Traduction d'extraits de Mathématiques conceptuelles de F. William Lawvere et Stephen H. Schanuel, Cambridge University Press

Session 13 : Monoïdes

En général, pour complètement définir une catégorie, on doit spécifier quels en sont les *objets*, quelles en sont les *applications*, quel objet est le *domaine de chaque application*, quel objet est le *codomaine de chaque application*, quelle application est l'*identité de chaque objet*, et quelle est l'application *composée* de n'importe quelles applications "composables" - six choses à spécifier. Bien sûr, cela ne peut pas être fait de façon arbitraire. Rappelons les lois qui doivent être satisfaites :

lois comptables
lois associatives
lois d'identité

Voici un cas particulier. Supposons que nous n'ayons qu'un seul objet, que nous appelons "$*$". Cela signifie que toutes les applications dans la catégorie sont des applications intérieures (de cet objet unique). Néanmoins, il peut y avoir de nombreuses applications dans cette catégorie. Supposons que comme applications, on prenne tous les entiers naturels : 0 est une application, 1 est une application, 2 est une application, et etc. Ce sont toutes des applications de $*$ dans $*$, de telle façon que nous pouvons écrire

$$* \xrightarrow{0} *, \quad * \xrightarrow{1} *, \quad * \xrightarrow{2} *, \quad * \xrightarrow{3} *, \quad \text{etc.}$$

Que prendrons nous comme composition dans cette catégorie ? Les possibilités sont nombreuses mais celle que je choisirai est juste la multiplication. En d'autres mots, la composée de deux applications dans cette catégorie - deux nombres - est leur produit : $n \circ m = n \times m$. Parce qu'il n'y a qu'un seul objet, les lois comptables [1] sont automatiquement satisfaites.

Maintenant, nous devons spécifier l'application identité sur le seul objet, $*$. Quel nombre devrions-nous déclarer être 1_* ? Maintenant 1_* est supposé satisfaire $1_* \circ n = n$ et $n \circ 1_* = n$ pour tout nombre n, et selon notre définition de la composition, ces équations signifient juste que 1_* est un nombre qui multiplié par n'importe quel autre nombre n donne n. Par conséquent, le seul choix qu'on a est clair : l'identité de $*$ doit être le nombre un : $1_* = 1$.

Definition : *Une catégorie avec exactement un objet est appelée un* **monoïde**.

Une telle catégorie semble un peu étrange dans le sens où les objets semblent sans particularité. Pourtant, il y a des façons d'interpréter une telle catégorie dans les ensembles. Les objets prennent en quelque sorte vie. Appelons la catégorie que nous avons définie $\mathcal{M}$ pour multiplication. Une interprétation se notera ainsi :

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{S}$$

Une interprétation "interprète" le seul objet $*$ de $\mathcal{M}$ comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et chaque application dans $\mathcal{M}$ (un nombre naturel) est interprétée comme une application de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f_n} \mathbb{N}$$

définie par

$$f_n(x) = n \times x$$

Ainsi $f_3(x) = 3x$, $f_5(x) = 5x$, et etc. Selon cette définition, qu'est-ce que l'application f_1 ? Comment évalue-t-on cette application ? En multipliant par 1, n'est-ce-pas ? Du coup qu'est-ce que f_1 ?

1. (a) domaine et codomaine de l'identité 1_A d'une catégorie A sont tous les deux A ; (b)$g \circ f$ est seulement définie si le domaine de g est le codomaine de f ; (c) le domaine de $g \circ f$ est le domaine de f et le codomaine de $g \circ f$ est le codomaine de g.

Alysia : L'identité ?
C'est cela, $f_1 = 1_{\mathbb{N}}$. Aussi, la composée de deux applications $f_n \circ f_m$ est l'application qui évaluée en un nombre x donne

$$(f_n \circ f_m)(x) = f_n(f_m(x)) = n \times (m \times x) = (n \times m) \times x = (nm) \times x = f_{nm}(x)$$

ainsi nous concluons que

$$f_n \circ f_m = f_{nm}$$

Cela montre que cette interprétation préserve la structure de la catégorie, parce que les objets vont sur les objets, les applications vont sur les applications, la composition est préservée, et les applications identité vont sur les applications identité. Une telle interprétation "préservant la structure" d'une catégorie dans une autre est appelée un **foncteur** (de la première catégorie vers la seconde).

Un foncteur est vraiment nécessaire pour préserver toutes les notions de "domaine" et "codomaine", mais dans notre exemple, cela est automatique puisque toutes les applications ont le même domaine et le même codomaine.

