L'avenir des mathématiques

André Weil [1]

«Il y a eu autrefois, dit Poincaré dans sa conférence de Rome sur l'avenir des mathématiques, des prophètes de malheur ; ils répétaient que tous les problèmes étaient résolus, qu'après eux il n'y aurait plus à glaner...» Mais, ajoute-t-il, «les pessimistes se sont toujours trouvés forcés de reculer... de sorte qu'à présent je crois bien qu'il n'y en a plus.»

Notre foi dans le progrès, notre croyance en l'avenir de notre civilisation, ne sont plus si fermes ; elles se sont vues ébranlées par des chocs trop brutaux. Il ne nous paraît plus du tout légitime, comme Poincaré n'hésitait pas à le faire, d' «extrapoler» du passé et du présent au futur.

Le mathématicien, interrogé sur l'avenir de sa science, se trouve en droit de poser la question préalable : quel est l'avenir que se prépare l'espèce humaine ? Les formes de pensée, fruits de l'effort soutenu des quatre ou cinq derniers millénaires, sont-elles autre chose qu'un éclair fugitif ? Que si, craignant de tomber dans la métaphysique, on préfère se tenir sur le terrain, presque aussi mouvant, de l'histoire, les mêmes questions réapparaissent, en d'autres termes seulement : assistons-nous au début d'une nouvelle éclipse de la civilisation ? Notre devoir, plutôt que de nous livrer aux joies égoïstes du travail créateur, n'est-il pas de regrouper, en vue d'un simple effort de conservation, les éléments essentiels de notre culture, afin qu'un jour nos descendants les retrouvent intacts à l'aube d'une nouvelle Renaissance ?

Ces questions ne sont pas de pure rhétorique ; de la réponse que chacun

1. 1947

leur donne, ou plutôt (car il n'est pas de réponses à de pareilles questions) de l'attitude que chacun prend en face d'elles dépend dans une large mesure la direction qu'il donnera à son effort intellectuel. Avant d'écrire sur l'avenir des mathématiques, il était nécessaire de les poser, comme le croyant se purifiait avant de consulter l'oracle. A nous maintenant d'interroger le destin.

La mathématique, telle que nous la connaissons, nous paraît l'une des formes nécessaires de notre pensée. L'archéologue, il est vrai, et l'historien nous révèlent des civilisations d'où elle fut absente. Sans les Grecs, il est douteux qu'elle eût jamais été plus qu'une technique, au service d'autres techniques ; et peut-être voyons-nous se former sous nos yeux un type de société humaine où elle ne sera pas autre chose. Mais à nous dont les épaules ploient sous l'héritage de la pensée grecque, à nous qui traînons encore nos pas dans les sillons tracés par les héros de la Renaissance, une civilisation sans mathématiques semble inconcevable. De même que le postulat des parallèles, le postulat de la survie des mathématiques s'est dépouillé à nos yeux de son «évidence» ; mais, tandis que celui-là ne nous est plus nécessaire, nous ne saurions nous passer de celui-ci.

Assurément, le clinicien des idées, qui, sans se hasarder à des prédictions à lointaine échéance, limite son pronostic à un avenir immédiat, aperçoit, lorsqu'il examine la mathématique contemporaine, plus d'un symptôme favorable. Tout d'abord, tandis que telle science aujourd'hui par la puissance presque illimitée que confère son usage arbitraire, est en passe de devenir monopole de caste, trésor jalousement gardé sous le sceau d'un secret nécessairement fatal à toute activité proprement scientifique, le mathématicien véritable semble peu exposé aux tentations du pouvoir et à la camisole de force du secret d'Etat. «La mathématique disait G. H. Hardy dans une célèbre leçon inaugurale, est une science inutile. J'entends par là qu'elle ne peut servir directement, ni à l'exploitation de nos semblables, ni à leur extermination.»

Il est certes peu d'hommes, à notre époque, aussi complètement libres dans le jeu de leur activité intellectuelle que le mathématicien. Si des idéologies d'Etat s'attaquent parfois à sa personne, jamais encore elles ne se sont mêlées de juger ses théorèmes ; chaque fois que de soi-disant mathématiciens, pour complaire aux puissants du jour, ont tenté de plier leurs confrères au joug d'une orthodoxie, ils n'ont récolté que le mépris pour fruit de leurs travaux. Qu'un autre hante les antichambres pour se faire accorder le coûteux appareillage sans lequel il n'est guère de prix Nobel : un crayon et du papier, c'est tout ce qu'il faut au mathématicien ; encore peut-il s'en passer à l'occasion. Il n'est même pas pour lui de prix Nobel dont la conquête désirée le détourne du travail longuement mûri vers le résultat brillant mais passager. Dans le monde entier, on enseigne, bien ou mal, les mathématiques ; le mathématicien exilé - et qui, de nos jours, peut se croire à l'abri de l'exil ? - trouve partout le gagne-pain modeste qui lui permet en quelque mesure de poursuivre ses travaux. Il n'est pas jusqu'en prison qu'on ne puisse faire de bonnes mathématiques, si le courage ne faut.

