si et seulement si $u = n$. Si $\ell_i + \ell_j = n$ avec $j \le i$, soit $\ell_j = 0$ (donc $j = 0$, $\ell_i = n$, $i = m$: c'est Z, retiré), soit ℓ_j et ℓ_i sont des premiers impairs. Réciproquement une telle paire fournit un sommet de T'. □

Remarque : le seul sommet de T d'excentricité n qui ne soit pas une décomposition est la pointe $Z = (n, 0)$, le centre trivial ; il est retiré. Si n n'a pas de décomposition, les centres de T' ont une excentricité $> n$.

Remarque : comme la note de reprise de juillet l'a établi numériquement, la propriété "il existe un centre d'excentricité n" est vraie presque sûrement pour un ensemble aléatoire de Cramér de même densité : ce cadre est une reformulation fidèle de Goldbach, non un levier.