Un tel foncteur est éclairant dans le sens où nous pouvons utiliser le symbole d'élévation à la puissance moins un comme une vaste généralisation de l'"inverse." Si nous changeons légèrement cet exemple, en prenant les rationnels plutôt que les entiers naturels comme applications dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, nous trouverons que $(f_3)^{-1} = f_{3^{-1}}$. L'application inverse d'une application dans la liste des interprétations est aussi un exemple d'application de la liste, ainsi si une application "nommée" est inversible, son inverse peut aussi être nommée. Dans l'exemple ci-dessus, f_3 est inversible et son inverse est nommée par l'inverse de 3.

Mais si les applications dans $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ consistent seulement en les entiers naturels, et si $*$ est interprétée comme l'ensemble des nombres rationnels, alors f_3 a un inverse, mais maintenant il n'y a pas d'entier naturel inverse de 3.

Danilo : Je peux voir que f_3 a une rétraction, mais pourquoi a-t-il une section [2] ?

Bien, la commutativité de la multiplication des nombres implique que $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n$. Toutes les applications de la liste sont-elles inversibles ?

Omer : Non, f_0 ne l'est pas.

C'est vrai. $f_0(x) = 0 \times x = 0$, du coup, de nombreux entiers différents ont pour image 0 ; f_0 n'est pas inversible.

Introduisons maintenant une autre catégorie que nous pouvons appeler $\boldsymbol{\mathcal{N}}$. C'est aussi un monoïde, de telle façon qu'elle n'aura aussi qu'un seul objet, à nouveau noté $*$. Les applications seront à nouveau les nombres, mais maintenant, la composition sera l'addition plutôt que la multiplication. Quel nombre sera l'identité de $*$? La condition qu'1_* doit satisfaire signifie que "en ajoutant 1_* à n'importe quel nombre n, on obtient n". Par conséquent, 1_* doit être 0. Donner un foncteur $\boldsymbol{\mathcal{N}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}$ signifie que l'on interprète $*$ comme un certain ensemble S et chaque application $* \xrightarrow{n} *$ dans $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ comme une application interne $S \xrightarrow{g_n} S$ de l'ensemble S, de telle façon que $g_0 = 1_S$ et $g_n \circ g_m = g_{n+m}$.

On peut prendre pour S un certain ensemble de nombres et définir

$$g_n(x) = n + x$$

En particulier, si on prend $S = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), par exemple le nombre 2 (comme application

2. Si $A \xrightarrow{f} B$, une rétraction de f est une application r de B dans A pour laquelle $r \circ f = 1_A$; une section de f est une application s de B dans A pour laquelle $f \circ s = 1_B$.

dans $\mathcal{N}$) peut être interprété comme l'application g_2 (dans $\mathcal{S}$) dont l'image interne est

$$g_2 = \boxed{\begin{array}{c} 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow \ldots \\ 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow \ldots \end{array}}$$

Maintenant nous devons vérifier que $g_{n+m}(x) = g_n(g_m(x))$, ce qui est similaire au cas précédent

$$g_n(g_m(x)) = n + (m + x) = (n + m) + x = g_{n+m}(x).$$

Tout ce qui a été présenté ci-dessus suggère un "exemple standard" d'interprétation d'un monoïde dans les ensembles, dans laquelle l'objet du monoïde est interprété comme l'ensemble des applications du monoïde lui-même. De cette façon, nous obtenons un foncteur standard de tout monoïde dans la catégorie des ensembles.

Il y a de nombreux foncteurs de $\mathcal{N}$ vers les ensembles autres que l'exemple standard. Supposons qu'on prenne un ensemble X avec une application interne α, et qu'on interprète $*$ comme X et qu'on envoie chaque application n de $\mathcal{N}$ (un entier naturel) sur la composée de α avec lui-même n fois, i.e. α^n, et pour préserver les identités, on envoie le nombre 0 sur l'application identité de X. De cette façon, on obtient un foncteur de $\mathcal{N}$ vers les ensembles, $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{S}$ qui peut être résumé ainsi :

1. $h(*) = X$,

2. $h(n) = \alpha^n$, et

3. $h(0) = 1_X$. (Il est raisonnable, pour un endomorphisme α d'un objet X, de définir le symbole α^0 pour signifier 1_X ; alors (3) devient un cas particulier de (2).)

Alors il est clair que $h(n + m) = h(n) \circ h(m)$.