A ces «conditions objectives», ou plutôt, comme dirait notre médecin, à ces symptômes externes, viennent s'en ajouter d'autres que fournit un examen clinique plus approfondi. La mathématique vient de prouver sa vitalité en traversant l'une de ces crises de croissance auxquelles elle est accoutumée de longue date, et qu'on nomme d'un nom bizarre «crises des fondements» ; elle l'a traversée, non seulement sans dommage, mais avec grand profit. Chaque fois que de vastes territoires viennent d'être conquis au raisonnement mathématique, il est nécessaire de se demander quels sont les moyens techniques permis dans l'exploration du domaine nouveau. On désire que tels objets aient telles propriétés, on désire que tels modes de raisonnement soient légitimes, on se comporte comme s'ils l'étaient en effet ; le pionnier qui agit ainsi n'ignore pas qu'un jour la police viendra faire cesser le désordre et remettre tout sous l'empire de la loi commune. C'est ainsi que les Grecs, lorsqu'ils définirent les premiers le rapport des grandeurs avec assez de précision pour se poser le problème de l'existence de grandeurs incommensurables, semblent avoir cru et désiré que tous les rapports fussent rationnels, et avoir basé sur cette hypothèse provisoire la première ébauche de leurs raisonnements géométriques ; quelques-uns des plus grands progrès de la mathématique grecque sont liés à la découverte de leur erreur initiale sur ce point. De même, quand s'est ouverte l'ère de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, on a voulu que toute expression analytique définisse une fonction, et qu'en même temps toute fonction soit dérivable ; nous savons aujourd'hui que ces exigences n'étaient pas compatibles. La dernière crise, née des modes de raisonnement sophistiques auxquels se prêtait à ses débuts la théorie «naïve» des ensembles, a eu pour nous un résultat non moins heureux, qu'on peut considérer comme définitivement acquis. Nous avons appris à faire remonter toute notre science à une source unique, composée seulement de quelques signes et de quelques règles d'emploi de ces signes, réduit sans doute inexpugnable, où nous ne saurions nous enfermer sans risque de famine, mais sur lequel il nous sera toujours loisible de nous replier en cas d'incertitude ou de danger extérieur. Que le mathématicien doive constamment tirer de son «intuition» de nouveaux éléments de raisonnement de nature alogique ou «pré-logique», c'est ce qui ne paraît plus soutenable qu'à quelques esprits attardés. Si certaines branches des mathématiques n'ont pas encore été axiomatisées, c'est-à-dire ramenées à un mode d'exposition où tous les termes sont définis et tous les axiomes explicités à partir des notions premières de la théorie des ensembles, c'est seulement parce qu'on n'a pas encore eu le temps de le faire. Il se peut sans doute qu'un jour nos successeurs désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas ; il se peut même, bien que les travaux des logiciens modernes rendent cette éventualité bien peu probable, que l'expérience fasse découvrir un jour, dans les modes de raisonnement dont nous faisons usage, le germe d'une contradiction que nous n'apercevons pas aujourd'hui ; une révision générale deviendra alors nécessaire ; on peut être assuré dès maintenant que l'essentiel de notre science n'en sera pas affecté.

Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. «Une branche de la science est pleine de vie, disait Hilbert, tant qu'elle offre des problèmes en abondance ; le manque de problèmes est signe de mort.» Certes ils ne manquent pas à notre mathématique ; et le moment ne serait peut-être pas mal choisi à présent pour en dresser une liste, comme le faisait Hilbert dans la conférence fameuse que nous venons de citer. Parmi ceux mêmes de Hilbert, plusieurs subsistent comme des objectifs lointains, mais non inaccessibles, qui ne cesseront de provoquer des recherches, peut-être pendant plus d'une génération : le cinquième problème, sur les groupes de Lie, en est un exemple. L'hypothèse de Riemann, après qu'on eut perdu l'espoir de la démontrer par les méthodes de la théorie des fonctions, nous apparaît aujourd'hui sous un jour nouveau, qui la montre inséparable de la conjecture d'Artin sur les fonctions L, ces deux problèmes étant deux aspects d'une même question arithmético-algébrique, où l'étude simultanée de toutes les extensions cyclotomiques d'un corps de nombres donné jouera sans doute le rôle décisif. L'arithmétique gaussienne gravitait autour de la loi de réciprocité quadratique ; nous savons maintenant que celle-ci n'est qu'un premier exemple, ou pour mieux dire le paradigme, des lois dites «du corps de classes», qui gouvernent les extensions abéliennes des corps de nombres algébriques ; nous savons formuler ces lois de manière à leur donner l'aspect d'un ensemble cohérent ; mais, si plaisante à l'œil que soit cette façade, nous ne savons si elle ne masque pas des symétries plus cachées. Les automorphismes induits sur les groupes de classes par les automorphismes du corps, les propriétés des restes de normes dans les cas non cycliques, le passage à la limite (inductive ou projective) quand on remplace le corps de base par des extensions, par exemple cyclotomiques, de degré indéfiniment croissant, sont autant de questions sur lesquelles notre ignorance est à peu près complète, et dont l'étude contient peut-être la clef de l'hypothèse de Riemann ; étroitement liée à celles-ci est l'étude du conducteur d'Artin, et en particulier, dans le cas local, la recherche de la représentation dont la trace s'exprime au moyen des caractères simples avec des coefficients égaux aux exposants de leurs conducteurs. Ce sont là quelques-unes des directions qu'on peut et qu'on doit songer à suivre afin de pénétrer dans le mystère des extensions non abéliennes ; il n'est pas impossible que nous touchions là à des principes d'une fécondité extraordinaire, et que le premier pas décisif une fois fait dans cette voie doive nous ouvrir l'accès à de vastes domaines dont nous soupçonnons à peine l'existence ; car jusqu'ici, pour amples que soient nos généralisations des résultats de Gauss, on ne peut dire que nous les ayons vraiment dépassés.

