Préhistoire de la fonction zeta

André Weil

En substance au moins, le fait qu'une série *infinie* de termes puisse avoir une somme *finie* était connu des Grecs, d'abord comme le paradoxe philosophique d'"Achille et la tortue"), puis, par Archimède si ce n'est plus tôt, comme résultat mathématique utilisé par lui dans sa *Quadrature de la Parabole* (v. [1], p. 312-315, prop. XXIV) ; là, en substance, il somme la progression géométrique infinie de raison $\frac{1}{4}$. Avec la même facilité, en utilisant *Eucl.* IX.35, il aurait pu sommer n'importe quelle progression de raison < 1 ; le cas de la raison $\frac{1}{2}$ est aussi implicite dans *Eucl.* X.1.

En 1644, inspiré de façon évidente par le traité d'Archimède, Torricelli publie à Florence son *De dimensione parabolae* (qu'il appela "*le plus banal de tous les sujets banals*"), qui couvre le même domaine et bien davantage ([2] p. 89-162). Là, mécontent des progressions géométriques, il écrit ([2], p. 149-150) une assertion marginale, pour toute séquence décroissante "finie ou infinie" de nombres positifs, l'identité qu'il devrait écrire, dans le cas d'une séquence finie $(a_0, a_1, .., a_n)$, comme

$$a_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{i+1}) + a_n;$$

ici a_n est "le dernier nombre" de la séquence, avec la compréhension que,

 N.B.

Dans cet article, la notation $\zeta(m)$, avec m réel, sera utilisée comme une abréviation pour la série (convergente ou non) qui, en notation moderne, s'écrirait $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$ et que les mathématiciens précédents (incluant Euler, mais pas encore Mengoli) écrivaient

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$$

pour une progression infinie géométrique, ce “dernier nombre” est “rien ou un point” ; dans notre langage, bien sûr, on devrait dire que a_n doit être remplacé par la limite de la séquence. De cela, Torricelli dérive une preuve élégante pour la somme d'une progression géométrique infinie de raison < 1.

En 1650, potentiellement peut-être sous l'influence de cette note marginale, un jeune professeur à Bologne, Pietro Mengoli, le successeur du grand Cavalieri, publie un livre ([3]) entièrement dédié à la théorie des séries infinies. Son titre, *Novae Quadraturae Arithmeticae Seu De Additione Fractionum*, semble être une référence à Archimède et Torricelli ; vraiment aucune “quadrature” (i.e., aucun calcul d'aires) n'apparaît dans le livre. Même pour ses contemporains, le manque presque complet de notations algébriques doit l'avoir rendu difficile à lire (cf. [4]). Avec deux exceptions (qu'il faut bien prendre en compte), il traite exclusivement de séries dans lesquelles la somme peut être effectuée explicitement par des moyens élémentaires, en effet, comme application de l'identité de Torricelli. Le premier exemple, et un exemple typique, est celui de la somme des inverses des “nombres triangulaires” $n(n+1)/2$, i.e., de la série

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\text{etc.}$$

Ici, bien sûr, le m-ième terme est

$$\frac{2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}$$

de telle manière que la somme des m premiers termes est $1-2/m+2$, et la somme de la série est 1.

Plus important pour notre présent sujet est le fait que Mengoli prouve la divergence de la “série harmonique” $\zeta(1)$ et fait surgir, pour la première fois, la question de la sommation de la série $\zeta(2)$. À propos de cette dernière, il exprime (aussi bien qu'il le peut) son questionnement à propos du fait que les inverses des "nombres triangulaires" peuvent être sommés, mais non pas ceux des "nombres carrés" ; "*cela*", écrit-il, "*nécessite l'aide d'un intellect plus riche [que le mien]*". Pour la divergence des séries harmoniques, pourtant, il apporte une preuve plus intelligente, basée sur l'inégalité

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a},$$

qui peut être représentée par le schéma

$$\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{3}{3}=1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{>\frac{3}{6}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}_{>\frac{3}{9}=\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}}_{>\frac{3}{12}=\frac{1}{4}}}_{>\frac{3}{3}=1,}+\text{etc.}$$

montrant que la série peut être décomposée en une infinité de sommes partielles (avec, respectivement, 1, 3, 9, 27 ... termes), chacune d'entre elles étant > 1.