De cette manière, à chaque fois qu'on spécifie un ensemble-avec-endomorphisme $X^{\circlearrowleft\alpha}$, on obtient une interprétation fonctorielle de $\mathcal{N}$ dans les ensembles. Cela suggère qu'un autre nom raisonnable pour $\mathcal{S}^{\circlearrowleft}$ devrait être spuissn.jpg pour suggérer qu'un objet est un foncteur de $\mathcal{N}$ vers $\mathcal{S}$. C'était la catégorie des systèmes dynamiques (appelés de façon plus appropriée "systèmes dynamiques à temps-discret"). Un système dynamique à temps-discret est juste un foncteur de ce monoïde $\mathcal{N}$ vers la catégorie des ensembles. Que serait un "système dynamique à temps continu" ?

Danilo : Remplaçons juste les entiers naturels par des nombres réels ?

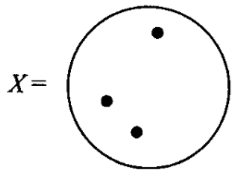
C'est cela. Autorisons tous les nombres réels comme applications dans le monoïde. Alors, donner un foncteur de ce nouveau monoïde $\mathcal{R}$ vers les ensembles revient à donner un ensemble X et un endomorphisme $X^{\circlearrowleft\alpha_t}$ pour chaque nombre réel t. Pour préserver la composition, nous devons nous assurer qu'$\alpha_0 = 1_X$, et que $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t$. Nous pouvons penser à X comme à l'ensemble des "états" d'un système physique qui, s'il est dans l'état x à un certain instant, alors t unités de temps plus part sera dans l'état $\alpha_t(x)$.

(p. 338 (fin de la section 31) et sections suivantes) La discussion ci-après donne une brève introduction à l'algèbre des parties. Cette algèbre a reçu un large développement, spécialement dans l'étude du comportement des opérateurs logiques quand l'objet dans lequel les parties vivent varie lui-même selon une application, et dans les études (en analyse fonctionnelle et en topologie générale) des parties d'objets-applications. L'algèbre logique développée sert d'outil auxiliaire utile dans l'étude du contenu central des mathématiques, qui est la variation des quantités dans l'espace ; en effet, c'est une forme particulière de cette variation, connu sous le nom de faisceau, qui a amené à la première découverte, par A. Grothendieck en 1960, de la classe des catégories connues sous le nom de topos. Ainsi le mot grec *topos* signifiant lieu ou situation a été adopté pour signifier un mode de cohésion ou variation (d'une sorte) de catégorie.

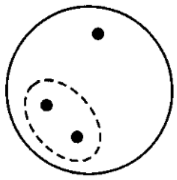
Session 32 : Sous-objets, logique, et vérité

1. Sous-objets

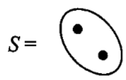
Nous allons trouver un objet remarquable qui relie les **sous-objets**, la **logique**, et la **vérité**. Que souhaite-t-on dire par sous-objet, ou partie d'un objet ? Supposons que nous ayons un ensemble abstrait tel que



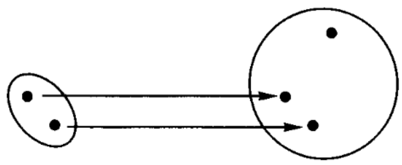
et que nous regardions certains de ses éléments, par exemple ceux indiqués sur la figure



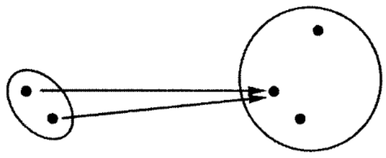
Ils constituent ce qu'on appelle une *partie* de l'ensemble X. Ce concept de “partie” comprend deux ingrédients. D'abord, une partie a une *forme*, qui dans cet exemple est un ensemble S avec précisément deux éléments



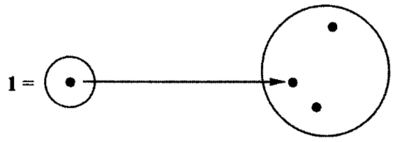
mais cela n'a pas de sens de dire que S lui-même est une partie de X, parce qu'il y a différentes parties de X qui ont la même forme. Ainsi, un second ingrédient est nécessaire pour déterminer une partie de X : une application d'“inclusion” qui indique la façon particulière dont l'ensemble S est inséré dans X :



Une partie de X (de forme S) devrait par conséquent être une application de S dans X. Mais il y a beaucoup d'applications de S dans X (dans l'exemple ci-dessus il y en a précisément $3^2 = 9$) et nous ne souhaiterions pas appeler la plupart d'entre elles parties, par exemple



Il y a une partie de X qui provient de cette application, mais ce n'est pas une partie de forme S ; c'est une application de $\mathbf{1}$ dans X, notamment



Qu'est-ce qu'une application $S \longrightarrow X$ devrait satisfaire pour être appelée une "application d'inclusion" ?

