Une interview de Lawvere au sujet des catégories

Vous avez écrit un article, publié pour la première fois en 1986, intitulé “Prendre les catégories au sérieux”[1] *Pourquoi devrions-nous prendre les catégories au sérieux ?*

Dans tous les domaines dans lesquels la théorie des catégories est activement utilisée, le concept catégorique de foncteur adjoint s’est avéré remplir un rôle-clé. Un tel instrument universel pour guider l’apprentissage, le développement et l’utilisation des mathématiques avancées est également indiqué dans des domaines tels que les mathématiques scolaires et au collège, dans les relations les plus basiques entre l’espace et le nombre, et dans les calculs basés sur ces relations. En disant “Prenez les catégories au sérieux”, je voulais exprimer le fait que l’on pourrait rechercher, cultiver et enseigner des exemples utiles de nature élémentaire.

La relation entre enseignement et recherche s’incarne en partie dans des concepts généraux simples qui peuvent guider l’élaboration d’exemples dans les deux cas. Les notions et les constructions, comme l’analyse spectrale des systèmes dynamiques, ont des aspects importants qui peuvent être compris et poursuivis sans les complications dues au fait de devoir limiter les modèles à des catégories spécifiques classiques. L’application de quelques concepts généraux simples de la théorie des catégories peut permettre de passer d’une clarification des constructions de base sur les systèmes dynamiques à une construction du système des nombres réels avec sa structure de catégorie fermée ; appliquée à cette catégorie fermée particulière, la théorie des catégories générale enrichie amène inexorablement aux théorèmes et notions de complétude de Cauchy, rotation, fermeture convexe, rayon et distance géodésique pour les systèmes métriques arbitraires. En fait, ces dernières notions se présentent elles-mêmes sous une forme telle que les calculs de l’analyse élémentaire et de la géométrie peuvent être explicitement guidés par l’expérience qui est concentrée dans le concept d’adjonction. Il semble certain que cette approche, combinée avec une application sobre de l’origine historique de toutes ces notions, pourra être appliquée à de nombreux exemples, unifiant ainsi nos efforts dans l’enseignement, la recherche et l’application des mathématiques.

Je crois également que nous devrions prendre au sérieux les précurseurs historiques de la théorie des catégories tels que Grassman, dont le travail est très clair, contrairement à sa réputation d’être obscur.

Pourriez-vous mentionner d’autres précurseurs historiques de la théorie des catégorie que Grassman, Emmy Noether et Heinz Hopf, que Mac Lane avait l’habitude de souvent citer ?

La méthode axiomatique implique de se concentrer sur les caractéristiques clés des applications courantes. Par exemple, Cantor s’est concentré sur le concept d’isomorphisme, qu’il a extrait du travail de Jakob Steiner en géométrie algébrique. La connexion entre Cantor et Steiner n’est pas mentionnée dans la plupart des livres ; il y a une malheureuse tendance dans les travaux standards d’histoire des sciences à perpétuer certains mythes, plutôt que de découvrir et clarifier les analyses conceptuelles. Le principe indispensable de “l’univers du discours” s’est raffiné dans l’idée de structure amenée par celle d’ensemble abstrait, impliquant de longues chaînes de raisonnement plus concevables par l’idée qu’“il n’y a rien dans la conclusion qui ne soit déjà dans les prémisses”. Cette vision a été développée par Dedekind, Hausdorff, Fréchet, et d’autres mathématiciens du 20ème siècle.

En plus des portraits des inventeurs de la théorie des catégories, Eilenberg et Mac Lane, la couverture de notre livre “Ensembles pour les Mathématiques”, écrit en collaboration avec Robert Rosebrugh, contient les portraits de Cantor et Dedekind.

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de la quantité dans l’espace et dans l’émergence de la qualité là-dedans. Les branches fondamentales, telles que la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique donne naissance aux deux grandes disciplines auxiliaires que sont la topologie algébrique et l’analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et la science des matériaux de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites dans le travail de Volterra. Comme noté par de Rham à l’adresse de Narasimhan, c’est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement a prouvé que l’opérateur dérivé extérieur satisfait $d^2 = 0$, mais il a également prouvé un théorème d’existence local auquel on fait habituellement référence de manière inexacte en l’appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent au

1. Revue Colombienne de Mathématiques 20 (1986) 147-178. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 8 (2005) 1-24 (version électronique).

cœur de la topologie algébrique comme cela s'exprime dans le théorème de De Rham et dans la cohomologie des faisceaux.

Habituellement, la catégorie codomaine d'un foncteur quantitatif sur X est une catégorie $\mathrm{Mod}(X)$ de structures linéaires dans X lui-même ; ainsi, c'est de façon plus basique la nature des catégories X des espaces, que de tels systèmes de nombres ont comme domaines, qui a besoin d'être clarifiée. En se concentrant sur les contributions de Volterra, Hadamard, Fox, Hurewicz et d'autres pionniers, nous arrivons à l'importante idée générale que de telles catégories devraient être des catégories cartésiennes fermées. Par exemple, l'axiome puissance ensembliste des ensembles est une manifestation de cette idée, en notant qu'elle n'est pas justifiée par les éléments afférents à la théorie ensembliste à propos de l'itération des ordinaux, des formules, etc., puisqu'elle doit, comme l'axiome d'infinité, carrément être supposée en plus. Hurewicz était, comme Eilenberg, un topologiste Polonais, et son travail sur les groupes d'homotopie, présenté lors d'une conférence à Moscou, était également pionnier ; sa conférence trop peu connue de 1949 sur les k-espaces, est le premier effort majeur, toujours utilisé par les topologues algébristes et par les analystes, de remplacer la catégorie par "défaut" des espaces topologiques par une catégorie fermée cartésienne plus utile.

En parlant de Volterra, cela me rappelle que vous avez énoncé un jour quelque part[2] *le travail du mathématicien portugais J. Sebastiao e Silva. Pourriez-vous nous en parler ?*

Silva a été l'un des premiers à reconnaître l'importance des espaces bornologiques comme un paradigme pour l'analyse fonctionnelle. Il a ainsi anticipé le travail de Waelbroeck sur l'analyse fonctionnelle lisse et a préparé le chemin pour le travail de Douady et Houzel sur le théorème de finitude de Grauert pour les fonctions propres des espaces analytiques. De plus, malgré mon peu de portugais, je discerne un hommage à la relation proche entre la recherche et l'enseignement dans un esprit que je partage.

Où la théorie des catégories prend-elle son origine ?

Le besoin d'unifier et de simplifier pour rendre cohérents certaines des avancées mathématiques des années 30 ont amené Eilenberg et Mac Lane à concevoir la théorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles au début des années 40. La théorie des catégories est apparue pour la première fois dans leur article GTNE[3], avec le besoin de guider les calculs compliqués nécessitant un passage à la limite dans l'étude du saut qualitatif séparant les espaces des objets homotopiques / homologiques. Depuis lors, la théorie est toujours utilisée pour ces problèmes mais également en géométrie algébrique, logique et théorie des ensembles, théorie des modèles, analyse fonctionnelle, physique du continu, combinatoire, etc.

