

Mathias est-il un ontologiste ? Saunders mcLane

Je suis heureux de constater qu'Adrian Mathias m'a pris à partie. Oui, j'ai donné autrefois une conférence au titre flamboyant : "La théorie des ensembles est obsolète." Dans celle-ci et dans quelques autres articles polémiques, j'ai violé l'un des principes cardinaux de l'activité mathématique : les mathématiciens ne font pas de déclarations ; ils démontrent des théorèmes. Mes excuses.

Mathias soutient également, à juste titre, qu'il existe au moins deux modes de pensée mathématique : le géométrique et l'arithmétique. Je doute que cela ait grand-chose à voir avec les deux hémisphères du cerveau, car j'y inclurais au moins deux autres modes : l'algébrique et l'analytique.

Mon "grand livre" (*Mathematics, Form and Function*, Springer, 1986) est censé, dit-on, présenter simplement "ma" vision des mathématiques. J'avais une ambition plus large. Les dix premiers chapitres tentent de résumer un grand nombre des constructions fondamentales des mathématiques, jusqu'aux variétés, à la mécanique, à l'analyse complexe et à la topologie, sous une forme qui pourrait être utile aux mathématiciens débutants, y compris ceux qui ne s'intéressent ni aux fondements, ni à l'ontologie, ni à la philosophie.

Ce sujet branlant qu'est celui des fondements apparaît ensuite au chapitre XI du livre, où je discute ZBQC (la théorie des ensembles de Zermelo avec quantificateurs bornés). Je soutiens que celle-ci correspond mieux à ce que font la plupart des mathématiciens, parce que leurs quantificateurs sont presque toujours bornés. Comme le note Mathias, ce système ZBQC ne suffit pas pour la détermination borélienne ni même pour une bonne théorie des ordinaux. Pour cela, il existe d'autres fondements. Mais je ne vois pas la nécessité d'un fondement unique - en un jour donné, il est rassurant de savoir quel peut être le fondement du jour - l'intuitionnisme, la logique linéaire ou autre chose étant laissés pour le lendemain.

Hier, lorsque j'ai écrit ce chapitre, je soupçonnais que l'approche de Kripke-Platek pourrait être utilisée d'une manière ou d'une autre. Je suis ravi de voir Mathias le proposer, et j'espère qu'il publiera ses résultats de cohérence relative. Les seules sources que j'ai trouvées hier sur KP étaient tellement enfouies dans les détails techniques que je n'ai pas réussi à entrevoir cette possibilité.

Incidentellement, ce fut l'une de mes premières critiques flamboyantes : les logiciens se sont trop isolés du reste des mathématiques et présentent souvent la technique et non la signification de leurs théorèmes. Je suis maintenant enclin à m'excuser auprès de mes amis logiciens - d'autres branches des mathématiques, y compris certains catégoriciens, sont encore plus isolées, et les géomètres algébriques sont des experts accomplis pour obscurcir leurs idées derrière des montagnes de technique.

Mathias semble affirmer que le fait de n'avoir qu'un seul fondement favorise l'unité des mathématiques. Je ne suis pas d'accord ; il reste vrai que la plupart des mathématiciens ne réfléchissent pas beaucoup aux fondements. La véritable unité est une bonne chose, et l'unité est favorisée davantage par les connexions transversales, en particulier les connexions inattendues. Par exemple, les théorèmes de cohérence catégorique pour les catégories tensorielles ont surgi dans la dualité de Tannaka pour les groupes, puis dans la théorie des champs conformes. De même, le forcing en théorie des ensembles s'est révélé lié à la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste, puis à la sémantique

de Kripke-Joyal pour les topos, et ensuite à la faisceautisation pour les topologies de Grothendieck. Cette dernière connexion me semble éclairante, mais elle est encore peu remarquée par les logiciens.

Dans ce cas, la négligence de cette remarquable connexion peut provenir du fait que les présentations catégoriques disponibles sont obscures. Un livre à paraître de Mac Lane et Moerdijk sur la théorie des topos servira, je l'espère, à rectifier cette situation.

Un dernier mot sur les fondements : mon titre tapageur “La théorie des ensembles est obsolète” visait à attirer l'attention sur cette observation remarquable de F. W. Lawvere : l'axiomatique pour les ensembles n'est plus la seule voie efficace vers un fondement - on peut plutôt partir d'axiomes sur les fonctions - c'est-à-dire sur la catégorie des ensembles.

