De l'importance des bijections, Denise Vella-Chemla, octobre 2024

On cherche à démontrer que tout nombre pair ($n > 4$) est la somme de deux nombres premiers (impairs). $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. On a compris (et Leila Schneps a démontré [1]) qu'un nombre premier p, inférieur à la moitié de n, qui ne partage aucun reste de division euclidienne avec n (lorsqu'on le divise par un nombre premier impair inférieur à $\sqrt{n}$) est un décomposant de Goldbach de n.

On va ci-après établir une relation entre certaines écritures simples des deux nombres 0 et n, qui devrait garantir l'existence d'un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair.

Étudions l'exemple fétiche $n = 98$ pour fixer les idées.

Ci-dessous, dans un tableau, dans les deux colonnes de gauche, les écritures de 98, de la forme $n = 98 = r + b \times q$ avec $3 \leq r \leq \frac{n}{2},\ \ 1 \leq b \leq \sqrt{n},\ \ b \in \mathcal{P} \cup \{1\}$ et dans les deux colonnes de droite les écritures de 0 de la forme $0 = r - b \times q$ avec $3 \leq r \leq \frac{n}{2},\ \ 1 \leq b \leq \sqrt{n},\ \ b \in \mathcal{P} \cup \{1\}$.

98	$= 3 + 5 \times 19$	98	$= 9 + 1 \times 89$	0	$= 3 - 3 \times 1$	0	$= 11 - 1 \times 11$
	$= 5 + 3 \times 31$		$= 15 + 1 \times 83$		$= 5 - 5 \times 1$		$= 13 - 1 \times 13$
	$= 7 + 7 \times 13$		$= 19 + 1 \times 79$		$= 7 - 7 \times 1$		$= 17 - 1 \times 17$
	$= 11 + 3 \times 29$		$= 25 + 1 \times 73$		$= 9 - 3 \times 3$		$= 19 - 1 \times 19$
	$= 13 + 5 \times 17$		$= 27 + 1 \times 71$		$= 15 - 3 \times 5$		$= 23 - 1 \times 23$
	$= 17 + 3 \times 27$		$= 31 + 1 \times 67$		$= 21 - 3 \times 7$		$= 29 - 1 \times 29$
	$= 21 + 7 \times 11$		$= 37 + 1 \times 61$		$= 25 - 5 \times 5$		$= 31 - 1 \times 31$
	$= 23 + 3 \times 25$		$= 39 + 1 \times 59$		$= 27 - 3 \times 9$		$= 37 - 1 \times 37$
	$= 29 + 3 \times 23$		$= 45 + 1 \times 53$		$= 33 - 3 \times 11$		$= 41 - 1 \times 41$
	$= 33 + 5 \times 13$				$= 35 - 5 \times 7$		$= 43 - 1 \times 43$
	$= 35 + 3 \times 21$				$= 39 - 3 \times 13$		$= 47 - 1 \times 47$
	$= 41 + 3 \times 19$				$= 45 - 3 \times 15$		
	$= 43 + 5 \times 11$				$= 49 - 7 \times 7$		
	$= 47 + 3 \times 17$						
	$= 49 + 7 \times 7$						

Associons maintenant les égalités de la colonne de gauche et celles de la colonne de droite par des lettres entre parenthèses, cette bijection s'effectue entre deux égalités qui ont r en commun (dans les écritures $n = r + b \times q$ et $0 = r - b \times q$).

[1] voir https://denisevellachemla.eu/moins-deux.pdf section 1.