Dans le cadre même des extensions abéliennes, nous n'avons non plus fait aucun progrès vers la généralisation des théorèmes du «rêve de jeunesse de Kronecker», l'engendrement des corps de classes dont l'existence nous est connue, par des valeurs de fonctions analytiques. Si l'on a pu, sans grande difficulté, compléter l'œuvre inachevée de Kronecker et achever de résoudre ce problème, au moyen de la multiplication complexe, dans le cas des corps quadratiques imaginaires, la clef du problème général que Hilbert regardait comme l'un des plus importants des mathématiques modernes, nous échappe encore, malgré les conjectures de Hilbert lui-même et les tentatives de ses disciples. Faut-il la chercher dans les nouvelles fonctions automorphes de Siegel, par exemple dans ses fonctions modulaires de plusieurs variables ? Ou bien la théorie, aujourd'hui assez avancée, des endomorphismes des variétés abéliennes peut-elle nous être ici de quelque secours ? Il est trop tôt pour hasarder là-dessus des conjectures plausibles ; mais, dût la réponse être négative, on ne peut manquer d'obtenir des résultats intéressants en examinant ces questions de plus près.

Ce qui précède met déjà en évidence, non seulement la vitalité de l'arithmétique moderne, mais aussi les liens étroits qui, aujourd'hui, comme au temps d'Euler et au temps de Jacobi, l'unissent aux parties les plus profondes de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions. Cette unité essentielle, dont les manifestations sont si diverses et multiples, se retrouve sur bien d'autres points. L'introduction par Hermite des variables continues dans la théorie des nombres a abouti à l'étude systématique des groupes discontinus de nature arithmétique au moyen des groupes continus dans lesquels ils se laissent plonger, des espaces riemanniens symétriques associés à ces groupes, des propriétés différentielles et topologiques de leurs domaines fondamentaux (ou plutôt, dans le langage moderne, de leurs espaces quotients), et des fonctions automorphes qui y appartiennent. L'œuvre de Siegel, continuant la grande tradition de Dirichlet, d'Hermite, de Minkowski, nous a ouvert ici des voies toutes nouvelles. D'un côté, nous rejoignons par là Fermat, Lagrange et Gauss, la représentation des nombres par les formes, et les genres de formes quadratiques. En même temps commence à se préciser à nos yeux le principe si fécond d'après lequel l'aspect global d'un problème arithmétique peut, en certaines circonstances, se reconstituer à partir de ses aspects locaux. Par exemple, nous voyons à maintes reprises, chez Siegel, le nombre de solutions de tel problème arithmétique dans le corps des nombres rationnels exprimé au moyen des nombres définis par les problèmes locaux correspondants, densités de solutions dans le corps réel et dans les corps p-adiques pour toutes les valeurs du nombre premier p c'est là un principe, analogue au théorème des résidus sur la surface de Riemann d'une courbe algébrique, auquel il y a lieu de rattacher aussi les célèbres «séries singulières» qui apparaissent dans l'application de la méthode de Hardy-Littlewood aux problèmes de la théorie analytique des nombres. Est-il possible d'en donner un énoncé général, qui permette d'un seul coup d'obtenir tous les résultats de cette nature, de même que la découverte du théorème des résidus a permis de calculer par une méthode uniforme tant d'intégrales et de séries qu'on ne traitait auparavant que par des procédés disparates ? Ce n'est pas là encore, semble-t-il, un problème pour l'avenir immédiat ; il n'en est que plus important d'en préparer la solution par l'examen de cas particuliers bien choisis. C'est le même principe qui fournira peut-être un jour la raison profonde de l'existence des produits eulériens, dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l'extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions ; ici, ce sont les classes mêmes des formes quadratiques, et non pas seulement comme avec Siegel leurs genres, que nous commençons à atteindre ; en même temps, nous nous trouvons au cœur de la théorie des fonctions modulaires, que ces travaux ont renouvelée entièrement, et de la théorie des fonctions *thêta*. Ce domaine est encore pour nous si mystérieux, les questions qui s'y posent sont si nombreuses et si fascinantes, que toute tentative pour les classer par ordre d'importance serait prématuré.

