Éléments trouvés sur Oliver Heaviside, pour comprendre l'idée générale du Calcul opérationnel qui permet d'approximer les zéros de zeta par un programme en python (Denise Vella-Chemla, septembre 2021)

Dans le livre *Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles* de Srishti D. Chatterji, on trouve p. 571 "L'origine de la terminologie "calcul opérationnel" réside dans les manipulations de Heaviside qui traitait l'opération de la dérivation $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ comme un opérateur p. Son procédé peut être expliqué par l'exemple simple suivant :

$$y' - y = x^2;$$

On écrit cette équation comme

$$py - y = x^2$$

d'où

$$y = \frac{1}{p-1}x^2 = -(1+p+p^2+\ldots)x^2 = -(x^2+2x+2)$$

ce qui donne une solution particulière de l'équation donnée. On obtient ensuite la solution générale telle

$$y(x) = a\,e^x - (x^2+2x+2)$$

où a est une constante arbitraire. Ce type de calcul était utilisé par Heaviside avec beaucoup de succès, sans qu'il se préoccupe d'expliquer la raison de ce succès. Les transformées de Laplace permirent une première explication partielle durant les années 1920-1930 ; une autre explication fut fournie par une théorie des opérateurs, perfectionnée par Mikusínski autour de 1950 ; la généralisation des transformées de Laplace aux distributions de Schwartz donne un cadre général pour ces calculs opérationnels."

Dans la biographie wikipedia de Heaviside, on trouve "Les années 1880 à 1887 sont consacrées (par Oliver Heaviside) au développement du calcul opérationnel qui permet de ramener les équations différentielles à des équations polynomiales. Sa méthode déclenche une controverse du fait de son manque de rigueur, et il y répond avec un mot resté célèbre "Les mathématiques sont une science expérimentale, les définitions ne sont pas posées dès le départ, mais progressivement. Elles s'imposent d'elles-même, dès que le sujet d'étude est suffisamment mûr". Heaviside a également défendu son point de vue par l'analogie suivante : "Devrais-je renoncer à mon dîner au prétexte que je ne comprends pas totalement le fonctionnement de la digestion ?".

Valeurs des parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann au milllième (calculées par Andrew Odlyzko)

1	→ 14.134	11	→ 52.970	21	→ 79.337
2	→ 21.022	12	→ 56.446	22	→ 82.910
3	→ 25.010	13	→ 59.347	23	→ 84.735
4	→ 30.424	14	→ 60.831	24	→ 87.425
5	→ 32.935	15	→ 65.112	25	→ 88.809
6	→ 37.586	16	→ 67.079	26	→ 92.491
7	→ 40.918	17	→ 69.546	27	→ 94.651
8	→ 43.327	18	→ 72.067	28	→ 95.870
9	→ 48.005	19	→ 75.704	29	→ 98.831
10	→ 49.773	20	→ 77.144		

