Chapitre XIX
Calcul opérationnel et applications

Nikolaï S. Piskounov

À l'heure actuelle le calcul opérationnel (ou symbolique) est l'un des domaines importants de l'analyse mathématique. En physique, en mécanique, en électrotechnique et dans d'autres branches de la science on utilise les méthodes du calcul opérationnel pour la résolution de différents problèmes. Le calcul opérationnel a trouvé une application particulièrement large dans la technologie moderne de l'automation et des télécommunications. Dans ce chapitre (sur la base du matériel des chapitres précédents) seront précisément exposées les notions fondamentales du calcul opérationnel ainsi que les méthodes de son application à la résolution des équations différentielles ordinaires.

§1. Original et image

Soit donnée une fonction de la variable réelle t définie pour $t \geqslant 0$ (parfois nous estimerons que la fonction $f(t)$ est définie dans un intervalle infini $-\infty < t < \infty$, mais $f(t) = 0$ quand $t < 0$). Nous supposerons que la fonction $f(t)$ est continue par tranches, c'est-à-dire telle que, dans chaque intervalle fini, elle possède un nombre fini de discontinuités de 1ère espèce (cf. §9, ch. II, t. I). Pour assurer l'existence de certaines intégrales dans l'intervalle infini $0 \leqslant t < \infty$ nous imposerons à la fonction $f(t)$ des restrictions complémentaires. Nous supposerons précisément qu'il existe des nombres positifs constants M et s_0 tels que

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

pour toute valeur de t prise dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$.

Considérons le produit de la fonction $f(t)$ par la fonction complexe e^{-pt} de la variable réelle[1] t, où $p = a + ib$ $(a > 0)$ est un nombre complexe :

$$e^{-pt} f(t) \tag{2}$$

La fonction (2) est aussi une fonction complexe de la variable réelle t :

$$\begin{aligned} e^{-pt} f(t) &= e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} \\ &= e^{-at} f(t) \cos bt - ie^{-at} f(t) \sin bt. \end{aligned}$$

Considérons ensuite l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt \, dt - i \int_0^\infty e^{-at} f(t) \sin bt \, dt. \tag{3}$$

Montrons que si la fonction $f(t)$ vérifie la condition (1) et $a > s_0$, alors les intégrales du second membre de l'égalité (3) existent et la convergence des ces intégrales est absolue. Estimons d'abord la première de ces intégrales :

Extrait de Calcul différentiel et intégral de Nikolaï S. Piskounov, Éditions Mir, Tome II, p. 445 et suivantes.
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

1. Au sujet des fonctions complexes de la variable réelle cf. §4, ch. VII t. I.

$$\left|\int_0^\infty e^{-at} f(t)\cos bt\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-at} f(t)\cos bt|dt$$
$$< M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0 t}dt = M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt = \frac{M}{a-s_0}.$$

On estime de même la seconde intégrale. Ainsi, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ existe. Elle définit une certaine fonction de p, que nous désignerons[2] par $f(p)$:

(4) $$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

La fonction $f(p)$ est appelée *transformée de Laplace* ou *image L* ou simplement *image* de $f(t)$. La fonction $f(t)$ est appelée *original* ou *fonction objet*. Le fait que $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$ est noté de la manière suivante :

(5) $$F(p) \ \dot{\to}\ f(t)$$

ou

(6) $$f(t) \ \dot{\leftarrow}\ F(p)$$

soit encore[3]

(7) $$L\{f(t)\} = F(p).$$

Comme nous le verrons par la suite, le sens de l'introduction des images réside dans le fait qu'elles permettent de simplifier la résolution de nombreux problèmes, en particulier, de ramener la résolution des équations différentielles ordinaires à certaines opérations algébriques simples permettant de trouver la fonction image. Connaissant l'image on peut trouver l'original soit au moyen des tables préalablement composées "original-image" (dictionnaire d'images), soit par les méthodes que nous exposerons plus bas. Des questions se posent alors naturellement.