Mais en même temps, Siegel nous a appris, par voie arithmétique, à construire des groupes discontinus, et des fonctions automorphes ; c'est un domaine où la pure théorie des fonctions n'avait pas fait un pas depuis Poincaré ; et il est vraisemblable, en effet, que, tout comme il est arrivé pour les fonctions d'une variable, l'étude approfondie de fonctions spéciales de plusieurs variables complexes devra préparer le terrain à tout essai de théorie générale, Dans les recherches de Siegel, l'étude géométrique, locale et globale, des domaines fondamentaux, c'est-à-dire en réalité de variétés à structure analytique complexe, tend à prendre un rôle prépondérant. On rejoint par là l'œuvre immense de Cartan, et ses prolongements de toute sorte ; du même coup, on se trouve d'emblée au cœur de la topologie moderne, la théorie des espaces fibrés, et on voit apparaître les invariants de Stiefel-Whitney et leurs généralisations ; ce sont là deux domaines dont l'intime liaison était soupçonnée depuis quelque temps, mais entre lesquels la jonction vient d'être faite grâce aux découvertes d'un géomètre chinois, S. S. Chern, elles-mêmes provoquées en partie par des considérations de géométrie algébrique. Les variétés algébriques, en effet, ou du moins les variétés sans singularités sur le corps complexe, ne sont pas autre chose qu'une classe particulière, et particulièrement intéressante, de variétés à structure analytique complexe ; plus précisément, ce sont des variétés qu'on peut, du moins dans tous les cas connus, munir de l'une de ces métriques hermitiennes remarquables qu'a introduites Kähler à propos de fonctions de plusieurs variables complexes, et dont des résultats encore mal éclaircis de S. Bergmann fournissent aussi des exemples. C'est par l'emploi systématique, bien que non explicite, de ces métriques que Hodge, généralisant les classiques résultats de Riemann, a obtenu récemment les premiers théorèmes d'existence sur ce type de variétés ; si l'on n'ose espérer que de telles méthodes puissent un jour nous donner l'uniformisation des variétés algébriques (qui d'ailleurs, contrairement à ce qui se passe pour les courbes, ne peut se faire en général par des fonctions non ramifiées), leur extension aux intégrales de seconde et de troisième espèce est déjà chose faite et aplanira sans doute les voies vers des résultats généraux du type du théorème de Riemann-Roch. La généralisation analogue des méthodes de Hodge aux formes différentielles avec singularités dans le domaine réel pose des problèmes encore plus importants ; elle paraît liée, d'une part, à des propriétés locales des systèmes de type elliptique auxquels satisfont les formes harmoniques ; d'autre part, elle semble inséparable d'une extension de la théorie de de Rham qui permettrait d'obtenir la torsion homologique d'une variété par les formes différentielles avec singularités. Si en effet les résultats de de Rham ont éclairci définitivement un certain aspect de la relation entre groupes d'homologie et intégrales multiples, et jouent par là un rôle fondamental dans les travaux de Hodge et de Chern, ils ne rendent jusqu'à présent accessibles aux méthodes différentielles que les groupes d'homologie sur les nombres réels ; et d'ailleurs l'analogie si frappante et si féconde entre chaînes et formes différentielles, que ces résultats mettent en évidence, reste jusqu'ici un simple principe heuristique, en attendant qu'on réussisse à donner une base commune à ces deux notions ; c'est seulement dans quelques cas particuliers, et par exemple dans quelques-uns des beaux travaux par lesquels Ahlfors a renouvelé dans ces dernières années la théorie des fonctions analytiques, qu'on a réussi, en exprimant des formes différentielles comme sommes de chaînes (par des mesures de Radon dans l'espace des chaînes), à convertir ce principe en méthode de démonstration.