Mac Lane est entré dans le domaine de la topologie algébrique par l'entremise de son ami Samuel Eilenberg. Ensemble, ils ont construit les célèbres espaces d'Eilenberg-Mac Lane, qui "représentent la cohomologie". Ce résultat plutôt technique de géométrie et algèbre nécessite en fait plusieurs avancées méthodologiques frappantes :

(a) la cohomologie est un "foncteur", une sorte de dépendance spécifique au changement de l'espace domaine ;

(b) la catégorie sur laquelle ces foncteurs sont définis a comme fonctions non pas les fonctions continues habituelles, mais plutôt les classes d'équivalences de telles fonctions, où les déformations arbitraires continues des fonctions servent à établir les équivalences ; et

(c) bien que dans toute catégorie, tout objet fixé K détermine un foncteur spécial "représentable" qui assigne, à tout X, l'ensemble $[X, K]$ des fonctions de X dans K, la plupart des foncteurs ne sont pas de cette forme et ainsi, il est remarquable que les foncteurs cohomologiques particuliers intéressants s'avèrent être isomorphes à $H^*(X) = [X, K]$ mais seulement pour la catégorie d'Hurewicz (b) et seulement pour les espaces K du type construit pour H^* par Eilenberg et Mac Lane.

Toutes ces avancées dépendaient des concepts de catégorie et foncteur, inventés aux alentours de 1942 par les collaborateurs. Même si la notion de catégorie elle-même avait été rendue explicite, ce résultat rendit apparent le fait que les catégories "concrètes", dans lesquelles les applications sont déterminées par leurs valeurs sur des points, ne suffisaient pas.

2. F. W. Lawvere, Volterra's functionals and covariant cohesion of space, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, serie II, 64 (2000) 201-214.

3. S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences (GTNE)*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945) 231-294.

Déjà dans GTNE, il fut noté qu'un ensemble préordonné est juste une catégorie avec au plus un morphisme entre toute paire donnée d'objets, et que les foncteurs entre deux telles catégories sont juste les applications préservant l'ordre ; à l'extrême opposé, un monoïde est juste une catégorie avec exactement un objet, et les foncteurs entre deux telles catégories sont juste des homomorphismes de monoïdes. Mais la théorie des catégories ne consiste pas simplement en une classification dans l'esprit de la métaphysique wolfienne (bien qu'un petit nombre de praticiens puissent faire cela) ; c'est plutôt la mutabilité des structures mathématiques précises (par les morphismes) qui est le contenu essentiel de la théorie des catégories). Si les structures sont elles-mêmes des catégories, cette mutabilité est exprimée par les foncteurs, alors que si les structures sont des foncteurs, la mutabilité est exprimée par les transformations naturelles.

Le New York Times, dans son éloge mortuaire d'Eilenberg en 1998 a complètement omis son rôle dans le développement de la théorie des catégories.

Oui, et l'injustice a été un peu moindre à l'occasion de l'hommage quand Mac Lane est décédé, lorsque le Times a rendu compte de son décès.

Dans une lettre au NYT en février 1998, écrite conjointement avec Peter Freyd, vous vous plaignez de cette omission notable. Dans cette lettre, vous insistez sur le fait que la "découverte d'Eilenberg-Mac Lane en 1945 de la théorie des transformations entre catégories mathématiques a fourni les outils sans lesquels les importantes collaborations de Sammy avec Steenrod et Cartan n'auraient pas été possible. Ce travail commun a également amené la base du travail pionnier de Sammy en informatique théorique ainsi que de nombreux développements dans la foulée en géométrie, algèbre, et au sujet des fondements des mathématiques. En particulier, la théorie d'Eilenberg-Mac Lane des catégories était indispensable au développement, en 1960, par le mathématicien français Alexander Grothendieck, de la forme puissante de la géométrie algébrique qui a été un ingrédient dans plusieurs avancées en théorie des nombres, incluant le travail de Wiles sur le théorème de Fermat". Pourriez-vous nous donner une large justification de la raison pour laquelle la théorie des catégories est si utile ?

Chaque jour des activités humaines comme construire une maison sur une colline, concevoir un réseau téléphonique, naviguer dans le système solaire, nécessite des plans qui sont corrects. Planifier de tels systèmes nécessite le développement de la pensée à propos de l'espace. Chaque développement nécessite de nombreuses étapes de pensée et beaucoup sont liées à des constructions géométriques sur des espaces. À cause de cette nature nécessairement multi-étapes de la pensée à propos de l'espace, seules des mesures mathématiques doivent être effectuées pour que le système soit fiable. Seuls des principes explicites de pensée (logique) et des principes explicites d'espace (géométrie) peuvent garantir une telle fiabilité. Cette grande avancée faite par la théorie inventée il y a 60 ans par Eilenberg et Mac Lane a permis de rendre les principes de la logique et de la géométrie explicites ; cela a été accompli en découvrant la forme commune de la géométrie et de la logique de telle manière que la relation entre les deux soit aussi explicite. Ils ont résolu un problème ouvert 2300 ans avant par Aristote avec ses recherches initiales pour rendre explicites les catégories et les concepts. Au $21^{\text{ème}}$ siècle, leur solution est applicable non seulement à la géométrie plane et au syllogisme médiéval, mais également aux espaces de transformations de dimension infinie, aux "espaces" de données, et à d'autres outils conceptuels qui sont appliqués des milliers de fois par jour. La forme des principes à la fois de la logique et de la géométrie ont été découverts par des catégoriciens pour reposer sur la "naturalité" des transformations entre les espaces et les transformations dans la pensée.

Quels sont vos souvenirs de Grothendieck ? Quand l'avez-vous rencontré pour la première fois ?

Je l'ai rencontré pour la première fois au Congrès International des mathématiciens à Nice en 1970 où nous étions tous les deux conférenciers invités. Je me suis publiquement montré en désaccord avec lui sur quelques points qu'il a présentés dans une conférence séparée sur son mouvement "Survivre", de telle façon qu'il m'appelait (j'espère affectueusement) le "principal contradicteur". En 1973, nous avons tous deux visité en même temps Buffalo, et je me rappelle de façon vivace le cours qu'il m'a donné sur les éclairages basiques de la géométrie algébrique comme "les points ont des automorphismes". En 1981, je lui ai rendu visite dans sa hutte de pierre, au milieu d'un champ de lavande dans le sud de la France, dans le but de lui demander son avis sur le projet de dériver le théorème de Grauert du théorème de Cartan-Serre, en démontrant ce dernier pour un espace analytique compact dans un topos général, puis en spécialisant au topos de faisceaux d'un espace paramètre. Certains ingrédients nécessaires étaient connus, par exemple le fait qu'un espace compact au sens interne devrait correspondre à une application propre vers l'espace paramètre de façon externe. Mais la preuve de ces résultats dépend classiquement de l'analyse fonctionnelle, de telle façon que la théorie des espaces bornologiques aurait dû être faite de façon interne pour réussir. Il a clairement reconnu qu'un tel développement dépendrait de l'utilisation d'un classifieur de sous-objets qui, comme il l'a dit, est l'un des quelques ingrédients de la théorie des topos qu'il n'avait pas prévus. Plus tard dans son travail sur l'homotopie, il a gentiment fait référence à cet objet comme à l'"élément de Lawvere". Ma dernière rencontre avec lui eut lieu au même endroit en 1989 (Aurelio Carboni m'a conduit là depuis Milan) : il était content de me voir, c'était clair, mais ne parlerait pas, à cause d'un vœu religieux ; il a écrit sur un papier qu'il n'avait pas le droit de discuter de mathématiques, bien que rapidement, son âme mathématique triomphe, me laissant avec quelques précieuses notes mathématiques.

Mais la réduction drastique du travail scientifique par un mathématicien aussi grand, due à sa rencontre avec un religieux puissant, est la cause d'une vigilance renouvelée.

Vous êtes né à Indiana. Y avez-vous grandi ?

Oui. On m'a parfois appelé "le fermier d'Indiana".

Vos parents avaient-il un intérêt pour les mathématiques ?

Non. Mon père était fermier.