Soit donnée une certaine fonction $F(p)$. Existe-t-il une fonction $f(t)$ dont $F(p)$ est l'image ? Si elle existe, est-elle unique ? Les deux questions reçoivent une réponse positive si $F(p)$ et $f(t)$ satisfont à certaines conditions. En particulier l'unicité de l'image est établie par le théorème suivant que nous énoncerons sans démonstration :

Théorème d'unicité. *Si deux fonctions continues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ possèdent une même image L $F(p)$, ces fonctions sont identiquement égales.*

Ce théorème sera d'une grande utilité pour tout ce qui suivra. En effet, si lors de la résolution d'un problème pratique nous avons pu déterminer l'image de la fonction cherchée, et si ensuite nous avons trouvé l'original d'après son image, nous pouvons conclure en vertu du théorème for-

2. La fonction $f(p)$ pour $p \neq 0$ est une fonction de la variable complexe (cf., par exemple, l'ouvrage de V. Smirnov "Cours de mathématiques supérieures", t. III, partie 2. Editions de Moscou, 1972). La transformation est analogue à celle de Fourier examinée au §14, ch. XVII.

3. On utilise aussi d'autres symboles de correspondances. C'est ainsi qu'au lieu de la notation $\dot{\leftarrow}$ on emploie aussi le symbole] et on écrit dans le cas de la formule (6) $f(t)$] $F(p)$ (N.d.T.).

mulé que la fonction trouvée est la solution du problème posé et qu'il n'existe pas d'autres solutions.

§2. Image des fonctions $\sigma_0(t), \sin t, \cos t$

I. La fonction $f(t)$ ainsi définie

$$f(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$
$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0,$$

est appelée *fonction unité de Heaviside* et notée $\sigma_0(t)$. Le graphique

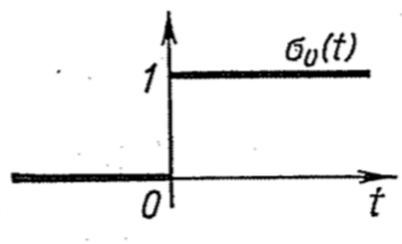

Fig. 397

de cette fonction est représenté sur la fig. 397. Trouvons l'image L de la fonction de Heaviside :

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Ainsi [4],

(8) $$1 \; \dot{\leftarrow} \; \frac{1}{p}$$

ou, plus exactement,

$$\sigma_0(t) \; \dot{\leftarrow} \; \frac{1}{p}.$$

Dans certains traités de calcul opérationnel on appelle image de la fonction $f(t)$ l'expression

$$F^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Dans ce cas on a : $\sigma_0(t) \; \dot{\leftarrow} \; 1$ et, par conséquent, $C \; \dot{\leftarrow} \; C$, plus exactement $C\sigma_0(t) \; \dot{\leftarrow} \; C$.

II. Soit $f(t) = \sin\ t$; alors

$$L\{\sin\ t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin\ t\, dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin\ t - \cos\ t)}{p^2+1}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi,

(9) $$\sin\ t \; \dot{\leftarrow} \; \frac{1}{p^2+1}.$$

---

4. Pour calculer l'intégrale $\int\limits_0^\infty e^{-pt} dt$ on aurait pu la représenter comme la somme des intégrales de fonctions réelles ; nous aurions obtenu le même résultat. Cette remarque se rapporte également aux intégrales suivantes.

III. Soit $f(t) = \cos\ t$; alors

$$L\{\cos\ t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos\ t\, dt = \left. \frac{e^{-pt}(\sin\ t - p\cos\ t)}{p^2+1} \right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Ainsi,

(10) $$\cos\ t \ \dot{\leftarrow}\ \frac{p}{p^2+1}.$$

§3. Image des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante. Image des fonctions $\sin\ at, \cos\ at$

Considérons l'image de la fonction $f(at)$, où $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt.$$

Effectuons un changement de variable dans la seconde intégrale, posant $z = at$; par conséquent, $dz = adt$; nous obtenons alors :

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz$$

ou

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Ainsi, *si*

$$F(p)\ \dot{\rightarrow}\ f(t),$$

alors (11) $$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)\ \dot{\rightarrow}\ f(at).$$

Exemple 1. Nous obtenons immédiatement de la formule (9) en vertu de (11) :

$$\sin\ at\ \dot{\leftarrow}\ \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ou

(12) $$\sin\ at\ \dot{\leftarrow}\ \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (10) en vertu de (11) :

$$\cos\ at\ \dot{\leftarrow}\ \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ou

(13) $$\cos\ at\ \dot{\leftarrow}\ \frac{p}{p^2+a^2}.$$

§4. Propriété de linéarité de l'image

Théorème. *L'image de la somme de plusieurs fonctions, multipliées par des constantes, est égale à la somme des images de ces fonctions multipliées par les constantes correspondantes, autrement dit si*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \tag{14}$$

(C_i sont des constantes) et

$$F(p) \doteqdot f(t), \qquad F_i(p) \doteqdot f_i(t)$$

alors (14′)

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p).$$

Démonstration. Multiplions tous les termes de l'égalité (14) par e^{-pt} et intégrons en t entre les limites 0 et ∞ (sortant les facteurs C_i de sous le signe d'intégration), nous obtenons l'égalité (14′).