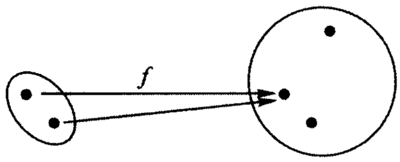
Définition : *Dans toute catégorie, une application $S \xrightarrow{i} X$ est une* ***inclusion****, ou* ***monomorphisme*** *si elle satisfait la condition suivante*

Pour tout objet T et toute paire d'applications s_1, s_2 de T dans S

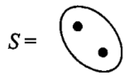
$$is_1 = is_2 \text{ implique } s_1 = s_2.$$

D'autres mots sont possibles à la place d'"inclusion" ou d'"application d'inclusion", ce sont : "application non-singulière", particulièrement dans les ensembles, "application injective" et "application un-un (bijective)". Il y a une notation spéciale pour indiquer qu'une application $S \xrightarrow{i} X$ est une inclusion ; plutôt que d'écrire une flèche droite comme $\longrightarrow$, on met un petit hameçon, $\subset$, à son bout, ainsi $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$ pour indiquer qu'i est une application d'inclusion.

Selon notre définition, l'application



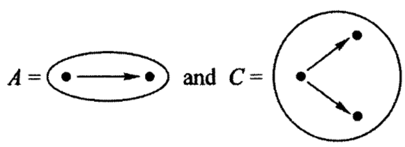
est non injective parce qu'il y a deux applications *différentes* d'un ensemble vers



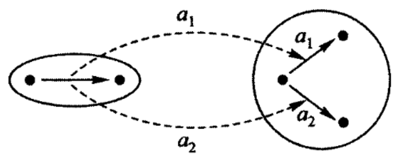
qui composées avec f donnent le même résultat (en fait, dans ce cas particulier, il est même vrai que toutes les applications de *n'importe quel* ensemble donné vers S donne le même résultat quand on les compose avec f).

Un bon exemple d'une application d'inclusion dans les ensembles est l'application qui assigne à chaque étudiant de la classe, la chaise qu'il occupe. (Pour que ça soit une application, tous les étudiants doivent être assis, et c'est une application d'inclusion s'il n'y a pas de personnes assises sur les genoux d'autres !). Dans cet exemple, on peut prendre pour S l'ensemble de tous les étudiants de la classe et X l'ensemble de toutes les chaises de la classe. L'exemple illustre que le même ensemble S peut recouvrir différentes parties de l'ensemble X, parce qu'un autre jour, les étudiants peuvent s'asseoir à d'autres places et ainsi déterminer une partie différente de l'ensemble des chaises. Ainsi, une partie de X n'est pas spécifiée juste par un autre ensemble, mais par un autre ensemble avec une application d'inclusion de cet ensemble vers X.

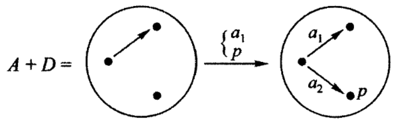
Pour un exemple dans la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\downdownarrows}$ de graphes non-réflexifs, considérons les graphes



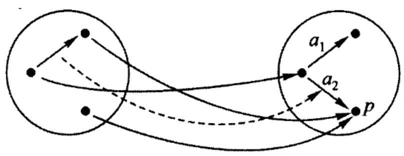
Nous pouvons voir deux parties différentes de *sous-graphes* de C de forme A :



bien sûr, a_1 et a_2 sont seulement deux des nombreux sous-graphes qu'a C. Un autre sous-graphe est spécifié par



Noter que l'application $\begin{cases} a_2 \\ p \end{cases}$ de $A + D$ vers C, i.e.



ne donne pas un sous-graphe parce qu'elle est non injective.