Le *Novae Quadraturae* de Mengoli semble être resté presque complètement inconnu ; la seule référence contemporaine à ce texte apparaît dans une communication de Collins, contenue dans une lettre de 1673 de Oldenburg à Leibniz ([5a], Vol. I-1, p. 39 ; [5b], p. 85), où Collins note quelques uns des résultats de Mengoli et répète la question de Mengoli à propos de la somme de $\zeta(2)$. Pendant ce temps, cependant, des progrès notables sont faits. D'abord, en 1668, N. Kaufman, plus connu sous le nom de Mercator, a effectué "la quadrature de l'hyperbole." ([6]) Sa méthode, qui consistait en l'intégration terme à terme de la série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

lui fit donner pour $\log(1+x)$ la série de puissances

$$\log\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

avec $0 < x < 1$. La même année également, au moyen d'une analyse minutieuse, Brouncker établit la validité de la formule ci-dessus pour $x = 1$ ([7]). i.e.,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$$

(une série étroitement liée à $\zeta(1)$, ce que Jacob Bernoulli observera plus tard). Newton ensuite, dans son *De Analysi per Aequationes Infinitas* ([8]), avait élevé les expansions des séries de puissances au statut d'outil universel pour l'analyse. Bientôt Leibniz devait effectuer "la quadrature du cercle", cette expression correspondant à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

qu'il prouva en substance en intégrant la série

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$$

La découverte de Leibniz ne fut pas imprimée avant 1682, ni celle de Newton qui le fut bien plus tard. En 1682 Leibniz publia sa formule $\pi/4$, mentionnant aussi quelques autres séries que celles ci-dessus, dans un article ([5a], Vol. II-1, p. 118-122) dans un des premiers numéros des *Acta Erudito-*

rum, nouvellement créés à Leipzig sous ses auspices. Plus tard, en 1689, un mathématicien de Bâle, encore peu connu à ce moment-là, Jacob Bernoulli, initia, sous le titre *Positiones de Seriebus Infinitis*, une série de thèses qui seraient "défendues" par ses étudiants à l'université, qu'il rassembla finalement en un traité systématique sur les séries infinies. Dans la première installation ([9], p. 375-402), il redécouvrit, parmi d'autres résultats qui étaient déjà connus de Mengoli, la divergence des séries $\zeta(1)$, et, exactement comme Mengoli, il exprima son interrogation au sujet de la difficulté de $\zeta(2)$; "*elle est finie*", écrit-il, "*comme cela apparaît en la comparant à une autre qui la majore trivialement", mais "sa sommation est plus difficile à trouver que ce à quoi on aurait pu s'attendre, et quiconque l'obtiendrait et nous la communiquerait gagnerait notre profonde gratitude.*"

Jusque là, de toutes les séries $\zeta(m)$, seules $\zeta(1)$, $\zeta(2)$, et une fois, incidemment, $\zeta(3)$ avaient été mentionnées. Cela change avec le second *Positiones* de Jacob Bernoulli en 1692 ([9], p. 517-542). Comme il n'a pas encore à sa disposition la fonction exponentielle a^x pour tous les réels x, il prend pour m un nombre rationnel arbitraire (supposément positif). Clairement il sait que $\zeta(m)$ converge pour $m \geq 2$ et diverge pour $m \leq 1$, puisque c'est ce qu'elle fait pour $m = 2$ et $m = 1$. Il n'est pas clair s'il sait qu'elle converge pour $1 < m < 2$, mais, cependant, son traitement sur ce point (*Pos.* XXIV, *Schol.* ; [9] p. 529-533) est purement formel. Séparant la série $\zeta(m)$ en les séries

$$\phi(m) = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + etc. \qquad \psi(m) = 1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + etc.$$

il obtient

$$\zeta(m) = \phi(m) + \psi(m), \qquad \phi(m) = 2^{-m}\zeta(m),$$

et par conséquent

$$\frac{\psi(m)}{\phi(m)} = 2^m - 1,$$

un résultat qu'il trouve paradoxal pour $m = \frac{1}{2}$, puisque dans ce cas, cela donne $\psi(m) < \phi(m)$, alors que chaque terme dans la série $\psi(m)$ est plus grand que le terme correspondant dans $\phi(m)$. "*Il semble*", ajoute-t-il, "*qu'un esprit fini ne peut pas comprendre l'infini*" ! Aurait-il, plutôt que de faire cette naïve remarque, réécrit son résultat sous la forme

$$\zeta(m) = (1 - 2^{-m})^{-1}\psi(m)$$

il aurait grimpé sur la première marche vers l'expression de $\zeta(m)$ comme un produit "Eulérien".