Exemple 1. Trouver l'image de la fonction

$$f(t) = 3 \sin\, 4t - 2 \cos\, 5t.$$

Solution. En vertu des formules (12), (13) et (14') nous obtenons :

$$Lf(t) = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

Exemple 2. Trouver l'original dont l'image est donnée par l'expression

$$F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20p}{p^2+9}$$

Solution. Représentons $F(p)$ de la manière suivante :

$$F(p) = \frac{5}{2}\frac{2}{p^2+(2)^2} + 20\frac{p}{p^2+(3)^2}$$

Par conséquent, en vertu des formules (12), (13) et (14) nous obtenons :

$$f(t) = \frac{5}{2}\sin\, 2t + 20 \cos\, 3t.$$

Il découle du théorème d'unicité du §1 que c'est l'unique original qui correspond à la fonction donnée $F(p)$.

§5. Théorème du déplacement

Théorème. *Si $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$, alors $F(p+\alpha)$ est l'image de la fonction $e^{-\alpha t} f(t)$, autrement dit*

$$\begin{aligned} &si\ \ F(p) \doteqdot f(t) \\ &alors\ \ F(p+\alpha) \doteqdot e^{-\alpha t} f(t). \end{aligned} \tag{15}$$

(Nous supposons ici que Re $(p+\alpha) > s_0$.)

Démonstration. Trouvons l'image de la fonction $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt-\alpha t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}f(t)dt.$$

Ainsi,

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\} = F(p+\alpha)$$

Le théorème démontré élargit notablement la classe des images pour lesquelles l'original peut aisément être retrouvé.

§6. Image des fonctions $e^{-\alpha t}, \mathrm{sh}\ \alpha t, \mathrm{ch}\ \alpha t$, et $e^{-\alpha t}\sin\ \alpha t, e^{-\alpha t}\cos\ at$

Il découle immédiatement de la formule (8), en vertu de la formule (15), que

(16) $$\frac{1}{p+\alpha} \doteq e^{-\alpha t}.$$

D'une manière analogue

(16′) $$\frac{1}{p-\alpha} \doteq e^{\alpha t}.$$

Retranchant des termes de la relation (16') les termes correspondants de la relation (16) et divisant les différences obtenues par 2, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right)\frac{1}{p+\alpha} \doteq \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

ou

(17) $$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \doteq \mathrm{sh}\ \alpha t.$$

De même, en faisant la somme de (16) et de (16'), on a :

(18) $$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \doteq \mathrm{ch}\ \alpha t.$$

Il découle de la formule (12) en vertu des formules (15) :

(19) $$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq e^{-\alpha t}\sin\ at.$$

De la formule (13) en vertu des formules (15) il découle :

(20) $$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq e^{-\alpha t}\cos\ at.$$

Exemple 1. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{7}{p^2+10p+41}.$$

Solution. Transformons $F(p)$ de façon à lui donner la forme de l'expression du premier membre de la relation (19) :

$$\frac{7}{p^2+10p+41} = \frac{7}{(p+5)^2+16} = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}$$

Ainsi,

$$F(p) = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}$$

Par conséquent, en vertu de la formule (19), nous aurons :

$$F(p) \ \dot{\to}\ \frac{7}{4}e^{-5t}\ \sin\ 4t$$

Exemple 2. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Solution. Transformons la fonction $F(p)$:

$$\begin{aligned}\frac{p+3}{p^2+2p+10} &= \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{(p+1)^2+3^2} \\ &= \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(p+1)^2+3^2},\end{aligned}$$

en vertu des formules (19) et (20) nous trouvons l'original

$$F(p) \ \dot{\to}\ e^{-t}\cos\ 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin\ 3t.$$

§7. Dérivation de l'image

Théorème. *Si* $F(p)\ \dot{\to}\ f(t)$, *alors*

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\ \dot{\to}\ t^nf(t). \tag{21}$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord que si $f(t)$ vérifie la condition (1), alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^nf(t)dt \tag{22}$$

existe.

