Extrait du *Mémoire sur les nombres premiers* de Tchebichef paru au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées dans lequel il démontre le Postulat de Bertrand *

Dans ce mémoire, Tchebichef s'interroge sur le transfert des conditions de convergence d'une série indicée par les entiers aux conditions de convergence d'une série identique mais indicée par les nombres premiers et il démontre grâce aux limites qu'il utilise le Postulat de Bertrand qui énonce qu'il y a toujours un nombre premier entre x et $2x$.

Convenons de désigner par $\theta(z)$ la somme des logarithmes hyperboliques de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z.

[...]

(Fin du § v)

Ainsi, nous arrivons à la conséquence, que la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x est comprise dans les limites.

$$\frac{6}{5}\,A\,x - A\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2,$$

$$A\,x - \frac{12}{5}\,A\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3.$$

en faisant, pour abréger, $A = \log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0,92129202.$

[...]

§ IX.

La totalité des nombres premiers, compris dans des limites données, se déduit, comme cas particulier, de la valeur de la série

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + ... + F(\rho),$$

que nous avons examinée dans les paragraphes précédents. En effet, si l'on prend

$$F(x) = 1,$$

la somme

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + ... + F(\rho)$$

*http://www.numdam.org/item/JMPA_1852_1_17__366_0.pdf.
Transcription : Denise Vella-Chemla, décembre 2024.

se réduira à autant d'unités qu'il se trouve de termes dans la série des nombres premiers $\alpha, \beta, \gamma, ..., \rho$.

Donc, les formules (9) †, dans le cas de $F(x) = 1$, détermineront les limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers, compris entre l et L. Ces limites sont plus étroites que celles que nous avons trouvées dans le § VI, en vertu des inégalités que la fonction $\theta(x)$ vérifie. Dans le cas particulier de $l = 2$, nous trouvons que

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\theta_2(1)}{\log 2} - \dfrac{\theta_1(1)}{\log 2} + \displaystyle\sum_{x=2}^{x=L} \dfrac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{\log x}, \\[3ex] \dfrac{\theta_1(1)}{\log 2} - \dfrac{\theta_2(1)}{\log 2} + \displaystyle\sum_{x=2}^{x=L} \dfrac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{\log x}, \end{array} \right.$$

sont des limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers de 2 à L, ou bien, ce qui revient au même, la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas L. En calculant la demi-somme de ces limites (11), nous aurons une valeur approchée de la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas L. Quant à l'erreur de cette valeur, elle ne pourra surpasser la demi-différence des expressions (11). Par des calculs très simples, on parvient à connaître que le rapport de la demi-différence des expressions (11) à leur demi-somme devient égal à $\frac{1}{11}$ quand on fait $L = \infty$. Donc, pour de très grandes valeurs de L, ce rapport sera inférieur à $\frac{1}{10}$, et, par conséquent, si l'on calcule, d'après nos formules, la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas une limite donnée, très grande, l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{10}$ de la quantité cherchée.

Petite coquille relevée dans une phrase de l'article

$$†(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U > \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=1}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{\log x}, \\[3ex] U < \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=1}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{\log x} \end{array} \right.$$

THÉORÈME. (*de la section 7*) *Si la fonction $F(x)$, passé une certaine limite de x, reste positive, la convergence de la série,*

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \dots$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) \dots .$$

soit également convergente.
Les définitions des fonctions θ_1 et θ_2 sont les suivantes :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x) = \dfrac{6}{5}\, A\, x - A\, x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \dfrac{5}{2} \log x + 2 \\[3ex] \theta_2(x) = A\, x - \dfrac{12}{5}\, A\, x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \dfrac{15}{4} \log x - 3. \end{array} \right. .$$

§ VII.

Au moyen de la fonction $\theta(x)$ que nous employons pour désigner la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x, on peut facilement exprimer la somme

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho) = U,$$

où α, β, $\gamma, \ldots$, ρ sont les nombres premiers compris dans les limites données. En effet, si α, β, $\gamma, \ldots$, ρ sont compris dans les limites l et L, cette somme peut être exprimée ainsi

$$\frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1)$$
$$+ \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+2) + \ldots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{\log L} F(L);$$

car, en général, la fonction $\frac{\theta(x) - \theta(x-1)}{\log x}$, pour x entier, se réduit à o si $\overset{x-1}{x}$ est un nombre composé, et à 1 si $\overset{x-1}{x}$ est un nombre premier.

Il faut remplacer x par $x - 1$ c¡dans la dernière ligne ci-dessus, comme en atteste le programme suivant :

```
import math
from math import log,floor

def premier(atester):
     k = 2
     if atester in [0, 1]:  return False
     if atester in [2, 3, 5, 7]:  return True
     while True:
          if k * k > atester:  return True
          else:
               if atester % k == 0:  return False
               else:  k = k + 1

def theta(x):
     somme = 0
     for k in range(2,x):
          if premier(k):
               somme = somme+log(k)
     return(somme)

print('nombres premiers :  ')
for x in range(2,101):
     if (theta(x)-theta(x-1))/log(x) != 0:
     print(x-1,' ',end='')
```