Vous avez obtenu votre diplôme de premier degré de l'Université d'Indiana en 1960. Merci de nous en dire un peu plus sur votre éducation là-bas. Comment avez-vous appris les catégories ? Nous savons que vous avez commencé comme étudiant de Clifford Truesdell, un expert très connu de mécanique classique[4]

J'ai étudié à l'Université d'Indiana University de 1955 à janvier 1960. J'aimais la physique expérimentale mais je n'appréciais pas le raisonnement imprécis dans certains cours théoriques. Alors j'ai décidé d'étudier d'abord les mathématiques. Truesdell était au département de mathématiques mais il avait de grandes connaissances en physique de l'ingénierie. Il a pris là en charge mon éducation.

Eilenberg avait été un temps à Indiana, mais il était parti en 1947 quand j'avais 10 ans. Ce n'est donc pas d'Eilenberg que j'ai d'abord appris les catégories, ni de Truesdell qui avait abandonné son poste à Indiana en 1950 et qui en 1955 (et ensuite) m'avait conseillé de continuer mes études en mécanique continue et théorie cinétique. C'est un étudiant d'Indiana qui a insisté auprès de moi sur l'importance de la méthode galactique mentionné dans le livre de topologie de J. L. Kelley ; ça semblait trop abstrait au début, mais j'ai appris que "galactique" faisait référence à l'utilisation des catégories et des foncteurs et nous avons discuté de leur potentiel pour unifier et clarifier les mathématiques de toutes sortes. Durant l'été 1958, j'ai étudié la topologie dynamique avec George Whaples, avec comme objectif de la comprendre autant qu'il était possible en termes catégoriques. Quand Truesdell m'a demandé de donner des cours de plusieurs semaines pendant son cours d'Analyse fonctionnelle en 1958-1959, il devint vite apparent que toutes les explications très effectives de sujets tels que les anneaux de fonctions continues et la transformation de Fourier en analyse harmonique abstraite pourraient être fournies en rendant explicite leur fonctorialité et leur naturalité dans le sens précis d'Eilenberg-Mac Lane. En continuant d'étudier la mécanique statistique et la théorie cinétique, à un moment, je découvris le livre de Godement sur la théorie des faisceaux à la bibliothèque et je l'étudiai dans son intégralité. Toute l'année 1959, je développai de moi-même une pensée catégorique et je formulai des programmes de recherche sur l'"amélioration" (dont j'appris plus tard que Kan y avait travaillé plus complètement sous le nom de foncteurs adjoints) et sur les "clusters galactiques" (dont j'appris plus tard que Grothendieck les avait étudiés et appliqués sous le nom de catégories fibrées). Les catégories seraient certainement importantes pour simplifier les fondements de la physique continue. J'en conclus que je ferais de la théorie des catégories la ligne centrale de mes études. La littérature mentionne souvent quelques difficultés mystérieuses sur le fait de baser la théorie des catégories sur la théorie des ensembles traditionnelle : ayant eu un cours sur le livre de Kleene (également avec Whaples) et ayant apprécié de nombreuses discussions avec Max Zorn, dont le bureau était adjacent du mien, j'avais eu une compréhension initiale de la logique mathématique, et j'avais conclu que la solution au problème fondationnel serait de développer une théorie axiomatique de la catégorie des catégories.

Pourquoi avez-vous choisi l'université Columbia pour poursuivre vos études ?

4. C. Truesdell a été le fondateur du journal Archive pour la mécanique rationnelle et l'analyse et pour l'histoire des sciences exactes.

La décision de changer d'école pour le second cycle (avant même d'être diplômé) a nécessité quelques recherches. Quels étaient les experts en théorie des catégories et où donnaient-ils des cours sur ce sujet ? J'ai noté que Samuel Eilenberg apparaissait très fréquemment dans la littérature du domaine, à la fois comme auteur et comme co-auteur avec Mac Lane, Steenrod, Cartan, Zilber. Alors l'université de Columbia était le lieu logique où étudier. En consultant Clifford Truesdell à propos du changement de lieu en question, j'ai été ravi d'apprendre qu'il était un ami personnel de Samuel Eilenberg ; connaissant mon souhait, il appela personnellement Sammy pour faciliter mon entrée à Columbia, et j'envoyais rapidement des documents décrivant mes programmes de recherche à Eilenberg.

La bourse qui a financé ma dernière période à Indiana s'avéra transférable à Columbia. Le département mathématique de Columbia avait contracté un arrangement selon lequel tout étudiant boursier devrait également être assistant d'enseignement. Ainsi je devins assistant professoral pour le cours de calcul de Hyman Bass, i.e. le cours d'algèbre linéaire, jusqu'à janvier 1961.

Quand j'arrivai à New York en février 1960, ma première action a consisté à aller à la librairie française et à m'acheter un exemplaire personnel du Godement. Même si je n'ai pris qu'un cours, d'algèbre homologique, avec Eilenberg, et malgré le fait qu'Eilenberg soit très occupé cette année-là par ses obligations de directeur de département, je pus apprendre une grande partie des catégories de Dold, Freyd, Mitchell, Gray ; avec Eilenberg, je n'eus qu'une seule discussion mathématique sérieuse. Peut-être n'avait-il pas eu le temps de lire mes documents ; quoi qu'il en soit, ce fut un étudiant boursier, Saul Lubkin, qui alors que j'étais à Columbia depuis plusieurs mois, réalisa que ce que j'avais écrit avait déjà été travaillé en détail sous le nom de foncteurs adjoints, et, après avoir discuté avec Eilenberg à ce propos, il me donna une copie du papier de Kan.

En 1960, Eilenberg avait réussi à attirer au moins dix des plus grands contributeurs de la théorie des catégories à Columbia comme étudiants ou enseignants. Ces cours et discussions aidèrent naturellement à rendre plus précise ma conception de la catégorie des catégories, de même que le fit plus tard mon étude de la logique mathématique à Berkeley ; pourtant, la nécessité d'axiomatiser la catégorie des catégories était déjà évidente pour moi pendant que j'étudiais Godement à Indiana.

Quelques mois plus tard, alors que Mac Lane était en visite à New York, Sammy me présenta à Saunders, décrivant mon programme en plaisantant comme le programme surprenant des "ensembles sans points".

Dans son autobiographie[5]*, Mac Lane écrit "Un jour, Sammy me dit qu'il avait un jeune étudiant qui affirmait qu'il pouvait faire de la théorie des ensembles sans éléments. L'idée était difficile à comprendre, et il se demandait si je pourrais parler à l'étudiant en question. (...) Je l'ai écouté avec attention, pendant plus d'une heure. À la fin, j'ai tristement dit "Bill, ça ne marchera juste pas. Tu ne peux pas faire des ensembles sans éléments, désolé," et j'ai rapporté ce résultat à Eilenberg. La bourse d'études de Lawvere à Columbia ne fut pas renouvelée, et moi et ma femme quittâmes l'endroit pour nous installer en Californie."...*

...Je n'ai jamais proposé "des ensembles sans éléments" mais le slogan a causé de nombreuses incompréhensions pendant les 40 années suivantes parce que, pour une raison quelconque, Saunders aimait le répéter. Bien sûr, ce que mon programme rejetait, c'était plutôt l'idée d'appartenance comme une primitive, les idées mathématiquement pertinentes, à la fois d'appartenance, et également d'inclusion, étant des cas particuliers de l'unique divisibilité par rapport à la composition catégorique. Je défendais l'idée que la théorie des ensembles ne devrait pas être basée sur la notion d'appartenance, comme dans la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel, mais plutôt sur une structure invariante par isomorphisme.