Par hypothèse $|f(t)| < Me^{s_0t}$, $p = a+ib$, $a > s_0$; en outre nous avons $a > 0$ et $s_0 > 0$. Il est évident qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $a > s_0+\varepsilon$. De même qu'au §1 on démontre l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t}|f(t)|dt.$$

Estimons ensuite l'intégrale (22) :

$$\int_0^\infty |e^{-pt}t^nf(t)|dt = \int_0^\infty |e^{-(a-\varepsilon)t}e^{-\varepsilon t}t^nf(t)|dt.$$

La fonction $e^{-\varepsilon t}t^n$ étant bornée et plus petite en valeur absolue qu'un certain nombre N pour tout $t > 0$, on peut écrire :

$$\int_0^\infty |e^{-pt}t^nf(t)|dt < N\int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t}f(t)|dt = N\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t}|f(t)|dt < \infty$$

Nous avons ainsi démontré l'existence de l'intégrale (22). Or, cette intégrale peut être considérée comme la dérivée du n-ième ordre par rapport au paramètre[5] p de l'intégrale

5. Nous avons établi au préalable la formule de dérivation de l'intégrale définie par rapport à un paramètre réel

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

Ainsi de la formule

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

nous tirons la formule

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

Ces deux égalités nous donnent

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t),$$

c'est-à-dire la formule (21).

Utilisons la formule (22) pour trouver l'image de la fonction puissance. Ecrivons la formule (8) :

$$\frac{1}{p} \ \dot{\to}\ 1.$$

Nous obtenons de cette formule en vertu de la formule (21) :

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \ \dot{\to}\ t$$

ou

$$\frac{1}{p^2} \ \dot{\to}\ 1.$$

D'une manière analogue

$$\frac{2}{p^3} \ \dot{\to}\ t^2.$$

Pour un n quelconque nous obtenons :

(23)
$$\frac{n!}{p^{n+1}} \ \dot{\to}\ t^n.$$

Exemple 1. Nous tirons de la formule (cf. (12))

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin\, at\, dt,$$

en dérivant les premier et second membres par rapport au paramètre p :

(24)
$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \ \dot{\to}\ t \sin\ at.$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (13) en vertu de la formule (21)

(25)
$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \ \dot{\to}\ t \cos\ at.$$

Exemple 3. Nous obtenons de la formule (16) on vertu de la formule (21)

(cf. §10, ch. XI, t. I). Ici le paramètre p est un nombre complexe, mais la formule de dérivation reste valable.

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \;\dot{\to}\; t\,e^{-\alpha t}. \tag{26}$$

§8. Image des dérivées

Théorème. *Si* $F(p) \;\dot{\to}\; f(t)$, *alors*

$$pF(p) - f(0) \;\dot{\to}\; f'(t). \tag{27}$$

Démonstration. En vertu de la définition de l'image d'une fonction nous pouvons écrire :

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt. \tag{28}$$

Nous supposerons que toutes les dérivées $f'(t), f"(t), \ldots f^{(n)}(t)$, que nous rencontrerons, satisfont à la condition (1) et, par conséquent, que l'intégrale (28) et les intégrales analogues pour les dérivées successives existent. Effectuant l'intégration par parties de l'intégrale du second membre de l'égalité (28) nous trouvons :

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = e^{-pt}f(t)|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

Or d'après la condition (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = F(p).$$

C'est pourquoi

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

Le théorème est démontré.

Considérons ensuite l'image des dérivées d'ordre quelconque. Portant dans la formule (27) l'expression $pF(p) - f(0)$ au lieu de $F(p)$ et remplaçant $f(t)$ par $f'(t)$ nous obtenons :

$$p[pF(p)f(0)] - f(0)] - f'(0) \;\dot{\to}\; f''(t)$$

ou, en ouvrant les parenthèses,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \;\dot{\to}\; f''(t).$$

L'image de la dérivée d'ordre n sera

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \;\dot{\to}\; f^{(n)}(t). \tag{29}$$

Remarque. Les formules (27), (29) et (30) se simplifient, si $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Dans ce cas nous obtenons :

$$\begin{gathered} F(p) \;\dot{\to}\; f(t) \\ pF(p) \;\dot{\to}\; f'(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p^nF(p) \;\dot{\to}\; f^{(n)}(t) \end{gathered}$$

§9. Dictionnaire d'images

Pour faciliter l'utilisation des images obtenues nous les groupons dans un tableau ci-contre.