Mais, tandis que la géométrie algébrique reçoit ainsi une nouvelle impulsion des développements les plus récents de la topologie et de la géométrie différentielle, elle ne manque pas non plus de problèmes purement algébriques, au sujet desquels, grâce aux méthodes élémentaires de l'algèbre moderne, il ne nous est plus nécessaire de faire dériver nos connaissances des éclairs d'intuition de quelques mortels privilégiés. La théorie des surfaces, brillamment mais trop rapidement explorée par l'école italienne, doit faire place à présent à une théorie générale des variétés algébriques, affranchie d'hypothèses restrictives sur la nature du corps de base et sur l'absence de singularités. La structure des groupes de classes de diviseurs par rapport aux divers concepts connus d'équivalence (linéaire, continue, numérique), la recherche des extensions non ramifiées, abéliennes d'abord, puis non abéliennes, d'un corps de fonctions algébriques, constituent les premières questions à résoudre ; grâce aux résultats, acquis ou du moins plausibles, des géomètres italiens, nous savons à peu près deviner les réponses ; et leur solution, qui peut-être est déjà à notre portée, doit ouvrir la voie à d'importants progrès. D'autre part, l'étude de la géométrie algébrique sur tel ou tel corps de base particulier en est encore à ses premiers tâtonnements ; si la géométrie algébrique sur le corps complexe, à peu près exclusivement étudiée depuis près d'un siècle, a abouti, par les méthodes qui lui sont propres (méthodes topologiques et méthodes transcendantes), aux importants résultats que nous connaissons, il est vraisemblable que d'autres corps de base, corps finis, corps p-adiques, corps de nombres algébriques, méritent chacun d'être examiné à part, par des méthodes appropriées à leur objet. C'est ainsi que la géométrie sur un corps fini semble constituer une sorte de plaque tournante, à partir de laquelle on peut à volonté orienter les recherches, soit vers la géométrie algébrique proprement dite, avec les puissants instruments dont elle dispose déjà, soit vers la théorie des nombres ; c'est par là justement que nous commençons à mieux comprendre la nature de la fonction *zêta* et le vrai caractère de l'hypothèse de Riemann ; de même, avant d'aborder la détermination des extensions d'un corps de nombres algébriques par leurs propriétés locales, il conviendra peut-être de résoudre le problème analogue, déjà fort difficile, au sujet des fonctions algébriques d'une variable sur un corps de base fini, c'est-à-dire d'étendre à ces fonctions les théorèmes d'existence de Riemann. Pour ne citer qu'un cas particulier, le groupe modulaire, dont la structure détermine les corps de fonctions d'une variable complexe ramifiés en trois points seulement, joue-t-il le même rôle, tout au moins en ce qui concerne les extensions de degré premier à la caractéristique quand le corps de base est fini ? Il n'est pas impossible que toutes les questions de ce genre puissent se traiter par une méthode uniforme, qui permettrait, d'un résultat une fois établi (par exemple par voie topologique) pour la caractéristique 0, de déduire le résultat correspondant pour la caractéristique p ; la découverte d'un tel principe constituerait un progrès de la plus grande importance. Du même ordre, mais plus difficiles encore, sont les problèmes que posent les recherches modernes sur les groupes finis. La théorie des groupes finis simples est-elle l'analogue de la théorie des groupes de Lie simples ? Il semblerait prématuré d'aborder cette question de front dès maintenant ; c'est par des voies détournées, et en particulier par l'étude des p-groupes, qu'on a, dans ces dernières années, fait quelque progrès dans cette direction. Ici, comme en bien d'autres questions d'algébre et de théorie des nombres, un élément nouveau vient d'être introduit par la définition des groupes d'homologie d'un groupe abstrait ; on doit à Eilenberg et MacLane, à propos de recherches de H. Hopf de pure topologie combinatoire, la découverte de cette notion, qui généralise les notions déjà si fécondes de caractère et de système de facteurs ; elle devra être soumise pendant quelque temps à une étude systématique avant qu'on puisse en mesurer la portée et les possibilités d'application.

Si l'arithmétique, entendue au sens le plus large, est toujours pour ses adeptes la reine des mathématiques, et si pour cette raison nous nous sommes laissé aller à traiter avec prédilection de ce qui la concerne, ce n'est pas à dire que les autres branches des mathématiques présentent moins de problèmes dignes d'un effort soutenu. L'œuvre seule d'un Cartan contient de quoi occuper plusieurs générations de géomètres. La théorie générale des systèmes en involution n'a pas été menée jusqu'au bout par son auteur, qui n'a pu, semble-t-il, surmonter toutes les difficultés d'ordre algébrique qu'elle présente. Sur la théorie, si importante sans doute, mais pour nous si obscure, des «groupes de Lie infinis», nous ne savons rien que ce qui se trouve dans les mémoires de Cartan, première exploration à travers une jungle presque impénétrable ; mais celle-ci menace de se refermer sur les sentiers déjà tracés, si l'on ne procède bientôt à un indispensable travail de défrichement. La théorie moderne des groupes de Lie proprement dits, par des méthodes qui combinent celles de Cartan et celles de la topologie, est loin d'être achevée ;

dans la théorie même des groupes semi-simples, et dans celle des espaces riemanniens symétriques qui leur sont associés, nous ne savons atteindre à bien des résultats que par des vérifications a posteriori, en faisant usage de notre connaissance (due à Cartan, elle aussi) de tous les groupes simples. Mais surtout comme il a été indiqué plus haut, nous trouvons maintenant, dans la théorie topologique des espaces fibrés, dans les théorèmes de de Rham et dans la notion de groupe d'homotopie, les outils appropriés à l'étude globale des géométries généralisées de Cartan. Pour n'en donner qu'un exemple, la formule classique de Gauss-Bonnet, seul résultat jusqu'à ces derniers temps qui exprimât un invariant topologique par l'intégrale d'une forme différentielle de caractère invariant, ne nous apparaît plus maintenant que comme le premier terme de toute une série de formules que la méthode de Chern nous rend accessibles, et dont la recherche systématique vient à peine d'être entreprise.