2. Vérité

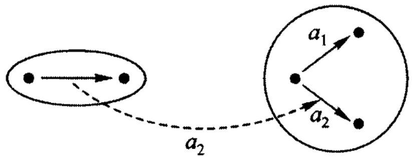
Laissez-moi illustrer que si vous avez une partie de X et que vous choisissez n'importe quel élément particulier ou n'importe quelle figure particulière dans X, cet élément ou cette figure peut être déjà inclus(e) dans la partie. Comment cette idée peut-elle être exprimée juste en fonction des applications et de la composition ? Supposons que nous ayons une figure $T \xrightarrow{x} X$ et que nous ayons une partie $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$. Si l'on revient à l'exemple des étudiants et des chaises ci-dessus, x peut être juste une chaise particulière. Alors pour demander si cette chaise x est incluse dans la partie des chaises déterminée par l'assoiement des étudiants consiste juste à demander si la chaise x est occupée, et cela, en retour, consiste juste à demander s'il y a une application f pour remplir le diagramme

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[dr, "x"] & \\ S \arrow[rr, hook, "i"] & & X \end{tikzcd}$$

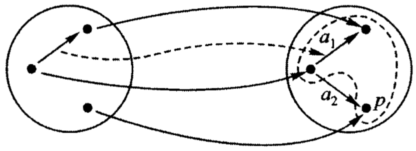
notamment, une application f telle que $i \circ f = x$. L'injectivité de i implique qu'il peut seulement y avoir au plus une application f qui "prouve" que la chaise x est occupée, ce qui signifie qu'elle est incluse dans la partie S, i.

Dans l'exemple ci-dessus où la figure $T \xrightarrow{x} X$ est juste un point de l'ensemble des chaises, l'objet T est terminal, mais nous devons souligner que T peut être n'importe quel objet, puisque le même concept s'applique à des figures arbitraires de n'importe quelle forme.

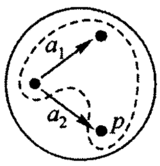
Comme exemple dans la catégorie des graphes, nous pouvons prendre les applications que nous avions précédemment ; comme figure x, on prend



et comme partie S, i, on prend

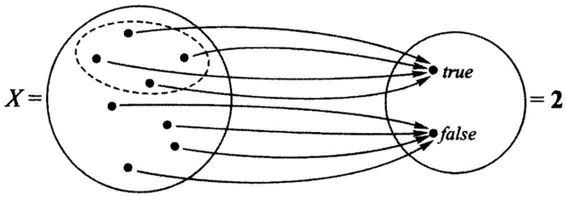


et maintenant, on demande : Est-ce que la flèche a_2 de X est incluse dans la partie S, i ? La réponse à cette question est clairement “non”. C’est évident sur la figure



et on peut aussi vérifier qu’aucune des applications de A vers $A + D$ composée avec i ne donne x. Pourtant, on ne peut éviter le sentiment que cette réponse ne rend pas complètement justice à la question, parce que bien que la figure a_2 ne soit pas dans le sous-graphe indiqué de X, à la fois sa source et son but le sont. Ainsi, il y a un certain degré de vérité dans l’assertion qu’a_2 est incluse dans le sous-graphe S, i ; ce n’est pas complètement faux. Cela suggère qu’il est possible de définir différents degrés de vérité appropriés pour la catégorie des graphes, de manière à pouvoir rendre complètement justice en répondant à de telles questions.

Revenons à la catégorie des ensembles et voyons quelle est la situation là. Si nous avons une partie d’un ensemble et un point dans cet ensemble, et que quelqu’un dit que le point est inclus dans la partie, il n’y a que deux niveaux possibles de vérité à cette assertion : elle est soit vraie, soit fausse. Ainsi, dans la catégorie des ensembles, l’ensemble à deux éléments $\mathbf{2} = \{vrai, faux\}$ a la propriété suivante (au moins pour les points x, mais en fait pour les figures de n’importe quelle forme) : Si X est un ensemble et $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est n’importe quel sous-ensemble de X, il y a exactement une fonction $\varphi_s : X \longrightarrow \mathbf{2}$ telle que pour tout x, x est inclus dans S, i si et seulement si $\varphi_s(x) = vrai$.



Ainsi, une fois que nous avons choisi un point $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \mathbf{2}$, nous avons une correspondance un-un

$$\frac{parties\ de\ x}{applications\ X \longrightarrow \mathbf{2}}$$

En particulier, cela nous autorise à compter le nombre de parties de X, qui est égal au nombre d’applications de X vers $\mathbf{2}$, et celui-ci, en retour, est égal au nombre de points de $\mathbf{2}^X$.