Aucune mention n'a encore été faite de l'évaluation numérique de la série $\zeta(m)$, un sérieux problème au vu de leur lente convergence. On peut lire avec difficulté les longues discussions sans conclusions, dans la correspondance entre Leibniz et Jacob Bernoulli ([5a], Vol. II-3, p. 25-27, 32-34, 44-45, 49) sur l'évaluation des sommes partielles de $\zeta(1)$ comme une contribution à ce sujet. Le calcul de $\zeta(2)$ a été entrepris par Daniel Bernoulli en 1728 et par Goldbach en 1729 ([10], Vol. II, p. 263 et 281-282), avec des résultats préliminaires, qui seraient bientôt améliorés par Euler.

Cela semble avoir donné à Euler sa première opportunité d'un contact avec la fonction ζ. Comme pour la plupart des questions qui ont un jour attiré son attention, il ne l'abandonna jamais, faisant souvent un certain nombre de contributions fondamentales à son sujet (cf. [11], p. 257-276). D'abord, il découvrit la formule ainsi appelée formule d'Euler-MacLaurin, qui lui a permis de calculer, avec un grand degré d'approximation, les sommes $\zeta(m)$ pour $m \geq 2$ et les sommes partielles de $\zeta(1)$ ([12], t. 14, p. 119-122). Ceci, pourtant, n'apporta pas de lumière sur la théorie de la fonction zeta, si ce n'est que cela introduisit pour la première fois les nombres de Bernoulli dans ce sujet, mais simplement comme coefficients de la formule d'Euler-MacLaurin.

Alors vint, en 1735, la découverte sensationnelle de la formule

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

basée sur une application audacieuse de la théorie des équations algébriques à l'équation transcendente $0 = 1 - \sin x$ ([12], t. 14, p. 13-14). Cela a été bientôt suivi par le calcul de $\zeta(m)$ pour $m = 4,\ 6$, etc. par la même méthode, et par un certain nombre de contributions à la théorie des fonctions trigonométriques qui légitima finalement les résultats sur $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc.

Un autre article, en 1737 ([12], t. 14, p. 216-244), établit le "produit Eulérien" pour $\zeta(m)$ et des séries diverses liées, incluant

$$L(m) = 1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

Il consacra un chapitre entier (le chapitre XV) de sa grande *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1745 ([12], t. 8) à ce même sujet. De cela, il dériva, ou pensa qu'il pourrait dériver, le produit infini pour $L(1)$ ([12], t. 14, p. 233)

$$L(1) = \prod \frac{p}{p \pm 1}$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers impairs arrangés en ordre croissant et le signe est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$.

Également importante dans ses conséquences finales, mais non moins négligée pendant plus d'un siècle, il y a la découverte d'Euler des équations fonctionnelles pour les séries en question. Cela commença en 1739 ([12], t.

14, p. 443) avec la relation

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + etc. = \frac{\pm 2.1.2.3 \ldots m}{\pi^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} + etc.\right)$$

pour $m = 1, 3, 5, 7$. Le côté gauche doit être compris ici selon les idées d'Euler sur les séries divergentes, i.e. dans ce cas, par ce qui est connu sous le nom de sommation d'Abel. Ceci est clairement équivalent à l'équation fonctionnelle pour $\zeta(s)$ quand $s = 2, 4, 6, 8$, ou, plutôt, comme Euler le suggère une fois, pour toutes les valeurs positives paires de s. En 1749, sous le titre "*Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes qu'inverses*" ([12], t. 15, p. 70-90), Euler non seulement donna une tentative de preuve pour la formule ci-dessus, mais écrivit de façon conjecturale l'équation fonctionnelle pour la fonction zeta pour des valeurs arbitraires de l'argument (ou, plutôt, ce qui revient au même, pour la série très liée

$$(1 - 2^{1-n})\zeta(n) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + etc.).$$

et également pour la série $L(n)$ donnée comme ci-dessus, ajoutant que la dernière était juste aussi certaine que la première et pourrait être plus facile à démontrer, "*apportant ainsi plus de lumière sur un certain nombre d'investigations semblables.*"