Mais, si les systèmes en involution doivent, en principe, nous permettre d'atteindre tout ce qui, dans les équations aux dérivées partielles, peut se ramener au problème local de Cauchy-Kovalewski, ce n'est là qu'un aspect du problème d'existence des solutions de ces équations et cet aspect, à bien des égards, n'est même pas le plus intéressant. Sortis de là, nous nous trouvons en présence de résultats importants, dont certains ont été obtenus seulement à date récente, sur des équations de types très particuliers, principalement elliptique et hyperbolique ; mais bien que l'étude de ces types, à laquelle la physique mathématique a conduit nos prédécesseurs il y a plus d'un siècle, soit loin d'être achevée il ne convient pas de s'y arrêter indéfiniment. Le système auquel satisfait la partie réelle d'une fonction analytique de plusieurs variables complexes ne rentre dans aucun de ces types simples ; or, par les méthodes propres à la théorie des fonctions analytiques, nous avons appris par exemple que les singularités les plus générales qu'elles puissent présenter sont, en un certain sens qu'il est encore difficile de préciser, composées de singularités élémentaires qui sont des variétés caractéristiques : c'est ainsi du moins qu'on peut interpréter les théorèmes de Hartogs et de E. E. Levi sous cette forme, ils présentent une analogie évidente avec les résultats connus sur les équations hyperboliques, analogie qui suggère de chercher dans l'approfondissement des notions de variété caractéristique et de solution élémentaire, le germe d'une théorie générale. Par ailleurs, nous trouvons, dans les travaux de Delsarte, et dans ceux de S. Bergmann et de ses élèves, les premiers exemples de transformations d'équations aux dérivées partielles les unes dans les autres au moyen d'opérateurs intégraux ou intégro-différentiels ; il y a là, semble-t-il, le principe de développements entièrement nouveaux, et d'une classification des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sortirait complètement du cadre tracé par les méthodes classiques. En particulier, comme l'a montré Delsarte, les séries de fonctions orthogonales, auxquelles conduisent naturellement les problèmes elliptiques, se trouvent transformées ainsi en séries appartenant à des types beaucoup plus généraux, dont on retrouve quelques exemples isolés en analyse classique, mais dont l'étude générale pose des problèmes du plus grand intérêt. Ici, le mathématicien ne pourra plus se contenter de l'espace de Hilbert, outil qui lui est devenu aussi familier que la série de Taylor ou l'intégrale de Lebesgue ; est-ce dans la théorie des espaces de Banach qu'il faudra chercher l'instrument approprié, ou faudra-t-il recourir à des espaces plus généraux ? Il faut avouer que les espaces de Banach, pour intéressants et utiles qu'ils se soient déjà montrés, n'ont pas amené encore en analyse la révolution que certains en attendaient ; mais ce serait jeter le manche après la cognée que d'en abandonner déjà l'étude, avant d'en avoir mieux exploré les diverses possibilités d'application. Peut-être cependant sont-ils à la fois trop généraux pour se prêter à une théorie aussi précise que celle de l'espace de Hilbert, et trop particuliers pour l'étude des opérateurs les plus intéressants. Par exemple, ils ne comprennent pas l'espace des fonctions indéfiniment dérivables ; or, c'est seulement dans celui-ci qu'on peut définir les opérateurs de L. Schwartz, qui représentent formellement les dérivées de tout ordre de fonctions arbitraires ; il y a là peut être le principe d'un calcul nouveau, reposant en définitive sur le théorème de Stokes généralisé, et qui nous rendra accessibles les relations entre opérateurs différentiels et opérateurs intégraux. Déjà des idées de ce genre ont rendu de grands services dans des problèmes particuliers, par exemple sous le nom de lemme de Haar en calcul des variations ainsi que dans certains travaux de Friedrichs sur les opérateurs différentiels. De même, le théorème bien connu d'après lequel la moyenne d'une fonction harmonique sur un cercle est égal à sa valeur au centre exprime qu'un certain opérateur, défini par une distribution de masses dans le plan est, en un certain sens, combinaison linéaire des valeurs du laplacien dans le domaine fermé limité par le cercle. A ces questions se rattache aussi le problème, déjà cité, de la représentation des formes différentielles comme sommes de chaînes, que pose la théorie de de Rham. Dans ces recherches, on voit peut-être s'ébaucher un calcul opérationnel, destiné à devenir d'ici un siècle ou deux un instrument aussi puissant que l'a été pour nos prédécesseurs et pour nous-mêmes le calcul différentiel. Tout ceci ne concerne guère que l'étude locale ou semi-locale des équations aux dérivées partielles ; et en effet, en dehors des cas simples qu'on peut traiter par la théorie de l'espace de Hilbert ou par les méthodes directes du calcul des variations, l'étude globale des équations aux dérivées partielles, par exemple sur une variété analytique compacte, semble trop difficile pour qu'on puisse songer à l'aborder d'ici longtemps. Mais l'étude globale des équations différentielles ordinaires pose un grand nombre de problèmes intéressants, difficiles mais déjà à notre portée ; il suffira d'en donner pour exemple la belle démonstration toute récente par E. Hopf, du caractère ergodique des géodésiques sur toute variété riemannienne compacte à courbure partout négative. On peut rattacher aussi à ce sujet l'étude des équations de van der Pol et des oscillations dites de relaxation, l'une des très rares questions intéressantes qui aient été posées aux mathématiciens par la physique contemporaine ; car la nature, autrefois l'une des principales sources de grands problèmes mathématiques, semble, dans les dernières années, nous avoir emprunté beancoup plus qu'elle ne nous a rendu.