Étant donnée une partie d’un ensemble X, disons $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$, son application correspondante $X \xrightarrow{\varphi_s} \mathbf{2}$ est appelée l’application *caractéristique* de la partie S, i, puisqu’au moins φ_s caractérise les points de X qui sont inclus dans la partie S, i comme les points x tels que $\varphi_s(x) = vrai$. En réalité, l'application φ_s fait bien plus que ça puisque, comme indiqué ci-dessus, cette caractérisation est valide pour toutes sortes de figures $T \xrightarrow{x} X$ et non seulement pour des points ; la seule différence est que quand T n'est pas l'ensemble terminal, nous avons besoin d'une application $vrai_T$ de T dans $\mathbf{2}$ plutôt que d'une application $vrai : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$. L'application $vrai_T$ n'est rien d'autre que la composée de l'unique application $T \longrightarrow \mathbf{1}$ dans $vrai : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "true_T"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "true"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

Pour résumer : La propriété fondamentale de l'application caractéristique φ_s est que pour *toute* figure $T \xrightarrow{x} X$, x est incluse dans la partie S, i de X si et seulement si $\varphi_s(x) = vrai_T$.

3. L'objet valeur-de-vérité

Voyons maintenant comment faire quelque chose de similaire dans la catégorie des graphes. Donner une partie d'un objet X dans cette catégorie (i.e. donner un sous-graphe d'un graphe X) revient à donner une partie S, de l'ensemble des flèches de X, et une partie S_D de l'ensemble des points de X tels que la source et la cible de chaque flèche dans S_A est un point dans S_D :

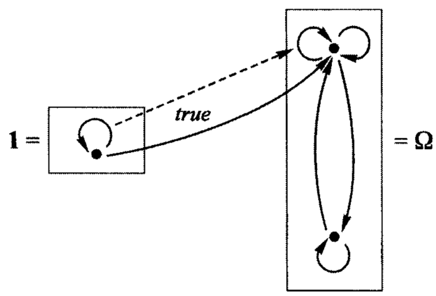
$$\begin{tikzcd} S_A \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & arrows\,(X) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S_D \arrow[r, hook] & dots\,(X) \end{tikzcd}$$

Maintenant nous avons besoin d'un graphe qui joue le même rôle pour les graphes que celui que joue l'ensemble $\mathbf{2}$ pour les ensembles. Nous voulons un graphe Ω, ainsi qu'un point spécifié $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$, avec les propriétés suivantes : les applications de n'importe quel graphe X vers Ω doivent correspondre aux parties de X

$$\frac{S \hookrightarrow X}{X \xrightarrow{\varphi_S} \Omega}$$

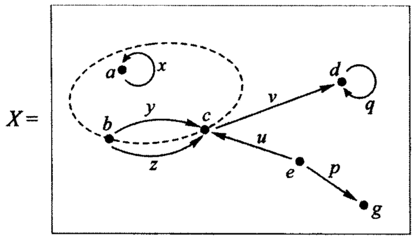
de telle manière que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$ de X, $\varphi_S s = vrai_T$ si et seulement si x est inclus dans la partie S. Si une telle paire Ω et $1 \xrightarrow{vrai} \Omega$ existe, elle est caractérisée de manière unique par la propriété ci-dessus. Ce sera un bonus surprenant que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$, l'application $T \xrightarrow{\varphi_S x} \Omega$ nous dise le "niveau de vérité" de l'assertion que x est inclus dans la partie donnée S.

Par chance, un tel objet pointé existe dans la catégorie des graphes et c'est le suivant $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$:

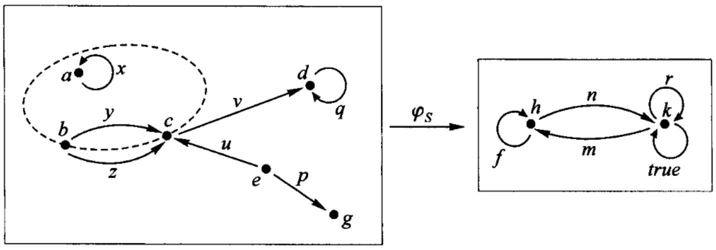


Ce graphe Ω joue parmi les graphes le rôle que l'ensemble $\mathbf{2}$ joue parmi les ensembles. Il y a cinq flèches et deux points dans Ω, qui représente les différents degrés de vérité qu'une assertion peut prendre. (Ici nous considérons des assertions de la forme "une certaine figure est incluse dans un certain sous-graphe"). Ces sept éléments représentent les sept relations possibles dans lesquelles un élément de X (flèche ou point) peut entretenir avec un certain sous-graphe de X (il y a cinq possibilités pour une flèche et deux pour un point). Ce sont les suivantes

(a) Pour les flèches
1. La flèche est en effet incluse dans le sous-graphes. Des exemples de cela sont les flèches x et y, par rapport au sous-graphe indiqué du graphe suivant.

