Un extrait d'un texte de Lebesgue au sujet des exposants dans les primorielles et les factorielles

4. Théorème. *Sur la factorielle des nombres premiers.* [1]

Le produit

$$1.2.3.4\ldots.x = x!$$

est ce qu'on nomme une *factorielle*.

Le produit

$$1.2.3.4.5.7.11\ldots.p_x = Px$$

est la factorielle des nombres premiers.[2]

Par p_x, on indique le nombre premier qui approche le plus de x par défaut.

Le théorème suivant est dû à M. Tchebichef.

On a toujours

$$(a)\left\{\begin{array}{llll} x! = & P(x). & P\left(\dfrac{x}{2}\right). & P\left(\dfrac{x}{3}\right)\ldots \\[2ex] & P(\sqrt{x}). & P\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right). & P\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right)\ldots \\[2ex] & P(\sqrt[3]{x}). & P\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}\right). & P\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}\right)\ldots \\[2ex] & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

L'assertion ci-dessus ne correspond pas à celle que l'on trouve dans le texte de Tchebichef, dont une copie est ci-dessous : l'égalité est à considérer avec le logarithme de la factorielle, et non avec la factorielle elle-même.

Référence : http://www.numdam.org/item/NAM_1856_1_15__236_0.pdf.

Transcription : Denise Vella-Chemla, 5 décembre 2024

[1] On note la factorielle par le symbole utilisé aujourd'hui

[2] *Note de la transcriptrice : on ne sait pas s'il faut inclure, dans cette "primorielle", les puissances des nombres premiers, à cause du 4 ; on va supposer que le 4 est une coquille.*

Il n'est pas difficile de s'assurer que la fonction θ vérifie l'équation suivante :

$$\left.\begin{array}{l}
\theta(x)+\theta(x)^{\frac{1}{2}}+\theta(x)^{\frac{1}{3}}+\theta(x)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{3}\right)+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{4}\right)+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = \log 1.2.3\ldots[x],$$

Si l'on convient de représenter par $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$ l'entier égal ou immédiatement inférieur à la quantité positive $\frac{x}{\theta}$, on voit tout de suite que si θ est un nombre premier inférieur à x, l'exposant de θ dans le produit

$$P(x).P\left(\frac{x}{2}\right).P\left(\frac{x}{3}\right)\ldots$$

sera $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$.

L'exposant de θ dans le produit

$$P(\sqrt{x}).P\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\ldots$$

sera de même $e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)$.

Et ainsi de suite, de sorte que l'exposant de θ dans le second membre de l'équation (a) sera

$$e\left(\frac{x}{\theta}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^3}\right)\ldots,$$

qui, comme on le sait, est l'exposant de θ dans le produit $1.2.3.\ldots.x$.

Ce théorème a été introduit, je crois, dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, dont les traités élémentaires sont très substantiels.