*

*   *

Mais l'énumération qui précède, tout incomplète qu'elle ne puisse manquer de paraître aux yeux de nos collègues, aura lassé sans doute l'attention de plus d'un lecteur ; encore n'avons-nous, faute de place et faute de la compétence nécessaire, parlé, ni de géométrie des nombres ni d'approximations diophantiennes, ni de calcul des variations, ni de calcul des probabilités, ni d'hydrodynamique ; nous n'avons d'autre part fait aucune mention de bien des problèmes aujourd'hui en sommeil qu'il suffirait d'une idée nouvelle pour éveiller et rendre à la vie mathématique. C'est qu'à vrai dire nous ne pouvions ni ne voulions jalonner la route au futur développement de notre science ; ce serait là une tâche vaine qu'on ne saurait même entreprendre sans ridicule, car le grand mathématicien de l'avenir, comme celui du passé, fuira les chemins battus c'est par des rapprochements imprévus, auxquels notre imagination n'aura pas su atteindre, qu'il résoudra, en les faisant changer de face, les grands problèmes que nous lui léguerons. Nous nous étions proposé en passant en revue quelques-unes des branches principales de notre mathématique, d'en mettre en évidence à la fois la robuste vitalité et l'unité foncière. Non seulement, nous croyons l'avoir montré, les problèmes se présentent en foule ; mais il en est peu de véritablement importants qui ne soient liés étroitement à d'autres en apparence fort éloignés. Lorsqu'une branche des mathématiques cesse d'intéresser tout autre que les spécialistes, c'est qu'elle est bien près de la mort, ou du moins de la paralysie d'où seul le bain vivifiant aux sources de la science pourra la tirer. «La mathématique, disait Hilbert dans la conclusion de sa conférence de 1900 (conclusion qui serait ici à citer tout entière), est un organisme dont la force vitale a pour condition l'indissoluble union de ses parties.»

Est-ce à dire que la mathématique soit en passe de devenir science d'érudition, qu'il ne doive plus être possible d'y faire œuvre créatrice que blanchi sous le harnois, usé par les longues années de veille en compagnie de tomes poussiéreux ? Ce serait aussi un signe de déclin ; car, force ou faiblesse, elle n'est guère science à se nourrir de détails minutieusement recueillis au cours d'une longue carrière, de lectures patientes, d'observations ou de fiches amassées une à une pour former le faisceau d'où sortira enfin l'idée. En mathématique plus peut-être qu'en toute autre branche du savoir, c'est tout armée que jaillit l'idée du cerveau du créateur ; aussi le talent mathématique a-t-il coutume de se révéler jeune ; et les chercheurs de second ordre y ont un rôle plus mince qu'ailleurs, le rôle d'une caisse de résonance pour un son qu'ils ne contribuent pas à former. Qu'en mathématique un vieillard puisse faire œuvre utile ou même géniale, il en est des exemples, mais rares, et qui chaque fois nous remplissent d'étonnement et d'admiration. Si donc la mathématique doit subsister telle qu'elle est apparue jusqu'ici à ses adeptes, il faut que les complications techniques dont plus d'un sujet s'y trouve hérissé ne soient qu'apparentes ou provisoires, il faut que, dans l'avenir comme par le passé, les grandes idées soient simplifcatrices, que le créateur soit toujours celui qui débrouille, pour lui-même et pour les autres, l'écheveau complexe de formules ou de notions. Déjà Hilbert se demandait : «Ne va-t-il pas devenir impossible au chercheur individuel d'embrasser toutes les branches de notre science ?» et justifiait sa réponse négative, non seulement par l'exemple, mais en observant que tout progrès important en mathématique est lié à la simplification des méthodes, à la dispariion d'anciens développements devenus inutiles, à l'unification de domaines jusque là étrangers. Il est probable que par exemple les contemporains d'Apollonius, ou ceux de Lagrange, ont connu cette même impression de complexité croissante qui aujourd'hui tend à nous accabler, Sans doute, un mathématicien moderne ne connaît plus si bien qu'Apollonius, ou qu'un candidat à l'agrégation, tels détails de la théorie des coniques ; nul ne croit pour cela que celle-ci doive former une science autonome. Peut-être le même sort est-il réservé à telles de nos théories dont nous sommes le plus fiers. L'unité des mathématiques n'en sera pas menacée.