À propos de l'autobiographie de Mac Lane, notez que quand Mac Lane l'a écrite, il avait déjà un certain âge, et selon sa femme et sa fille, il avait déjà eu plusieurs attaques cérébrales. Malheureusement, l'éditeur se rua chez l'imprimeur à l'occasion de son décès sans laisser sa femme et sa fille corriger les épreuves, comme cela leur avait été promis. Par conséquent, beaucoup de petits détails sont omis, par exemple le nom de famille du seul petit-fils de Mac Lane William, Coimbra qui devient Columbia[6], etc. Bien sûr, aucune mémoire de quiconque n'est si bonne qu'il ou elle puisse se souvenir de l'histoire d'un ou d'une autre précisément, et donc les principaux points concernant mes contributions et mon histoire

5. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.
6. Idem, ibidem, p. 351.

contiennent souvent des spéculations qui auraient dû être vérifiées par l'éditeur et l'imprimeur.

Par rapport à cet épisode, il est traité différemment dans le livre, mais dans une version plutôt condensée, amenant quelques incohérences. L'acceptation préliminaire de ma thèse par Eilenberg a été encouragée par Mac Lane qui agit comme un lecteur extérieur, et j'ai défendu ma thèse devant Eilenberg, Kadison, Morgenbesser et d'autres dans l'amphithéâtre Hamilton en mai 1963.

Vous avez étudié à Columbia de février 1960 à juin 1961, y retournant pour soutenir votre thèse en mai 1963. Entre temps, vous êtes allé à Berkeley et à Los Angeles. Pourquoi ?

Même si j'avais reçu un excellent enseignement en logique mathématique de Elliott Mendelson à Columbia, j'ai ressenti un fort besoin de recevoir davantage d'enseignements en théorie des ensembles et en logique de la part d'experts de ces domaines, toujours dans le but, bien sûr, de clarifier les fondements de la théorie des catégories et de la physique. Pour pourvoir à mes obligations financières familiales, et aussi du fait de mon profond intérêt pour l'enseignement mathématique, j'avais été embauché pendant les étés 1960 et 1961 par TEMAC, une branche de l'Encyclopedia Britannica, qui s'engageait à fournir des livres pour l'université en mathématiques modernes dans un nouveau format interactif pas à pas. En 1961, TEMAC construisit un nouveau bâtiment près de l'Université de Stanford dédié à ce projet. Du coup, mon changement de ville suivant n'était pas motivé par le fait d'avoir perdu une bourse, mais plutôt dans deux buts : dans le quartier de la baie, je pourrais habiter à Berkeley, suivre les cours de Tarski, Feferman, Scott, Vaught, et d'autres théoriciens des ensembles de haut niveau, et aussi me rendre à Palo Alto pour continuer à rédiger le livre que j'écrivais principalement à domicile.

Ma première destination en Californie n'était pas ce club de réflexion (think tank) auquel il est fait référence dans le livre de Mac Lane. Plutôt, comme ma progression dans l'écriture du second texte programmé n'était pas aussi rapide que TEMAC l'escomptait, je démissionnai de ce travail.

Un ami de cette époque à Indiana travaillait alors pour le think tank près de Los Angeles, et put les persuader de me donner un travail. Au début, j'ai compris que le travail impliquerait de concevoir des systèmes informatiques pour vérifier des accords possibles sur le contrôle d'armes ; mais quand j'ai finalement obtenu l'habiliation secret défense, j'ai découvert que d'autres sujets étaient impliqués, reliés à la guerre du Vietnam. Le compte-rendu qu'en fait Mac Lane est essentiellement correct concernant la manière dont mon ami mathématicien Bishop Spangler du think tank devint mon supérieur et me donna alors l'opportunité de finir ma thèse sur l'algèbre universelle catégorique. En février 1963, Dana Scott et F. William Lawvere voulaient vraiment me débaucher de mon travail à Los Angeles pour que j'aie un poste d'enseignement à Reed College. J'ai demandé à Eilenberg une lettre de recommandation. Sa réponse très brève fut que la requête de Reed irait dans sa poubelle à moins que ma série de résumés ne soient rapidement terminés à la hâte et remplacés par une vraie thèse. Cet amour vache eut l'effet escompté en quelques semaines. Ayant soutenu ma thèse en 1963, je pus quitter le think tank et réintégrer une vie normale de professeur assistant à Reed College l'année académique 1963-64. En route vers Portland, j'assistais à la rencontre de théorie des modèles en 1963 à Berkeley, où, en plus de présenter mon développement fonctoriel de l'algèbre générale, j'annonçais que les quantificateurs sont caractérisés comme des adjoints de substitution.

Ainsi vous avez passé l'année académique 1963-64 comme professeur assistant à Reed College.

À Reed j'appris que la première année de calcul devrait se concentrer sur les fondements, les formules étant enseignées en seconde année. Ainsi, malgré le fait que j'avais déjà décidé que la catégorie des catégories était le paradigme approprié pour les mathématiques en général, je passais les semaines préparatoires à essayer de définir un cours de calcul basé sur la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Pourtant une évaluation sommaire montra qu'il y avait bien trop de niveaux de définitions, occultant la différentiation et l'intégration de la hiérarchie cumulative, pour être capable d'intégrer ces niveaux en un an. La structure de catégorie des ensembles sans structure de Cantor semblait à la fois plus simple et plus fermée. Ainsi la théorie élémentaire de la catégorie des ensembles émergea d'un besoin purement pratique d'enseignement, dans une sorte d'expérience que Saunders explicita également ainsi : *le besoin d'expliquer quotidiennement des éléments à des étudiants est souvent la source de nouvelles mathématiques.*

Une théorie d'une catégorie des ensembles abstraits de Cantor a la même force en termes de preuves théoriques que la théorie de la catégorie des catégories et je l'avais déjà noté dans l'introduction de ma thèse. Plus objectivement, les ensembles peuvent être définis comme des catégories discrètes et inversement, les catégories peuvent être définies comme les diagrammes finis adaptés aux ensembles discrets, et les forces relatives peuvent ainsi être comparées. La catégorie des catégories doit être préférée pour la raison pratique que toutes les structures mathématiques peuvent être construites comme des foncteurs et dans le réglage effectif, il n'y a pas besoin de vérifier dans chaque instance qu'on a un foncteur ou une transformation naturelle.

Après Reed, j'ai passé l'été 1964 à Chicago, où j'ai réfléchi au fait que la théorie de Grothendieck des catégories abéliennes devrait avoir un analogue non-linéaire dont les exemples incluraient les catégories de faisceaux d'ensembles ; j'ai écrit quelques-unes des propriétés que de telles catégories devraient avoir et noté que, sur la base de mon travail sur les catégories d'ensembles, une telle théorie devrait avoir une autonomie plus grande que ne pouvait en avoir la théorie abélienne (c'est seulement durant l'été 1965 sur la plage de La Jolla que j'ai appris de Verdier que lui, Grothendieck et Giraud avaient développé une théorie complètement épanouie de tels “topos”, mais sans l'autonomie). Plus tard, à l'ETH à Zurich...

...où vous êtes resté de septembre 1964 à décembre 1966 comme chercheur scientifique en visite à l'Institut de mathématiques Beno Eckmann...

... là, j'ai été capable de simplifier davantage la liste des axiomes de la catégorie des ensembles dans un article que Mac Lane a alors communiqué aux Proceedings de l'Académie des sciences américaine. Là, j'ai aussi écrit pour publication le texte de la conférence “la catégorie des catégories comme fondement des mathématiques”, conférence que j'ai donnée aux premières Rencontres internationales sur la théorie des catégories à La Jolla, en Californie, en 1965.

Quels étaient les objectifs de votre théorie élémentaire des catégories d'ensembles ?