Programme qui approxime les zéros de la fonction zeta de Riemann en python

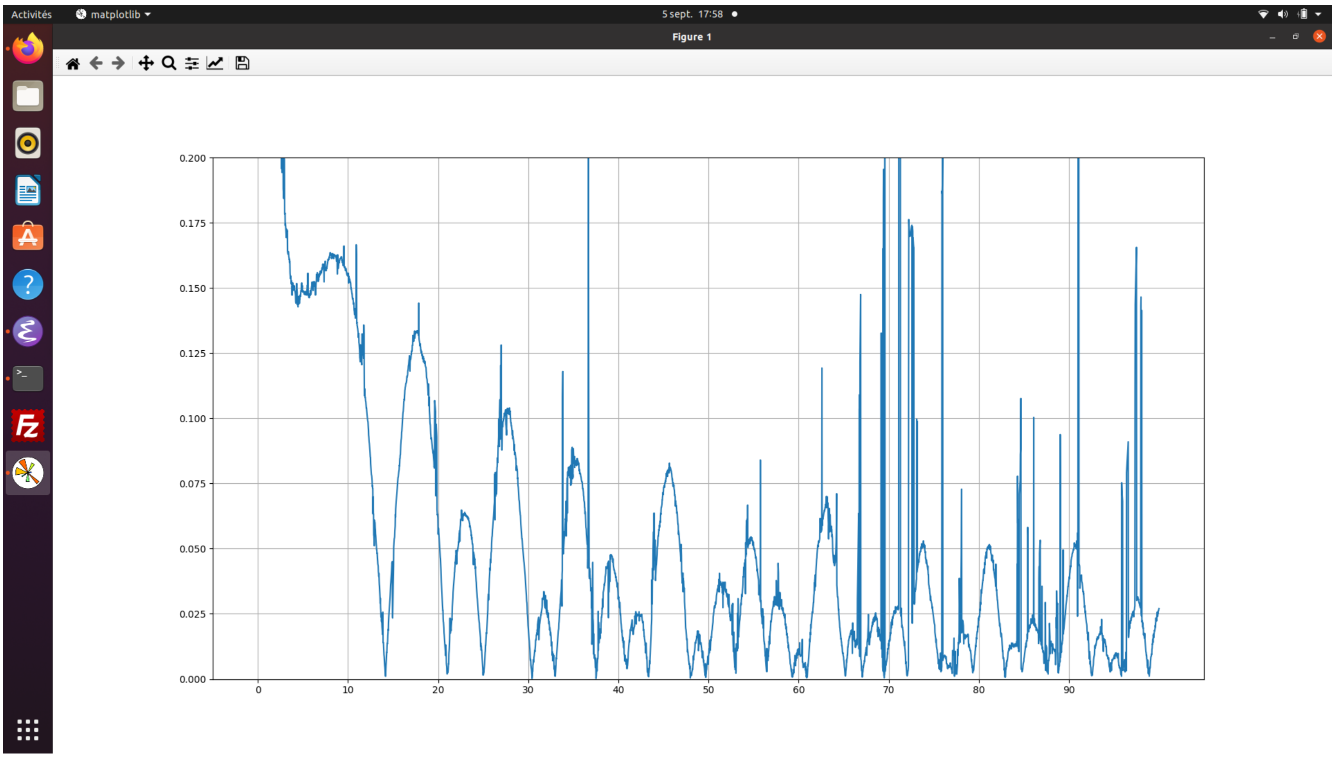
```python
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt
import math

xlim = 10
nbpts = 2000

def y(x): return math.exp(-x/2)*(math.exp(x) % 1)

def z(t):
    f = lambda x: -y(x) * math.cos(-x*t)
    g = lambda x: -y(x) * math.sin(-x*t)
    a = quad(f, -xlim, xlim, limit=200)[0]
    b = quad(g, -xlim, xlim, limit=200)[0]
    return math.sqrt(a*a + b*b)

n = int(math.exp(xlim))
a, b, c = 0, 100, nbpts
t = [a+k*(b-a)/c for k in range(c)]
plt.ylim(0,0.2)
plt.grid(True)
plt.xticks(range(0,100,10), fontsize=6)
plt.plot(t, [abs(z(tt)) for tt in t])
plt.show()
```



Ci-dessus, on a utilisé l'équation (10) de l'article de 1947 de van der Pol. Ci-dessous, on peut approximer zeta dans la bande critique en utilisant l'équation (9) du même article et visualiser les 3 premiers zéros par exemple.

```
import time
import mpmath
import scipy.integrate as synt

def f(s,u): return -(u % 1) / u**(s+1)

def z(s):
     a, b, l = 0, 4, 100
     x = synt.quad(lambda u:f(s,u).real, a, b, limit=l)[0]
     y = synt.quad(lambda u:f(s,u).imag, a, b, limit=l)[0]
     return s*(x+1j*y)

tic=time.time()
mpmath.cplot(z, [0,1], [0,30], points = 2000)
tac=time.time()
print('temps coul : ', tac-tic, ' s.')
```