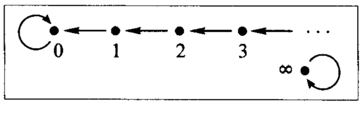


2. La flèche n'est pas dans le sous-graphe, mais sa source et sa cible sont une flèche z dans le graphe ci-dessus).
3. La flèche n'est pas dans le sous-graphe et sa source non-plus, mais sa cible l'est (e.g. la flèche u ci-dessus),
4. La flèche n'est pas dans le sous-graphe ni sa cible, mais sa source l'est (e.g. la flèche v ci-dessus).
5. La flèche n'est pas dans le sous-graphe et ni sa source ni sa cible non plus (e.g. les flèches p et q ci-dessus).
Pour les points
1. Le point est dans le sous-graphe (e.g. les points a, b, et c ci-dessus.)
2. Le point n'est pas dans le sous-graphe (e.g. les points d, e, et g dans la figure dessinée ci-dessus).
Ainsi, dans l'exemple expliqué ci-dessus, l'application caractéristique de la partie indiquée est la suivante

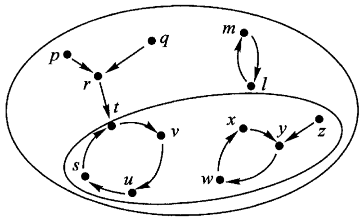


définie sur les flèches comme $\varphi_S(x) = \varphi_S(y) = vrai, \varphi_S(z) = r, \varphi_S(u) = n, \varphi_S(v) = m, \varphi_S(p) = f$ et $\varphi_S(q) = f$ (et similairement sur les points).

La catégorie des systèmes dynamiques a aussi un objet valeur-de-vérité Ω ; il est surprenant qu'il y ait un nombre infini d'éléments ou de "valeurs-de-vérité", et cet objet n'est pas l'ensemble des nombres naturels avec l'endomorphisme *successeur*, c'est plutôt l'opposé à cela dans le sens où la dynamique va dans la direction opposée. On voit cet objet des valeurs-de-vérité dans la catégorie des systèmes dynamiques sur le dessin suivant :



L'explication de cela est qu'un sous-système est la partie d'un système dynamique qui est fermée sous la dynamique et si vous prenez un état x et demandez si x est inclus dans le sous-système, la réponse peut être "non, mais il le sera dans une étape", ou dans deux étapes, etc. Par exemple, considérons le système sous-dynamique indiqué ci-dessous :



Si on demande si l'état p est dans le sous-système, la réponse est "Non, mais oui après deux étapes", alors que la même question à propos de m a comme valeur-de-vérité ∞, "toujours faux".

Ainsi pour chaque état dans le système complet, l'assertion exprimant qu'il est dans le sous-système a une valeur définie dans Ω ; cette valeur n'est $vrai = 0$ que pour huit des états.

DANILO : Que dire du cas d'un élément qui quitte le sous-système ?

Nous parlons ici de systèmes sous-dynamiques, i.e. d'applications d'inclusions dont les domaines sont aussi des objets dans la catégorie des systèmes dynamiques. Ainsi les éléments ne "quittent" jamais ; le cas intéressant est qu'ils pourraient entrer depuis le système plus grand. Nous pouvons, bien sûr, considérer les *sous-ensembles* de l'ensemble d'états sous-tendant un système dynamique donné.

Il y a, en fait, un *système dynamique* plus grand $\hat{\Omega}$ que nous pourrions appeler l'espace des "valeurs-de-vérité chaotiques" avec la propriété que les applications $X \xrightarrow{\varphi} \hat{\Omega}$ des systèmes dynamiques correspondent à ces sous-ensembles arbitraires de X ; seulement ces φ qui appartiennent à $\Omega \hookrightarrow \hat{\Omega}$ correspondent à des sous-systèmes réels. Il y a des "opérteurs modaux" $\hat{\Omega} \rightrightarrows \Omega$ qui relient tout sous-ensemble A d'un X quelconque au plus petit sous-système de X contenant A et au plus grand sous-système qui est contenu dans A.

L'espace d'applications Ω^Y de l'objet valeur-de-vérité a comme points les parties de Y, comme cela sera discuté dans la prochaine et dernière section. Dans de nombreuses catégories, cela permet d'obtenir une clarification plus grande de la construction du co-égaliseur d'une relation d'équivalence $X \rightrightarrows Y$.