Elle était destinée à accomplir deux objectifs. D'abord, la théorie caractérise la catégorie des ensembles et les applications comme une catégorie abstraite dans le sens où n'importe quel modèle pour les axiomes qui satisfont l'axiome additionnel non élémentaire de complétude, au sens habituel de la théorie des catégories, peut être démontré comme équivalent à la catégorie des ensembles. Deuxièmement, la théorie fournit des fondements des mathématiques qui sont un peu différents des théories des ensembles habituelles au sens où beaucoup de théorie des nombres, d'analyse élémentaire, et d'algèbre peuvent apparemment être développées à l'intérieur de ces fondements même si aucune relation avec les propriétés habituelles de $\in$ ne peut être définie.

Philosophiquement, on peut dire que ces développements ont conforté la thèse selon laquelle même en théorie des ensembles et en mathématiques élémentaires, il était également vrai, comme cela avait été longuement ressenti en algèbre avancée et en topologie, que la substance des mathématiques ne réside pas dans la Substance, comme on semble vouloir le signifier lorsque $\in$ est le prédicat irréductible mais dans la Forme, comme cela est clair lorsque la notion guide est la structure à invariance par isomorphisme, comme cela est défini, par exemple, par les propriétés des applications universelles. Comme en algèbre et en topologie, ici à nouveau, la machinerie technique concrète pour l'expression précise et le traitement efficace de ces idées est fournie par la théorie des catégories d'Eilenberg-Mac Lane, des foncteurs et des transformations naturelles.

Retournons à Zurich.

À Zurich, j'ai eu de nombreuses discussions avec Jon Beck et nous avons collaboré sur les doctrines. Le mot “doctrine” lui-même est entièrement dû à Jon et signifie quelque-chose qui est comme une théorie, si ce n'est qu'il n'est pas approprié de l'interpréter dans la catégorie des catégories, plutôt que, par exemple, dans la catégorie des ensembles. Les “algèbres” pour une doctrine méritent d'être appelées “théories” parce qu'en les dualisant en une algèbre fixée, on définit un foncteur sémantique reliant des généralités abstraites et les généralités concrètes correspondantes. Jon insistait sur la clarté mathématique et fit beaucoup pour encourager la précision dans les discussions et dans la formulation des résultats mathématiques. Il remarqua que mon foncteur de structure adjoint à la sémantique est analogue à la définition de descente de cocycle de Grothendieck dans le sens où les deux expriment partiellement la structure qui surgit inévitablement quand des objets sont construits par un processus fonctoriel, qui, si on le suppose, aide à renverser le processus et à discerner l'origine. Implémenter cette notion générale philosophique de la descente nécessite le choix d'une “doctrine” appropriée de théories dans lesquelles la structure induite peut être exprimée.

C'est également depuis Zurich que j'assistais à un séminaire à Oberwolfach où je rencontrai Pierre Gabriel et où j'appris de lui de nombreux aspects peu connus même aujourd'hui de l'approche que Grothendieck avait de la géométrie. En général, l'atmosphère de travail au Forschungsinstitut était si agréable, que j'y suis retourné plus tard, pendant l'année académique 1968/69.

Comme professeur assistant à Chicago, en 1967, vous avez donné avec Mac Lane un cours de mécanique, où "vous avez commencé à penser à la justification de méthodes intuitives plus anciennes en géométrie"[7]. *Vous l'avez appelée la "géométrie différentielle synthétique". Comment êtes-vous parvenu au programme de dynamique catégorique et de géométrie synthétique différentielle ?*

De janvier 1967 à août 1967, j'étais professeur assistant à l'université de Chicago. Mac Lane et moi avons programmé d'enseigner un cours commun basé sur le livre de Mackey "Fondements mathématiques de la mécanique quantique".

Alors, Mackey, un analyste fonctionnel d'Harvard principalement concerné par les relations entre la mécanique quantique et la théorie des représentations, a un lien avec la théorie des catégories.

Ce lien à la théorie des catégories remonte bien plus loin que cela, comme me l'ont expliqué Saunders et Sammy. La thèse de Mackey fournit une pensée remarquable de nature catégorique, même si les catégories n'avaient pas encore été définies alors. De façon plus précise, le fait que la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues soient complètement plongées dans une catégorie d'appariement d'espaces vectoriels abstraits, avec la définition et l'utilisation de la "convergence de Mackey" dans une séquence "bornologique" d'espaces vectoriels ont été découvertes là et ont joué un rôle fondamental en quelque sorte dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle depuis. Ce qui n'est malheureusement pas clarifié dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle, c'est que ces concepts sont de nature intensivement catégorique et qu'un meilleur éclairage résulterait de cette clarification.

Et le referee qui, malgré un scepticisme initial, permit au premier article de donner une exposition à la théorie des catégories qui vit le jour dans le TAMS en 1945, n'était autre que George Whitelaw Mackey.

Pour revenir à l'origine de la géométrie différentielle synthétique, d'où les idées d'organiser un tel cours de mécanique sont-elles venues ?

Apparemment, Chandra avait suggéré que Saunders donne quelques cours en lien avec la physique, et notre cours commun était le premier de la série. Finalement Mac Lane donna un exposé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi à l'Académie navale à l'été 1970 qui fut publié dans le American Mathematical Monthly.

Dans ma série de cours avancés séparés, auquel a assisté mon étudiant d'alors Anders Kock, ainsi que Mac Lane, Jean Bénabou, Eduardo Dubuc, Robert Knighten, et Ulrich Seip, je commençais à appliquer la théorie des topos de Grothendieck que j'avais apprise de Gabriel au problème des fondements simplifiés de la mécanique continue comme cela avait été inspiré par les enseignements de Truesdell, l'axiomatisation de Noll, et par mes efforts en 1958 pour rendre catégorique le sujet de la topologie dynamique.

De ce que j'avais appris de Gabriel à Oberwolfach sur une vision de la géométrie algébrique comme étant un gros topos, ma contribution spécifique fut d'élever certains ingrédients, comme l'objet représentant le foncteur tangent d'une variété, au rang d'axiomes pour permettre que le développement se fasse sans encombre par une construction particulière. Cet ingrédient particulier n'avait apparemment jamais été remarqué précédemment dans la catégorie C-∞. Il a été immédiatement clair que le programme nécessiterait le développement, dans un esprit axiomatique similaire, de la théorie des topos dont j'avais entendu parlé en 1965 par Verdier sur la plage à La Jolla. En effet, mon recrutement à Chicago avait aussi été encouragé par Marshall Stone qui était enthousiaste à propos de mon observation en 1966 que la théorie des topos rendrait mathématique à la fois les modèles à valeurs booléennes en général, et l'indépendance de l'hypothèse du continu en particulier. Que ces topos apparemment totalement différents, impliquant des mouvements infinitésimaux et de la logique avancée, puissent faire partie d'une même théorie axiomatique simple était une promesse dans mon cours de 1967. Cela devint une réalité seulement après mon second séjour au Forschungsinstitut à Zurich, en Suisse en 1968-69, pendant lequel je découvris la nature du foncteur puissance ensembliste dans les topos comme un résultat de recherches sur le problème de l'expression en termes élémentaires de l'opération de formation du faisceau associé, et après 1969-1970 à

7. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.

l'niversité Dalhousie à Halifax, à Nova Scotia, au Canada, lors de ma collaboration avec Myles Tierney.

Vous êtes allé à Dalhousie en 1969 pour exercer l'un des premiers professorats Killam.

En effet, et cela me permit d'avoir une douzaine de collaborateurs selon mon désir, également financés par Killam.

Et c'est alors que vous êtes arrivé, avec le topologue algébriste Myles Tierney, au concept de topos élémentaire. Pourriez-vous nous décrire cette collaboration avec Myles Tierney ?