Le dernier article d'Euler sur le sujet, basé sur des recherches menées en 1752, a été écrit en 1775 et publié à titre posthume en 1785 ([12], t.4, p. 146-153). Il traite de la série $\sum \pm 1/p$, où la somme est calculée pour tous les nombres premiers impairs (en ordre croissant), et le signe, comme dans le produit infini de $L(1)$, est donné par $p \pm 1 \equiv 0 \pmod 4$. Ici il prend comme point de départ son produit infini pour $\zeta(2)$ et $L(1)$, dont il connaît les valeurs $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $L(1) = \pi/4$, ce qui donne la formule

$$\frac{3\zeta(2)}{4L(1)^2} = 2 = \prod \frac{p \pm 1}{p \mp 1},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0.3465735902 \ldots = \sum \pm \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \sum \pm \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5} \sum \pm \frac{1}{p^5} + etc.$$

Du côté droit, la première série est celle qui doit être calculée ; toutes les autres sont absolument (mais lentement) convergentes. Euler les évalue numériquement par comparaison avec les valeurs connues de $L(3)$, $L(5)$, etc., et obtient finalement

$$\sum \pm \frac{1}{p} = 0.3349816 \ldots$$

(alors qu'en 1752, il avait seulement obtenu pour cela la valeur 0,334980. . .).

Au vu de ce fait, conséquence également des ses résultats antérieurs, que $\sum 1/p$ est infini, cela lui permet de conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 1$, et une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$, ceci étant un prélude aux articles célèbres de Dirichlet de 1837 sur les progressions arithmétiques ([13], Bd. I, p. 307-343).

Les articles de Dirichlet, si exceptionnels de rigueur mathématique alors qu'Euler ne se préoccupait pas de celle-ci, sont trop bien connus pour nécessiter des commentaires détaillés ici. Il suffira de noter que, basés comme ils le sont sur l'*Introductio* d'Euler de 1745 et sur le traitement par Gauss du groupe multiplicatif des entiers premiers à N modulo N quel que soit N, ils introduisent pour la première fois les “séries de Dirichlet” $L_\chi(s)$ attachées aux caractères de tels groupes, mais seulement pour les réels $s > 1$ quand elles sont absolument convergentes ; en fait, ces articles traitent les cas des propriétés de telles séries lorsque s tend vers 1. Il y avait encore un long saut à effectuer pour passer de cela à leur continuation analytique et à leur équation fonctionnelle.

La dernière étape a été effectuée par Riemann en 1859, au moins pour la fonction zeta elle-même ; mais elle avait été précédée par trois preuves pour l'équation fonctionnelle pour la série

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + etc.$$

dans le domaine $0 < s < 1$, où elle est convergente de façon conditionnelle. Le mathématicien suisse Malmstén a apporté sa preuve (mentionnant qu'une preuve similaire pouvait être donnée pour la fonction

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + etc.$$

et rappelant que ces deux résultats avaient été annoncés par Euler) dans un long article ([14]) écrit en mai 1846 et publié dans le Journal de Crelle en 1849. Schlömilch, clairement ignorant de l'article de Malmstén ainsi que de la priorité d'Euler, annonça le même résultat comme un exercice dans le *Grunert's Archiv*, également en 1849 ([15]) ; Clausen publia une solution à cet "exercice" dans le même *Archiv* en 1858 ([16]), et Schlömilch en publia sa propre démonstration ([17]).