Le danger est ailleurs. Pour être de nature plus contingente, il ne nous en paraît pas moins sérieux ; et nous ne pensons pas pouvoir conclure nos réflexions sur l'avenir des mathématiques sans en dire quelques mots. Nous l'avons dit, notre civilisation même nous semble attaquée de toutes parts ; mais c'était là parler en termes trop généraux. *Ne sutor ultra crepidam* ; c'est en mathématiciens qu'il nous faut jeter un regard sur le monde d'aujourd'hui. Notre tradition est saine ; sommes-nous assurés de la transmettre intacte ? En quelques pays d'Europe, et surtout en Allemagne jusqu'au début du régime hitlérien, on trouvait, il n'y a pas longtemps encore, un enseignement universitaire, appuyé sur un enseignement secondaire solide, qui assurait à l'apprenti mathématicien à la fois les connaissances spécifiques et la culture générale sans lesquels rien d'important ne peut être fait. Que voyons-nous aujourd'hui ? En France, aucune des branches essentielles des mathématiques modernes n'est enseignée, sinon par raccroc, dans nos universités ; c'est en vain qu'on chercherait dans celles-ci un cours qui mette l'étudiant avancé au contact d'un seul des grands problèmes que nous avons énumérés ; les éléments mêmes y sont trop souvent enseignés de telle manière que l'étudiant a tout à réapprendre s'il veut pousser plus loin ; l'extrême rigidité d'un mandarinat fondé sur de désuètes institutions académiques fait que toute tentative de renouvellement, si elle ne reste purement verbale, paraît vouée à l'échec. L'Italie, autrefois siège d'une école mathématique florissante, semble tombée dans un état de sclérose, analogue à celui dont la France se trouve menacée, mais qui a eu là des effets encore plus prompts et plus destructeurs. Quant à l'U.R.S.S. nous ne saurions (faute d'expérience personnelle) juger du point de vue qui nous intéresse ici, de son enseignement, secondaire et supérieur : on compte en ce pays nombre de mathématiciens de premier ordre ; mais il leur est rigoureusement interdit, semble-t-il, d'en franchir les frontières et il n'est guère possible qu'à la longue une telle pratique, si elle devait subsister, ait d'autre résultat que l'asphyxie lente de toute vie scientifique ; l'histoire de notre science, la plus lointaine comme la plus récente, montre suffisamment à quel point les contacts d'un pays à l'autre, non pas séances d'apparat où l'on boit des toasts entre deux avions, mais séjours prolongés d'étudiants et de maîtres auprès d'universités étrangères, sont une condition indispensable de tout progrès. Des conditions plus favorables, croyons-nous, se rencontrent en Angleterre, et dans quelques-unes de ces nations de l'Europe occidentale qui ne sont petites que dans les statistiques militaires. Quant à l'Allemagne, l'avenir seul peut montrer si elle retrouvera en elle-même les éléments nécessaires pour renouer avec la brillante tradition interrompue par quinze ans d'abêtissement collectif. Au delà de l'Atlantique, enfin, nous voyons un grand pays, qui compte les universités par centaines, les étudiants par centaines de mille, et où, suivant le mot de H. Morrison, le grand spécialiste américain des problèmes d'enseignement, «on a voulu l'éducation des masses, on a la production de masse en matière d'éducation». Thorstein Veblen, dans un petit livre trop peu lu, a tracé un jour le tableau de l'enseignement supérieur aux Etats-Unis, et l'a fait de main de maître ; indiquons seulement comment on forme le futur mathématicien, en ce pays qui produit plus de «mathématiciens» que peut-être tout le reste du monde. On y voit l'étudiant, dans les cas les plus favorables, disposer de trois ou quatre ans, vers la fin de son séjour à l'université, pour acquérir à la fois les connaissances, la méthode de travail, et l'élémentaire initiation intellectuelle, à quoi rien de ce qu'il a connu jusque là n'a pu en rien le préparer ; sa seule ressource est alors de se réfugier dans la spécialisation la plus étroite, grâce à quoi, s'il est intelligent et bien guidé, il pourra parfois faire œuvre utile ; encore risque-t-il fort, par la suite, de ne pas résister aux effets abrutissants de l'enseignement purement mécanique qu'il devra, pour gagner son pain, infliger à autrui après l'avoir lui-même trop longtemps subi. Qu'en d'autres domaines la production de masse, ainsi entendue, puisse avoir d'heureux résultats, c'est ce que nous ne sommes pas qualifié pour examiner ; les lignes qui précèdent font assez voir qu'il ne saurait en être ainsi en mathématiques. Par malheur, si, dans un pays dépourvu, il est vrai, de solides traditions intellectuelles, la plausible doctrine de l'éducation à la portée de tous a eu de pareilles conséquences, n'est-il pas à craindre que la contagion s'étende à une Europe affaiblie par une catastrophe sans précédent ? Mais si, comme Panurge, nous posons à l'oracle des questions trop indiscrètes, l'oracle nous répondra comme à Panurge : Trinck ! Conseil auquel le mathématicien obéit volontiers, satisfait qu'il est de croire étancher sa soif aux sources mêmes du savoir, satisfait qu'elles jaillissent toujours aussi pures et abondantes, alors que d'autres doivent recourir aux ruisseaux boueux d'une actualité sordide. Que si on lui fait reproche de la superbe de son attitude, si on le somme de s'engager, si on demande pourquoi il s'obstine en ces hauts glaciers où nul de ses congénères ne peut le suivre, il répond avec Jacobi : «Pour l'honneur de l'esprit humain.»

André Weil.