Myles présenta lors d'un séminaire hebdomadaire l'état courant du travail et en effet, une partie du travail consistait en discussions pendant le séminaire lui-même : les remarques d'étudiants comme Michel Thiebaud et Radu Diaconescu ont parfois été des étapes-clefs. Bien que j'aie été capable de me convaincre moi-même à Zurich, Rome et Oberwolfach, que l'axiomatisation finie de Myles Tierney et Dana Scott était possible, cela nécessita plusieurs étapes de simplifications successives pour parvenir aux quelques axiomes maintenant connus. Le critère de suffisance était qu'en étendant toute catégorie donnée qui satisfaisait les axiomes, il serait possible d'en créer d'autres au moyen de préfaisceaux et faisceaux. Le "théorème fondamental" des tranches fut suivi par notre découverte que les comonades exactes à gauche produisaient aussi des topos, fit plus que couvrir l'aspect préfaisceaux. Le concept de faisceaux amena à la conjecture que des sous-topos devraient être précisément paramétrés par certaines applications intérieures comme les classifieurs de sous-objets, et ceci fut vérifié ; ces applications intérieures sont maintenant connues sous le nom d'opérateurs modaux de Lawvere-Tierney, et correspondent classiquement aux topologies de Grothendieck. Le fait que la sous-catégorie correspondante de préfaisceaux puisse être décrite en termes finis est une caractéristique technique clef, qui a été achevée en rendant explicite le classifieur d'applications partielles. Le fait que la théorie soit élémentaire signifie qu'elle a des modèles dénombrables et d'autres caractéristiques qui la rendent applicable à des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et dans des récursions plus hautes, etc., mais d'un autre côté, la théorie de Grothendieck des U-topos est précisément incluse à travers sa propre technique de relativisation en même temps que des axiomes additionnels, tels que la décomposition en épimorphismes et la 2-valuation, sur U lui-même (en fait, ces axiomes additionnels sont positifs ou géométriques de telle façon qu'il y a un topos classifiant pour leurs modèles, un fait qui attend toujours d'être exploité par la théorie des ensembles.)

En 1971, la date officielle de la naissance de la théorie des topos, malheureusement, l'équipe de rêve à Dalhousie a été dispersée. Que s'est-il passé, qu'est-ce qui vous a fait partir au Danemark ?

Quelques-uns des membres de l'équipe et moi-même devînmes actifs contre la guerre du Vietnam et plus tard contre les mesures d'actions de guerre proclamées par Trudeau. Cet acte, similaire en plusieurs points au *Patriot Act* 35 ans plus tard aux États-Unis, suspendit les libertés individuelles sous prétexte d'un danger terroriste. (Le danger allégé à ce moment-là était un groupe au Québec qui se révéla être infiltré par le RCMP, la police secrète canadienne). Douze librairies du Québec (non reliées aux terroristes) furent brûlées par la police ; des activistes politiques de différents groupes à travers le Canada furent incarcérés en hôpitaux psychiatriques, etc. Je m'opposais publiquement à la consolidation de ces lois fascistes, à la fois au Conseil universitaire, et dans des démonstrations publiques. L'administration de l'université me déclara coupable de "rupture des activités académiques". Des rumeurs commencèrent à circuler, par exemple, sur le fait que mes diagrammes catégoriques étaient en fait des plans pour attaquer l'administration en construction. Mon contrat ne fut pas renouvelé.

Et après une courte période à Aarhus, vous êtes allé en Italie. Pourquoi ?

Les conditions à l'Institut mathématique étaient très agréables, et la collaboration avec Anders Kock était très fructueuse et appréciable. Pourtant, quand la longue nuit du nord a commencé, elle s'est avérée mauvaise pour ma santé, aussi j'ai accepté l'invitation de Perugia. J'apprécie encore de visiter le Danemark en été.

Après quelques années en Europe, vous êtes retourné aux États-Unis, à SUNY à Buffalo ...

John Isbell et Jack Duskin purent persuader le doyen que (contrairement au contenu d'un message envoyé par l'un des doyens de Dalhousie), je n'étais pas dangereux et je pourrais même être un atout.

Malgré votre retour aux USA, vous avez gardé un lien étroit avec la communauté mathématique italienne. En novembre 2003, il y a eu une conférence à Florence ("Ramifications de la théorie des catégories") pour célébrer les 40 ans de votre thèse [8]*. Pouvez-vous résumer les principales idées de celle-ci ?*

Les détails sont donnés dans mon commentaire pour la réimpression de TAC [9] (ces réimpressions constituent une excellente source d'autres ressources du début de la théorie des catégories). Le principal point était de présenter le traitement catégorique de la relation entre les théories algébriques et les classes d'algèbres, en incorporant les algèbres "universelles" précédentes de Birkhoff et Tarski d'une manière applicable aux cas spécifiques d'intérêt mathématique tels que traités dans les livres de Chevalley et de Cartan-Eilenberg. La redéfinition sans présentation à la fois des théories et des classes nécessitait une attention spécifique à la catégorie des catégories.

Lors de la conférence de Florence, il y a eu des exposés à la fois sur les mathématiques et sur la philosophie. Vous restez intéressé par la philosophie des mathématiques...

Oui. Parce que le but social le plus fondamental de la philosophie est de guider l'éducation et parce que les mathématiques sont un des piliers de l'éducation, en conséquence, les philosophes discutent souvent de mathématiques. Mais une philosophie moins spéculative basée sur la pratique réelle de la théorisation mathématique devrait finalement devenir un guide important pour l'éducation mathématique.

Comme Mac Lane l'a écrit dans son autobiographie, "L'aspect le plus radical est l'idée de Lawvere d'utiliser les axiomes de la catégorie des ensembles comme fondements des mathématiques. Cette idée attractive et opposée a, pour l'instant, trouvé peu d'écho dans la communauté des spécialistes de logique mathématique, qui ont tendance en général à supposer que tout a toujours commencé et commence toujours avec les ensembles". Avez-vous une explication de cette attitude ?

La tradition des 100 dernières années des "fondements comme justification" n'ont pas beaucoup aidé les mathématiques. Dans ma propre éducation, j'ai eu la chance d'avoir deux professeurs qui utilisaient le terme "fondements" *(ndlt : au sens de fondations)* dans son sens commun (plutôt que dans le sens spéculatif de la tradition Bolzano-Frege-Peano-Russell). Cette façon de penser s'illustre dans leur travail sur les fondements de la topologie algébrique, publiés en 1952 par Eilenberg (avec Steenrod), et les fondements mécaniques de l'élasticité et de la mécanique des fluides, publiés la même année par Truesdell. À chaque fois que j'ai utilisé le terme "fondements" dans mes écrits dans les quarante dernières années, j'ai explicitement rejeté une utilisation réactionnaire de ce terme et à la place utilisé la définition implicite dans le travail de Truesdell et Eilenberg. L'orientation de ces travaux semblait être de "concentrer l'essence de la pratique et en retour, d'utiliser les résultats pour guider la pratique". Notamment, un important composant de la pratique mathématique est l'étude précautionneuse de l'analyse historique et contemporaine, de la géométrie, etc. pour extraire les concepts récurrents essentiels ; rendre ces concepts et ces constructions (tels que ceux d'homomorphismes, de fonctions, de foncteurs adjoints, etc.) explicites fournit un guide puissant pour des développements avancés unifiés de tous les sujets mathématiques, anciens et nouveaux.

Pouvez-vous développer un peu à ce sujet ?