Il a parfois été suggéré que ces publications ont fourni à Riemann la motivation de ses recherches sur la fonction zeta ; mais une source encore plus probable a été fournie récemment ([18]) sous la forme de la propre copie d'Eisenstein des *Disquisitiones* de Gauss dans leur traduction française par Poullet-Delisle (Paris, 1807). Sur la dernière page blanche de ce volume, Eisenstein a noté encore une autre preuve pour l'équation fonctionnelle de

$L(s)$; elle consiste essentiellement en une application évidente, sans aucune remarque ou référence pour la justifier, de la sommation de Poisson à la série en question, couplée à la formule

$$\int_0^\infty e^{\sigma\psi i}\psi^{q-1}d\psi = \frac{\Gamma(q)}{\sigma^q}e^{q\pi i/2} \qquad (0 < q < 1, \sigma > 0),$$

pour laquelle Eisenstein cite Dirichlet ([13], Bd. I, p. 401). Elle rend la transformation de Fourier de l'équation fonctionnelle égale à 0 pour $x < 0$ et à x^{q-1} pour $x > 0$.

La preuve d'Eisenstein est datée avec les mots “Scripsi 7 Avril 1849”. Comme il ne revendique pas les résultats comme étant les siens, il pourrait les avoir obtenus de Malmstén ou de Schlömilch. Un fait intéressant, pourtant, est que le mois d'avril 1849 est précisément le mois où Riemann quitta finalement Berlin pour Göttingen. Lui et Eisenstein avaient été des amis intimes. Ainsi il n'est pas seulement possible, mais même plutôt probable, qu'Eisenstein ait discuté de sa preuve de 1849 avec Riemann avant le départ de ce dernier. S'il en est ainsi, cela aurait pu être l'origine de l'article de Riemann de 1859.

Bibliographie

[1] Archimedes, *Opera Omnia...*, Vol. II. J. L. Heiberg, ed., Lipsiae, (1913).

[2] Torricelli, *Opere di Evangelista Torricelli*, Vol. I, Part 1. G. Loria and G. Vassura, eds, Faenza (1919).

[3] Mengoli, Pietro. *Novae Qudraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum*, Bononiae (1650).

[4] Eneström, G. "Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts," *Bibl. Math.* (III) 12 :135-148 (1911-12).

[5a] Gerhardt, C. I., ed. *Leibnizens mathematische Schriften.* 6 vols., Halle (1849-63).

[5b] Gerhardt, C. I. ed. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibnitz.* Berlin (1899) ; G. Olm, ed., Hildesheim (1962).

[6] Mercator, Auctore Nicolao Mercatore. *Logarithmotechnia... accedit vera Quadratura Hyperbolae ...*, Londini (MDCLXVIII).

[7] Brouncker, Lord Viscount. "The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational Numbers... by that eminent Mathematician the right Honourable the Lord Viscount Brouncker," *Phil. Trans.* (1668).

[8] Whiteside, D. T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. II, Cambridge (1968).

[9] Bernoulli, Jacob. *Opera*, Tomus Primus, Genevae (1744).

[10] Fuss, P.H. *Correspondance mathématique et physique...*, Vol. II, St Petersbourg (1843), Johnson Reprint Corp. (1968).

[11] Weil, A. *Number Theory : An Approach through History*, Birkhäuser Boston (1983).

[12] Euler, Leonhard. *Opera Omnia, Series Prima*, 27 vols, Leipzig, Zurich (1911-56).

[13] Dirichlet, G. *Lejeune Dirichlet's Werke*, Bd. I, Berlin (1889).

[14] Malmstén, C. J. "De integralibus quibusdam definitis seriebusque infinitis," *J. fur reine u. ang. Math.* (Crelle's Journal), 38 :1-39 (1849).

[15] Schlömilch, O. "Uebungsaufgaben für Schüler, Lehrsatz von dem Herm Prof. Dr. Schlömilch," *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert's Archiv), 12 :415 (1849).

[16] Clausen, T. "Beweis des von Schlömilch ... aufgestellten Lehrsatzes," *Archiv der Math. u. Phys.* (Grunert's Archiv), 30 :166-169 (1858).

[17] Schlömilch, O. "Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen," *Zeitschr. fur Math. u. Phys.* 3 :130-132 (1858).

[18] Weil, A. *On Eisenstein's copy of the Disquisitiones*, to appear.