98	$= 3 + 5 \times 19$	(a)	0	$= 9 - 3 \times 3$	(p)
	$= 5 + 3 \times 31$	(b)		$= 15 - 3 \times 5$	(q)
	$= 7 + 7 \times 13$	(c)		$= 21 - 3 \times 7$	(g)
	$= 11 + 3 \times 29$	(d)		$= 25 - 5 \times 5$	(s)
	$= 13 + 5 \times 17$	(e)		$= 27 - 3 \times 9$	(t)
	$= 17 + 3 \times 27$	(f)		$= 33 - 3 \times 11$	(j)
	$= 21 + 7 \times 11$	(g)		$= 35 - 5 \times 7$	(k)
	$= 23 + 3 \times 25$	(h)		$= 39 - 3 \times 13$	(w)
	$= 29 + 3 \times 23$	(i)		$= 45 - 3 \times 15$	(x)
	$= 33 + 5 \times 13$	(j)		$= 49 - 7 \times 7$	(o)
	$= 35 + 3 \times 21$	(k)		----------------------------------	
	$= 41 + 3 \times 19$	(l)		$= 3 - 1 \times 3$	(a)
	$= 43 + 5 \times 11$	(m)		$= 5 - 1 \times 5$	(b)
	$= 47 + 3 \times 17$	(n)		$= 7 - 1 \times 7$	(c)
	$= 49 + 7 \times 7$	(o)		$= 11 - 1 \times 11$	(d)
	----------------------------------			$= 13 - 1 \times 13$	(e)
	$= 9 + 1 \times 89$	(p)		$= 17 - 1 \times 17$	(f)
	$= 15 + 1 \times 83$	(q)		$= 19 - 1 \times 19$	(r)
	$= 19 + 1 \times 79$	(r)		$= 23 - 1 \times 23$	(h)
	$= 25 + 1 \times 73$	(s)		$= 29 - 1 \times 29$	(i)
	$= 27 + 1 \times 71$	(t)		$= 31 - 1 \times 31$	(u)
	$= 31 + 1 \times 67$	(u)		$= 37 - 1 \times 37$	(v)
	$= 37 + 1 \times 61$	(v)		$= 41 - 1 \times 41$	(l)
	$= 39 + 1 \times 59$	(w)		$= 43 - 1 \times 43$	(m)
	$= 45 + 1 \times 53$	(x)		$= 47 - 1 \times 47$	(n)

Il faut comprendre pourquoi toute telle bijection envoie une écriture de la forme $n = r + 1 \times q$ sur une écriture de la forme $0 = r - 1 \times r$, c'est-à-dire associe deux écritures des parties basses du tableau, i.e. deux écritures qui ont toutes les deux le nombre 1 comme premier facteur dans le produit.

Disons-le autrement : on désigne les 4 parties du tableau par les termes HG pour haut-gauche, HD pour haut-droit, BG pour bas-gauche et BD pour bas-droit. La conjecture de Goldbach serait démontrée si l'on pouvait prouver qu'il y a toujours une flèche entre BG et BD. S'il existait un contre-exemple à la conjecture, on aurait une configuration dans laquelle toutes les flèches partant du bas du tableau seraient soit des flèches BG $\longleftrightarrow$ HD, soit des flèches BD $\longleftrightarrow$ HG.

Étudions ces produits un instant : les produits qui interviennent dans les égalités des deux parties hautes du tableau sont ordonnés, du plus petit au plus grand (avec seulement un palier sur $\frac{n}{2}$, qui se trouve écrit dans les deux colonnes en partie haute) ; ils vont croissant dans la colonne de droite, en descendant dans la colonne, puis vont croissant à nouveau (après $\frac{n}{2}$) dans la colonne de gauche, en remontant dans la colonne). De même, les produits qui interviennent dans les égalités des parties basses du tableau sont ordonnés de façon croissante similairement (descendre dans la colonne de droite, et remonter dans celle de gauche pour maintenir la croissance stricte).
Rappelons que les égalités sont des 4 formes suivantes :

- dans la partie HG, $n = r + b \times q$ avec $3 \leq r \leq \frac{n}{2},\;\; 1 \leq b \leq \sqrt{n},\;\; b \in \mathcal{P} \cup \{1\}$;
- dans la partie BG, $n = r + 1 \times q$ avec $\frac{n}{2} \leq q \leq n$;
- dans la partie HD, $0 = r - b \times q$ avec $3 \leq r \leq \frac{n}{2},\;\; 1 \leq b \leq \sqrt{n},\;\; b \in \mathcal{P} \cup \{1\}$;
- dans la partie BD, $0 = r - 1 \times q$ avec $r = q,\;\; r \in \mathcal{P},\;\; \sqrt{n} \leq r \leq \frac{n}{2}$.