Quel est l'outil premier pour résumer l'essence des développements mathématiques ? L'algèbre ! Les points nodaux dans le progrès de la recherche adviennent dans les cas où un nombre fini d'axiomes pour la métacatégorie des catégories, tout ce que nous connaissons jusque-là, peut être exprimé dans une seule sorte d'algèbre. Je suis fier d'avoir participé avec Eilenberg, Mac Lane, Freyd, et de nombreux autres, à cette prise de conscience contemporaine de l'algèbre comme théorie des catégories. Si cette attention excessive donnée à la possibilité alléguée que les mathématiques soient inconsistantes, avec la dégradation qui l'a accompagnée du F-mot n'avait pas eu lieu au 20$^{\text{ème}}$ siècle, nous l'utiliserions encore selon le sens connu par le grand public : la recherche de ce qui constitue la "base". Nous, qui sommes supposés connaître l'algèbre explicite des homomorphismes, des fonctions, etc. avons trop longtemps négligé notre devoir de trouver des moyens d'enseigner ces concepts aussi dans l'enseignement secondaire.

Avoir reconnu dans les années 60 qu'il n'y a pas une "justification" platonique paradisiaque donnée pour les mathématiques, j'ai essayé de donner au mot "Fondements" des significations plus progressives

8. Sémantiques fonctorielles des théories algébriques, réimpression dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 5 (2004) 1-121 (version électronique)
9. Théorie et applications des catégories

dans l'esprit d'Eilenberg et Truesdell. C'est-à-dire que j'ai essayé d'appliquer la méthode vivante de l'axiomatique pour rendre explicites les caractéristiques essentielles d'une science et de la façon dont elle se développe pour aider à fournir un guide à l'utilisation, à l'enseignement, et plus consciemment au développement de la science. De "purs" fondements, qui se transforment en fondements qui oublient leur but et se mettent à devenir purement spéculatifs et centrés sur eux-mêmes, ne sont clairement PAS des fondements.

Les fondements se déduisent des applications par l'unification et la concentration, en d'autres termes, par la méthode axiomatique. Les applications sont guidées par les fondements qui ont été appris à travers l'éducation.

Vous êtes en train de dire qu'il y a une relation dialectique entre les fondements et les applications.

Oui. Toute théorie des ensembles digne de ce nom permet une définition des notions d'application, domaine, codomaine et composition ; c'est en termes de ces notions que Dedekind et plus tard d'autres mathématiciens ont exprimé des structures intéressantes. Par conséquent, tout modèle d'une telle théorie donne naissance à une catégorie et quelles que soient les fonctionnalités additionnelles compliquées qui peuvent être contemplées par la théorie, non seulement les propriétés mathématiques, mais également les propriétés les plus intéressantes "de théorie des ensembles", telles que l'hypothèse du continu, la finitude de Dedekind, l'existence des cardinaux inaccessibles d'Ulam, etc. dépendent seulement de cette simple catégorie.

Durant les quarante dernières années, nous sommes devenus familiers du fait que les fondements sont relatifs, non absolus. Je crois que même les clarifications les plus grandes des fondements ne seront terminées qu'en appliquant une concentration des applications de la géométrie vers l'analyse, c'est-à-dire en poursuivant la relation dialectique entre les fondements et les applications.

Plus récemment, vous avez donné les formulations algébriques de distinctions entre opposés telles que "unité vs. identité", quantités variables "extensives vs. intensives", catégories "spatiales vs. quantitatives"...

Oui, pour montrer qu'à travers l'utilisation de la théorie mathématique des catégories, de telles questions amènent non pas à des spéculations floues, mais à des conjectures mathématiques concrètes et à des résultats.

Cela a été une des caractéristiques de votre travail de creuser sous les fondements d'un concept pour simplifier sa compréhension. En cela, vous êtes vraiment un descendant de Samuel Eilenberg, dans son "insistance à aller à la racine des choses". Nous nous rappelons très bien d'un exposé que vous avez présenté à Coimbra à nos étudiants de premier cycle. Vous avez récemment publié deux opus d'articles[10]. *Pourquoi trouvez-vous important de dédier une partie importante de votre temps et de vos efforts à cela ?*

Beaucoup de mes publications de recherche sont le résultat de la longue étude de deux problèmes :
(1) Comment effectivement enseigner le calcul à des débutants ;
(2) Comment apprendre, développer et utiliser des suppositions en thermodynamique continue d'une manière qui soit rigoureuse, et encore simple.

En d'autres termes, les résultats eux-mêmes peuvent seulement être des blocs de construction d'une réponse à la question : "Comment pouvons-nous réaliser des étapes pédagogiques et concrètes, pour combler l'énorme fossé qui sépare la société du 20$^{\text{ème}}$ siècle du fait que :
(a) tout le monde doit utiliser la technologie qui s'appuie sur la science, qui dépend des mathématiques ; et également
(b) seules très peu de personnes ont une connaissance effective des concepts de base des mathématiques modernes comme les rétractions, les théorèmes de points fixes, les morphismes de graphes dirigés, et les systèmes dynamiques, les produits galiléens, les fonctionnelles, etc.".

Seulement armés de tels concepts, peut-on espérer répondre avec confiance à la myriade de méthodes, résultats et preuves qui dans le monde moderne sont associés aux mathématiques. Avec Stephen Schanuel, j'ai commencé à relever le défi de cette question dans notre livre Mathématiques conceptuelles qui reflète

10. F. W. Lawvere et R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003 ; F. W. Lawvere et S. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

le travail actuel de nombreux mathématiciens.

Quel est votre opinion concernant l'article de Wikipedia vous concernant ?

La désinformation de la version originale a été largement retirée, mais il en reste beaucoup dans d'autres articles de théorie des catégories.

Vous avez célébré récemment l'anniversaire des 100 ans de la naissance de Kurt Gödel. Que pensez-vous de la publicité extra-mathématique autour du théorème d'incomplétude ?

Dans *Arguments diagonaux et catégories fermées cartésiennes*[11], nous démystifions le théorème d'incomplétude de Gödel et la théorie de la définition de la vérité de Tarski en montrant que tous deux sont des conséquences d'une algèbre très simple dans le paradigme fermé-cartésien. Il a toujours été difficile pour beaucoup d'appréhender comment le théorème mathématique de Cantor pourrait être rebaptisé en "paradoxe" par Russell et comment le théorème de Gödel pouvait être si souvent déclaré résultat le plus significatif du 20$^{\text{ème}}$ siècle. Il y avait toujours de la suspicion parmi les scientifiques que de tels mouvements de publicité extra-mathématiques cachaient un plan pour ré-établir la croyance comme substitut de la science. Maintenant, une centaine d'années après la naissance de Gödel, les tentatives d'exploiter son grand travail mathématique dans un tel but sont devenus explicites[12].

Vous avez toujours été concerné par le fait d'expliquer comment décrire les règles mathématiques et les faits d'une manière catégorique. La théorie des catégories est-elle seulement un langage ?

Non, elle est plus qu'un langage. Elle concentre les fonctionnalités essentielles de siècles d'expérience mathématique et ainsi agit comme un guide indispensable pour les prochains développements.

Quelles ont été selon vous les contributions majeures que la théorie des catégories a apportées aux mathématiques ?

D'abord, le travail de Grothendieck dans son article Tohoku[13]. Les espaces nucléaires ont été l'une des grandes inventions de Grothendieck. D'ailleurs, Silva a travaillé beaucoup sur ces espaces et l'article de Grothendieck de 1953 sur les fonctions holomorphes[14] a été inspiré par un article de Silva de 1950[15].

Le concept de foncteurs adjoints, découvert par Kan dans le milieu des années 50, fut aussi une pierre de touche, rapidement incorporée comme un élément-clef des fondements de la géométrie algébrique par Grothendieck ainsi que dans les fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles.

