Preuve de Victor Varin que les nombres premiers annulent ma somme de somme de cosinus et qu'ils sont les seuls nombres à le faire (Denise Vella-Chemla, 13.7.2017)

$$dn1 = \sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k}.$$

$\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n.

$\sigma(1) = 1$
$\sigma(2) = 3$
$\sigma(3) = 4$

Maintenant la belle formule ($ssc = sumsumcos$).

$$dn2 = ssc(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k}.$$

$ssc(2) = 0$
$ssc(3) = 0$
$ssc(4) = 2$
$ssc(5) = 0$

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k} = \sum_{l=1}^{1} \cos 2\pi nl + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k} + \sum_{l=1}^{n} \cos 2\pi l$$

$$\begin{aligned} dn3 \quad &= \sigma(n) = 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k} \\ &= 1 + n + ssc(n) \end{aligned}$$

Ce qui est évident pour les nombres premiers.

Maintenant prouvons formellement que les nombres premiers annulent la fonction $ssc(n)$.

On définit $sss(n)$ par :

$$dn4 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \sin \frac{2\pi nl}{k}$$

$sss(2) = 0$
$sss(3) = 0$
$sss(4) = 0$
$sss(5) = 0$

Mais nous n'utiliserons pas cette propriété, elle découlera automatiquement.

Maintenant prenons

$v(n) = ssc(n) + i.sss(n)$ avec $i^2 = -1$

$$dn5 = v(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \cos \frac{2\pi nl}{k} + i \left(\sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \sin \frac{2\pi nl}{k} \right)$$

De façon triviale, $Re(v(n)) = ssc(n)$ quel que soit $sss(n)$! Mais :

$$dn6 = v(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} e^{\frac{2i\pi nl}{k}}$$

$v(4) = 2$

Maintenant, considérons la somme intérieure $dn6$:

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^{k} e^{\frac{2i\pi nl}{k}}$$

Maintenant, une ruse importante : oublions temporairement que n est un entier dans $dn7$!!

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^{k} \left(e^{\frac{2i\pi n}{k}} \right)^l$$

Et posons :

$$e^{\frac{2i\pi n}{k}} = X$$

alors

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^{k} X^l = \frac{X(X^k - 1)}{X - 1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} dn7 &= sm(n) &= \frac{e^{\frac{2i\pi n}{k}}\left(\left(e^{\frac{2i\pi n}{k}}\right)^k - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi n}{k}} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{2i\pi n}{k}}\left(e^{2i\pi n} - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi n}{k}} - 1} \end{aligned}$$

Ces calculs sont valides si le dénominateur est non nul !

Maintenant, si n est premier, alors $\frac{n}{k}$ est fractionnaire et le dénominateur n'est pas nul, dans la mesure où $exp(2i\pi n) = 1$ pour n entier !

Ainsi la preuve est faite que les nombres premiers n annulent $ssc(n)$. Mais si n est un nombre composé, il faut utiliser une petite ruse : considérons seulement $k|n$ (k divise n) dans $dn6$.

subs(n=d*k, dn7) mais d est légèrement différente d'une valeur entière et alors la formule ci-dessous a du sens :

$$sm(dk) = \frac{e^{2i\pi d}(e^{2i\pi dk} - 1)}{e^{2i\pi d} - 1}$$
$$e^{2i\pi d} = Y$$
$$e^{2i\pi d} = 1$$
$$\frac{Y^k - 1}{Y - 1} = \sum_{j=0}^{k-1} Y^j$$
$$sm(dk) = e^{2i\pi d} \sum_{j=0}^{k-1} \left(e^{2i\pi d}\right)^j$$

On rappelle alors que d est entier et que donc,

$$sm(dk) = k$$

ce qui termine la preuve.