Si toutes les flèches de la bijection reliaient systématiquement une égalité de BG à une égalité de HD, alors, on devrait avoir un lien bijectif entre toute égalité de la forme

$$n = r + p\ (\times 1) \qquad (A)$$

(se trouvant dans la partie BG du tableau) et une égalité de la forme

$$0 = r - p' \times q \qquad (B).$$

(se trouvant dans la partie HD de la table). On transforme (B) en ajoutant n aux deux côtés de l'égalité en

$$\begin{aligned} 0 + n &= r - p' \times q + n \\ n &= r - p' \times q + n \qquad (B') \end{aligned}$$

Mais identifier (A) et (B'), et éliminer n et r donne

$$\begin{cases} n = r + p\ (\times 1) & (A) \\ n = r - p' \times q + n & (B') \end{cases}$$

qui amène

$$r + p = r - p' \times q + n$$

qu'on réécrit en

$$n = p + p' \times q$$

avec p un nombre premier supérieur à $\dfrac{n}{2}$.

Effectuons la transformation qui vient d'être indiquée sur toutes les égalités de la partie BG du tableau puisqu'elles sont censées *toutes* “pointer” vers HD. Ce faisant, on obtient pour chacune d'elles une égalité de la forme $n = p + p' \times q$, les nombres p couvrant certains nombres impairs supérieurs à $\dfrac{n}{2}$. On peut rassembler toutes ces égalités (celles qui étaient déjà en partie HG du tableau et celles qui étaient en partie HG du tableau et qu'on a transformées) pour fixer les idées et comprendre d'où proviendrait la contradiction : elle proviendrait de l'ordre strictement croissant sur les produits qui doit nécessairement être respecté par les égalités. On met en regard des 3 nombres premiers permettant de trouver (dans la vraie vie) une décomposition de Goldbach de $n = 98$ un point d'interrogation :

98	$= 3 + 5 \times 19$	(a)
	$= 5 + 3 \times 31$	(b)
	$= 7 + 7 \times 13$	(c)
	$= 11 + 3 \times 29$	(d)
	$= 13 + 5 \times 17$	(e)
	$= 17 + 3 \times 27$	(f)
	$= 21 + 7 \times 11$	(g)
	$= 23 + 3 \times 25$	(h)
	$= 29 + 3 \times 23$	(i)
	$= 33 + 5 \times 13$	(j)
	$= 35 + 3 \times 21$	(k)
	$= 41 + 3 \times 19$	(l)
	$= 43 + 5 \times 11$	(m)
	$= 47 + 3 \times 17$	(n)
	$= 49 + 7 \times 7$	(o)

	$= 53 + 3 \times 15$	(x)
	$= 59 + 3 \times 13$	(w)
	$= 61\ +\ b \times q\ \ ?$	(contrad 1 ?)
	$= 67\ +\ b' \times q'\ \ ?$	(contrad 2 ?)
	$= 71 + 3 \times 9$	(t)
	$= 73 + 5 \times 5$	(s)
	$= 79\ +\ b'' \times q''\ \ ?$	(contrad 3 ?)
	$= 83 + 3 \times 5$	(q)
	$= 89 + 3 \times 3$	(p)

Posons que l'égalité (contrad 1 ?) est de la forme $98 = 61 + 3 \times k$, alors, du fait de l'ordre croissant à respecter, k devrait être strictement compris entre 9 et 13 (regarder les égalités correctement remplies au-dessus et au-dessous de celle à laquelle on s'intéresse : puisque 61 est compris entre 59 et 71). Or $61 + 3 \times 11 = 94 \neq 98$, d'où une première contradiction.

