

Preuve de Victor Varin que les nombres premiers annulent ma somme de somme de cosinus et qu'ils sont les seuls nombres à le faire (Denise Vella-Chemla, 13.7.2017)

$$dn1 = \sigma(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k}.$$

$\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n .

$$\sigma(1) = 1$$

$$\sigma(2) = 3$$

$$\sigma(3) = 4$$

Maintenant la belle formule ($ssc = \text{sumsumcos}$).

$$dn2 = ssc(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k}.$$

$$ssc(2) = 0$$

$$ssc(3) = 0$$

$$ssc(4) = 2$$

$$ssc(5) = 0$$

On a :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k} = \sum_{l=1}^1 \cos 2\pi nl + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k} + \sum_{l=1}^n \cos 2\pi l$$

$$\begin{aligned} dn3 &= \sigma(n) = 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k} \\ &= 1 + n + ssc(n) \end{aligned}$$

Ce qui est évident pour les nombres premiers.

Maintenant prouvons formellement que les nombres premiers annulent la fonction $ssc(n)$.

On définit $sss(n)$ par :

$$dn4 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sin \frac{2\pi nl}{k}$$

$$sss(2) = 0$$

$$sss(3) = 0$$

$$sss(4) = 0$$

$$sss(5) = 0$$

Mais nous n'utiliserons pas cette propriété, elle découlera automatiquement.

Maintenant prenons

$$\begin{aligned} v(n) &= ssc(n) + i.sss(n) \text{ avec } i^2 = -1 \\ dn5 &= v(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \cos \frac{2\pi nl}{k} + i \left(\sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k \sin \frac{2\pi nl}{k} \right) \end{aligned}$$

De façon triviale, $Re(v(n)) = ssc(n)$ quel que soit $sss(n)$! Mais :

$$dn6 = v(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^k e^{\frac{2i\pi nl}{k}}$$

$$v(4) = 2$$

Maintenant, considérons la somme intérieure $dn6$:

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^k e^{\frac{2i\pi nl}{k}}$$

Maintenant, une ruse importante : oublions temporairement que n est un entier dans $dn7$!!

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^k \left(e^{\frac{2i\pi n}{k}} \right)^l$$

Et posons :

$$e^{\frac{2i\pi n}{k}} = X$$

alors

$$dn7 = sm(n) = \sum_{l=1}^k X^l = \frac{X(X^k - 1)}{X - 1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} dn7 = sm(n) &= \frac{e^{\frac{2i\pi n}{k}} \left(\left(e^{\frac{2i\pi n}{k}} \right)^k - 1 \right)}{e^{\frac{2i\pi n}{k}} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{2i\pi n}{k}} (e^{2i\pi n} - 1)}{e^{\frac{2i\pi n}{k}} - 1} \end{aligned}$$

Ces calculs sont valides si le dénominateur est non nul !

Maintenant, si n est premier, alors $\frac{n}{k}$ est fractionnaire et le dénominateur n'est pas nul, dans la mesure où $\exp(2i\pi n) = 1$ pour n entier !

Ainsi la preuve est faite que les nombres premiers n annulent $ssc(n)$. Mais si n est un nombre composé, il faut utiliser une petite ruse : considérons seulement $k|n$ (k divise n) dans $dn6$.

subs(n=d*k, dn7) mais d est légèrement différente d'une valeur entière et alors la formule ci-dessous a du sens :

$$\begin{aligned} sm(dk) &= \frac{e^{2i\pi d}(e^{2i\pi dk} - 1)}{e^{2i\pi d} - 1} \\ e^{2i\pi d} &= Y \\ e^{2i\pi d} &= 1 \\ \frac{Y^k - 1}{Y - 1} &= \sum_{j=0}^{k-1} Y^j \\ sm(dk) &= e^{2i\pi d} \sum_{j=0}^{k-1} (e^{2i\pi d})^j \end{aligned}$$

On rappelle alors que d est entier et que donc,

$$sm(dk) = k$$

ce qui termine la preuve.