Je peux aussi mentionner la fermeture cartésienne, l'axiomatisation de la catégorie des catégories, la théorie des topos,... Les catégories fermées cartésiennes sont apparues pour la première fois dans ma thèse, en utilisant cette dénomination. Le nom était apparu initialement dans un article de Kelly et Eilenberg[16]. Je ne suis pas exactement d'accord avec l'emploi du mot "Cartésien". Galilée est la véritable source, et non Descartes.

Vous êtes regardé par de nombreuses personnes comme l'un des grands visionnaires des mathématiques du début du vingt-et-unième siècle. Comment envisagez-vous le développement futur de la théorie des catégories au sein des mathématiques ?

Je pense que la théorie des catégories a un rôle à jouer dans la poursuite de la connaissance mathématique. Il est important de souligner que les théoriciens des catégories continuent de trouver des résultats surprenants malgré toutes les choses pessimistes que nous avons entendues, même il y a 40 ans, notam-

11. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 15 (2006) 1-13 (version électronique).
12. La fondation controversée John Templeton, qui a essayé d'injecter de la religion et de la pseudo-science dans la pratique scientifique, était le sponsor de la conférence internationale organisée par la Société Kurt Gödel Society en honneur des 100 ans de la naissance de Gödel. Cette fondation finance également un programme de bourses de recherche organisé par la Société Kurt Gödel.
13. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. 9 (1957) 119-121.
14. A. Grothendieck, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, I, J. Reine Angew. Math. 192 (1953) 35-64.
15. J. Sebastiao e Silva, *Analytic functions and functional analysis*, Portugaliae Math. 9 (1950) 1-130.
16. S. Eilenberg et G. M. Kelly, *Closed categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965), p. 421-562, Springer, 1966.

ment que les généralités abstraites n'avaient pas d'avenir. Nous continuons d'être surpris de trouver de surprenants nouveaux et puissants résultats ainsi que de trouver des exemples particuliers très intéressants.

Nous avons dû nous battre contre le mythe du courant dominant qui dit, par exemple, qu'il y a des cycles durant lesquels à un moment donné, tout le monde travaille sur des concepts généraux, et qu'à d'autres moments, tout le monde travaille sur les exemples particuliers, alors qu'en fait, les mathématiciens sérieux ont toujours fait les deux.

On ne devrait pas se saoûler de l'idée que tout est général. Les théoriciens des catégories devraient revenir à l'objectif initial : appliquer des résultats généraux à des particularités et trouver des connexions entre les différentes parties des mathématiques.

Francis William Lawvere (né le 9 février 1937 à Muncie, dans l'Indiana) est un mathématicien connu pour son travail en théorie des catégories, théorie des topos, logique, physique et philosophie des mathématiques. Il a écrit plus de 60 articles dans les domaines des théories algébriques et des catégories algébriques, de la théorie des topos, de la logique, de la physique, de la philosophie, de l'informatique, de la didactique, de l'histoire et de l'anthropologie, et a publié trois livres (dont l'un est traduit en italien et espagnol) et en a trois autres en préparation en ce moment. Il a également édité trois volumes de la série des Springer en mathématiques et a supervisé douze thèses. La série électronique *Réimpression de la théorie et des applications des catégories* inclut des réimpressions de sept de ses articles fondamentaux, avec commentaires de l'auteur, et parmi ceux-ci, on trouve sa thèse et son traitement complet de la catégorie des ensembles.

Au congrés international des mathématiciens en 1970 à Nice, il introduisit une version algébrique de la théorie des topos qui unifiait la géométrie et la théorie des ensembles. Écrite en collaboration avec Myles Tierney, cette théorie a depuis été développée plus avant par de nombreuses personnes, avec des applications à différents domaines des mathématiques. Deux de ces domaines avaient été précédemment introduits par Lawvere : (1) Ses cours en 1967 à Chicago (publiés en 1978) sur la dynamique catégorique ont montré comment des topos avec des objets infinitésimaux particuliers peuvent fournir un paradigme géométrique flexible pour les modèles de la physique continue, ce qui a amené un nouveau domaine connu sous le nom de Géométrie différentielle synthétique ; (2) Dans son exposé à Los Angeles en 1967, et dans ses articles de 1968 sur les hyperdoctrines et l'adjonction dans les fondements, Lawvere a initié et développé le domaine de la logique catégorique, qui a depuis été largement appliqué à la géométrie et à l'informatique. Ces idées étaient indispensables pour sa preuve simplifiée en 1983 de l'existence d'entropie en thermodynamique de systèmes non-équilibrés.

Bon nombre des publications de recherche de Lawvere résultent de ses efforts d'améliorer l'enseignement du calcul et de la thermodynamique pour l'ingénierie. C'est en particulier son cours en 1963 au Reed College sur les fondements du calcul qui a amené à son axiomatisation en 1964 de la catégorie des ensembles et finalement à la théorie élémentaire des topos.

Le professeur Lawvere a été élève de Clifford Truesdell et de Max Zorn à l'université d'Indiana et il a obtenu une thèse à Columbia en 1963 sous la supervision de Samuel Eilenberg. Avant de terminer sa thèse, il a passé une année à Berkeley en tant qu'étudiant informel en théorie des modèles et théorie des ensembles, suivant les cours d'Alfred Tarski et Dana Scott. En 1964-1966, il était chercheur-professeur visiteur au Forschungsinstitut mathématique à l'ETH de Zurich. Il a ensuite enseigné à l'université de Chicago, travaillant avec Mac Lane, et au Centre d'enseignement CUNY de New-York, travaillant avec Alex Heller. De retour à Zurich en 1968-69, il proposa des axiomes élémentaires (premier ordre) pour les topos généralisant le concept de topos de Grothendieck. L'université de Dalhousie en 1969 initia un groupe de chercheurs à financements Killam avec Lawvere à sa tête ; mais en 1971, le groupe fut arrêté à cause des opinions politiques de Lawvere (notamment son opposition à l'utilisation en 1970 de mesures d'actions armées).

Alors Lawvere alla à l'Institut mathématique de Aarhus (1971-72) et il créa un séminaire à Perugia, en Italie (1972-1974) où il travailla particulièrement sur différentes sortes de catégories enrichies. De 1974 jusqu'à sa retraite en 2000, il a été professeur de mathématiques à l'université de Buffalo, collaborant souvent avec Stephen Schanuel. Là il occupa une position de professeur sur une chaire Martin (1977-82).

Il a aussi été professeur visiteur de recherche à l'IHES à Paris (1980-81).

Il est maintenant Professeur émérite de mathématiques et Professeur adjoint émérite de philosophie à l'université d'état de New York à Buffalo et il continue à travailler à sa recherche de 50 années pour trouver un paradigme rigoureux et flexible pour les idées physiques de Truesdell et Walter Noll, utilisant la théorie des catégories.

Sa vision personnelle des mathématiques, basée sur une connaissance profonde et élargie des mathématiques et de la physique, continue d'influencer des mathématiciens et d'attirer des experts d'autres domaines des mathématiques. Cette influence a été très apparente dans la session d'honneur qui a eu lieu lors de la dernière conférence de théorie des catégories (Carvoeiro, Portugal, juin 2007), à l'occasion de son $70^{\text{ème}}$ anniversaire, lors de laquelle des hommages spontanés et intenses lui ont été témoignés à la fois par des chercheurs confirmés ainsi que par de jeunes chercheurs. En effet, en plus de ses extraordinaires qualités en tant que mathématicien, nous voulons témoigner du soin et des efforts qu'il a mis dans l'orientation d'étudiants et de jeunes chercheurs, dont nous avons eu confirmation lorsqu'il a donné une conférence de théorie des catégories à des étudiants de premier cycle, et à nouveau, dans les échanges que nous avons été très honorés d'avoir avec lui, lors de la préparation de cet entretien.