Posons que l'égalité (contrad 1 ?) est de la forme $98 = 61 + 5 \times k$, alors k, du fait de l'ordre croissant à respecter, devrait être strictement compris entre 5 et 11 (regarder les égalités correctement remplies au-dessus et au-dessous de celle à laquelle on s'intéresse : puisque 61 est compris entre 43 et 73). Or $61+5\times 7 = 96 \neq 98$, d'où une seconde contradiction. Ou bien, or $61+5\times 9 = 106 \neq 98$, d'où une troisième contradiction

Posons que l'égalité (contrad 1 ?) est de la forme $98 = 61 + 7 \times k$, alors k, du fait de l'ordre croissant à respecter, devrait être strictement inférieur à 7 (la seule égalité correctement remplie au-dessus de celle à laquelle on s'intéresse faisant intervenir 7 comme premier facteur du produit est $98 = 49 + 7 \times 7$: puisque 61 est supérieur à 49). Or $61 + 7 \times k$, avec $k < 7$ ne permet pas d'atteindre 98, d'où un certain nombre d'autres contradictions.

On peut établir des raisonnements similaires pour les égalités $98 = 67 + b \times q$ et $98 = 79 + b' \times q'$ avec $b, b' \in \mathcal{P},\ \ b, b' \leq \sqrt{n}$, q, q' nombres impairs compris strictement entre ceci et cela et aboutir à autant de contradictions. Il faudrait écrire méthodiquement cela de façon générale. On pense avoir fourni l'idée d'une démonstration.

Annexe : programme d'écriture des égalités et son résultat

Voici un petit programme python qui écrit les égalités :

```
import math
from math import sqrt,floor

for n in range(98,100,2):
     print('',n,'::::')
     rac = floor(sqrt(n))
     for x in range(3,n//2+1,2):
          print(":3d = :3d +".format(n,x),end='')
          k = 3
          while (n-x)%k != 0 and k <= rac:
               k = k+2
          if k>rac:
               print(" 1 x:3d.".format(n-x))
          else:
               print(":3d x:3d.".format(k,(n-x)//k))
          print(" 0 = :3d -".format(x),end='')
          k = 3
          while x%k != 0 and k <= rac:
               k = k+2
          if k>rac:
               print(" 1 x:3d.".format(x))
          else:
               print(":3d x:3d.".format(k,x//k))
          print('')
```

Voici son résultat :

```
98 ::::
 98 = 3 + 5 x 19.
  0 = 3 - 3 x 1.

 98 = 5 + 3 x 31.
  0 = 5 - 5 x 1.

 98 = 7 + 7 x 13.
  0 = 7 - 7 x 1.

 98 = 9 + 1 x 89.
  0 = 9 - 3 x 3.

 98 = 11 + 3 x 29.
  0 = 11 - 1 x 11.

 98 = 13 + 5 x 17.
  0 = 13 - 1 x 13.

 98 = 15 + 1 x 83.
  0 = 15 - 3 x 5.

 98 = 17 + 3 x 27.
  0 = 17 - 1 x 17.
```

```
98 = 19 + 1 x 79.
 0 = 19 - 1 x 19.

98 = 21 + 7 x 11.
 0 = 21 - 3 x 7.

98 = 23 + 3 x 25.
 0 = 23 - 1 x 23.

98 = 25 + 1 x 73.
 0 = 25 - 5 x 5.

98 = 27 + 1 x 71.
 0 = 27 - 3 x 9.

98 = 29 + 3 x 23.
 0 = 29 - 1 x 29.

98 = 31 + 1 x 67.
 0 = 31 - 1 x 31.

98 = 33 + 5 x 13.
 0 = 33 - 3 x 11.

98 = 35 + 3 x 21.
 0 = 35 - 5 x 7.

98 = 37 + 1 x 61.
 0 = 37 - 1 x 37.

98 = 39 + 1 x 59.
 0 = 39 - 3 x 13.

98 = 41 + 3 x 19.
 0 = 41 - 1 x 41.

98 = 43 + 5 x 11.
 0 = 43 - 1 x 43.

98 = 45 + 1 x 53.
 0 = 45 - 3 x 15.

98 = 47 + 3 x 17.
 0 = 47 - 1 x 47.

98 = 49 + 7 x 7.
 0 = 49 - 7 x 7.
```