Remarque. Si nous prenons pour image de la fonction $f(t)$

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

il convient dans les formules 1 à 13 du tableau de multiplier les expressions de la première colonne par p. Quant aux formules 14 et 15 elles seront de la forme : comme $F^*(p) = pF(p)$, en remplaçant dans le premier membre de la formule (14) $F(p)$ par l'expression $\dfrac{F^*(p)}{p}$ et en multipliant par p nous obtenons :

(14′)
$$(-1)^n p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \;\dot{\rightarrow}\; t^n f(t)$$

Portant dans le premier membre de la formule (15)

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \qquad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

et multipliant par p, nous obtenons :

(15′)
$$\frac{1}{p}F_1^*(p)F_2^*(p) \;\dot{\rightarrow}\; \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

$\mathrm{n^{os}}$	$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin\ at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos\ at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{sh}\ \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}\ \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \sin\ at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos\ at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \sin\ at$
11	$\frac{p^2+a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos\ at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$t\, e^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin\ at - at \cos\ at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n\ f(t)$
15	$F_1(p)\ F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$

§10. Equation auxiliaire d'une équation différentielle donnée

(non transcrit)

§11. Théorème de décomposition

(non transcrit)

§12. Exemples de résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel

(non transcrit)

§13. Théorème de convolution

Lors de la résolution des équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel on se sert souvent du

Théorème de convolution. *Si $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sont les images des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, c'est-à-dire si*

$$F_1(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} f_1(t) \qquad \text{et} \qquad F_2(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} f_2(t)$$

alors $F_1(p)F_2(p)$ est l'image de la fonction

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

autrement dit

$$F_1(p)F_2(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \tag{39}$$

Démonstration. Trouvons l'image de la fonction

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

en partant de la définition de l'image

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int^{\infty} e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]dt.$$

L'intégrale du second membre est une intégrale double, étendue au domaine limité par les droites $\tau = 0,\ \tau = t$ (fig. 398). Changeons l'ordre d'intégration dans cette intégrale, nous obtenons alors :

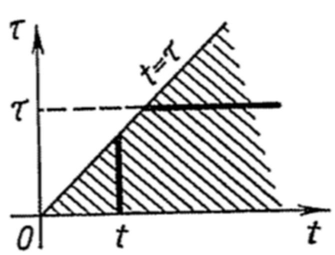

Fig. 398

$$L\left\{\int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^{\infty}\left[f_1(\tau)\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}f_2(t-\tau)dt\right]d\tau.$$

Effectuant le changement de variable $t-\tau=z$ dans l'intégrale intérieure, nous obtenons :

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-p(z+\tau)} f_2(z)dz = e^{-p\tau} \int_{0}^{\infty} e^{-pz} f_2(z)dz = e^{-pz} F_2(p).$$

Par conséquent,

$$L\left\{\int_{0}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{0}^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p)d\tau$$
$$= F_2(p)\int_{0}^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau)d\tau = F_2(p)F_1(p).$$

Ainsi,

$$\int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \;\dot{\leftarrow}\; F_1(p)F_2(p).$$

C'est la formule 15 du tableau 1.

Remarque 1. L'expression $\int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ est appelée *convolution* (ou *produit de composition*) des deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. L'opération du calcul correspondant est appelée *transformation de convolution* de deux fonctions et on a alors

$$\int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau.$$

La validité de cette dernière égalité peut être établie en effectuant le changement de variable $t-\tau=z$ dans l'intégrale du second membre.

Exemple. Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t),$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x_0' = 0$ pour $t=0$.

Solution. Écrivons l'équation auxiliaire (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p),$$

où $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$. Par conséquent, $\bar{x}(p) = \dfrac{1}{p^2+1}F(p)$ mais $\dfrac{1}{p^2+1} \;\dot{\rightarrow}\; \sin t$ et $F(p) \;\dot{\rightarrow}\; f(t)$.

Appliquant le théorème de convolution (39) et désignant $\dfrac{1}{p^2+1} = F_2(p)$, $F(p) = F_1(p)$, nous obtenons

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \sin (t - \tau) d\tau. \tag{40}$$

Remarque 2. A l'aide du théorème de convolution on peut trouver aisément l'image de l'intégrale d'une fonction donnée si l'on connaît l'image de cette fonction ; autrement dit, si $F(p) \;\dot{\rightarrow}\; f(t)$, alors

$$\frac{1}{p} F(p) \;\dot{\rightarrow}\; \int_0^t f(\tau) d\tau. \tag{41}$$

En effet, si nous introduisons les notations

$$f_1(t) = f(t), \qquad f_2(t) = 1, \qquad \text{alors} \qquad F_1(p) = F(p), \qquad F_2(p) = \frac{1}{p}$$

Portant ces fonctions dans la formule (39) nous obtenons la formule (41).