Le dernier chapitre de mon “grand livre” traite de la philosophie des mathématiques, avec l'espoir de peut-être faire revivre ce domaine moribond. Ma première affirmation était que trop de philosophes des mathématiques prêtent trop peu d'attention à ce qu'il y a réellement dans les mathématiques. Cela s'applique en particulier à Wittgenstein et à Lakatos, mais pour l'instant je m'attaque à la plus grande cible vivante. Mon savant et éloquent ami Van Quine a affirmé que l'ontologie est servie par l'observation que “être”, c'est être quantifié existentiellement. Je ne suis pas d'accord, et je doute aussi que Van se rende compte que le quantificateur existentiel est un adjoint à gauche - une observation importante, là encore due à Lawvere.

Mon dernier chapitre tentait d'utiliser l'enquête antérieure sur le contenu du courant principal des mathématiques pour tirer quelques conclusions philosophiques. Aujourd'hui, je formulerais mon point de vue comme suit : les mathématiques sont cette branche de la science dans laquelle les concepts sont protéiformes : chaque concept ne s'applique pas à un seul aspect de la réalité, mais à plusieurs. Les nombres réels sont à la fois analytiques et géométriques, les nombres naturels sont à la fois cardinaux et ordinaux, et ainsi de suite dans de très nombreux cas. La forme mathématique s'adapte à des substances variées.

Ce point de vue, s'il est correct, a des conséquences. Par exemple, l'explication ensembliste familière de la paire ordonnée est une commodité et non une ontologie. La même idée est formulée différemment en observant qu'un produit $A \times B$ est quelque chose muni de projections vers les objets A et B qui sont “universelles” ; dans ce cas, la paire ordonnée a été engloutie par l'ordre syntaxique. De même, un nombre réel n'est pas une coupure de Dedekind ; cette coupure n'est qu'un modèle possible d'une idée protéiforme des réels.

Il y a longtemps, les mathématiciens ont reconnu que “l'Espace” n'était pas unique. Il y avait le plan euclidien et le plan hyperbolique, ainsi que les plans elliptiques. Aujourd'hui, il existe de nombreux types d'espaces - de Hausdorff, métriques, uniformes, etc. - chacun avec divers contacts avec différentes réalités. À peu près la même chose s'applique maintenant aux ensembles. Les notions surgissent diversement des ensembles finis, des ensembles infinis, des propriétés combinatoires des ensembles, des ensembles comme représentations extensionnelles de propriétés, et ainsi de suite. ZFC avait différents modèles. Mathias observe qu'un modèle d'ensembles est souvent interne par rapport à un autre. Je ne suis pas persuadé que cette circonstance plaide pour l'existence d'“Un univers énorme”. De toute évidence, ce que l'on a, ce sont différents univers, peut-être avec des

axiomes différents, et connectés les uns aux autres. Ces différences correspondent aux différents objectifs de la théorie des ensembles. De plus, les connexions par la relation de modèle interne peuvent être décrites plus clairement par la théorie des faisceaux en observant que le nouveau modèle peut consister en faisceaux pour un “site” approprié du modèle donné, et qu’alors il existe souvent un morphisme géométrique d’un modèle vers l’autre (pour la définition, Mac Lane-Moerdijk, loc. cit.). Cette vision des choses donne une meilleure compréhension parce qu’elle lie les relations entre différents modèles de la théorie des ensembles aux fonctions continues entre différents modèles de l’espace. Cela favorise l’unité des mathématiques.

Mathias demande : “Quel est donc l’ontologie de Mac Lane ?” Puisque les mathématiques sont protéiformes, je peux répondre facilement : l’ontologie a trait à la nature de la réalité en question. Chaque notion mathématique est protéiforme, donc traite de réalités différentes, et n’a donc pas d’ontologie.

En terminant, puis-je compter mes avantages. Vers 1940, lorsque Bertrand Russell donnait des conférences au colloquium de mathématiques à Harvard, j’étais en position de lui reprocher son ignorance des progrès des études des fondements des mathématiques. Dans les années 1970, lorsque j’étais membre du National Science Board, j’ai pu dire à mes collègues que Kurt Gödel était le plus grand logicien depuis Aristote ; peu après, Gödel reçut la National Medal of Science... J’admire les accomplissements de Gödel, mais je soupçonne qu’il est futile de se demander maintenant ce qu’il imaginait être le cardinal “réel” du continu. Ces spécialistes sérieux qui cherchent encore ce cardinal peuvent se rappeler cette image infâme du philosophe - un aveugle dans une cave sombre cherchant un chat noir qui n’est pas là.

La théorie des ensembles, comme le reste des mathématiques, est protéiforme, changeante et fonctionne de différentes manières pour différents usages. Elle est subordonnée aux mathématiques et non à leur fondement. L’unité des mathématiques est réelle et dépend de merveilleuses nouvelles connexions qui surgissent tout autour de nous. J’exhorte mes amis en logique à regarder autour d’eux.