Session 33 : Parties d'un objet : Topos

1. Parties et inclusions

Dans la session précédente, nous avons utilisé l'idée d'inclusion, qui est à la base de la vérité et de la logique ; maintenant nous allons la considérer plus en détail. La logique (dans un sens étroit) concerne en premier lieu les les sous-objets ; l'importante chose concernant les sous-objets est la manière dont ils sont reliés, et les relations les plus basiques sont données par les applications d'une certaine catégorie.

Si X est un objet donné d'une catégorie $\mathcal{C}$, alors, comme nous l'avons déjà expliqué, nous pouvons former une autre catégorie $\mathcal{C}/X$: un objet de $\mathcal{C}/X$ est une application de $\mathcal{C}$ de codomaine X, et une application d'un objet $A = (A_0 \xrightarrow{\alpha} X)$ vers un objet $B = (B_0 \xrightarrow{\beta} X)$ est une application de $\mathcal{C}$de A_0 vers B_0 qui fait correspondre β à α, i.e. une application $A_0 \xrightarrow{f} B_0$ telle que $\beta f = \alpha$

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B_0 \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bien sûr, nous obtenons une catégorie, parce que si nous avons une autre application

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\beta"'] & & C_0 \arrow[dl, "\gamma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

i.e. $\gamma g = \beta$ alors gf est aussi une application dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}/X$ puisque $\gamma(gf) = \alpha$;

$$\gamma(gf) = (\gamma g)f = \beta f = \alpha.$$

Nous voulons définir une partie de cette catégorie, notée par $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}/X$ qui est appelée *la catégorie des parties de* X. Les *objets* de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$ sont tous des objets α de $\boldsymbol{\mathcal{C}}/X$ qui sont des *applications d'inclusions dans* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, i.e. les objets de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$ sont les parties ou sous-objets de X dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Les applications de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$ sont toutes les applications entre ses objets dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}/X$; mais comme nous l'avons noté dans la dernière session, étant donnés deux objets $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$ et $B_0 \xrightarrow{\beta} X$ dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$, il y a *au plus une* application $A_0 \xrightarrow{f} \beta_0$ dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ telle que $\beta f = \alpha$

Si la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ a un objet terminal $\mathbf{1}$, alors nous pouvons former la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{C}}/\mathbf{1}$, mais elle s'avère n'être rien d'autre que $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, puisqu'elle a un objet pour chaque objet de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ (une application $A_0 \longrightarrow \mathbf{1}$ ne contient pas plus d'information que le seul objet A_0 de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$) et ses applications sont précisément les applications de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Par conséquent, la catégorie des parties de $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{1})$, est une sous-catégorie de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, précisément la sous-catégorie déterminée par ces objets A_0 dont l'unique application $A_0 \longrightarrow \mathbf{1}$ est injective. Ainsi, alors qu'un sous-objet d'un objet général X implique à la fois un objet A_0 et une application $A_0 \xrightarrow{\alpha} X$, quand $X = \mathbf{1}$, seul A_0 a besoin d'être spécifié, de telle façon qu'"être une partie de $\mathbf{1}$" peut être regardé comme étant une *propriété* de l'objet A_0, plutôt qu'une *structure* additionnelle α.

Comme exemple de la catégorie des parties d'un objet terminal, on peut considérer les parties de l'ensemble terminal d'une catégorie d'ensembles. Les objets de cette catégorie sont tous les ensembles dont l'application vers l'ensemble terminal est injective. Pouvez-vous donner un exemple d'un tel ensemble ?

DANILO : L'ensemble terminal lui-même.

Oui. En fait, dans n'importe quelle catégorie, toutes les applications dont le domaine est un objet terminal sont injectives. Et une application d'un objet terminal vers un objet terminal est même un isomorphisme. Un autre exemple ?

FATIMA : L'ensemble vide.

Oui. La seule application $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ est aussi injective parce que n'importe quelle application de domaine $\mathbf{0}$ est injective : pour tout ensemble X, il y a au plus une application $X \longrightarrow \mathbf{0}$ et par conséquent, il n'est pas possible de trouver deux applications différentes $X \longrightarrow \mathbf{0}$ qui composées avec l'application $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$ donnent le même résultat. Y a-t-il d'autres ensembles dont l'application vers l'ensemble terminal est injective ? Non. Par conséquent, la catégorie des parties ou des sous-ensembles de l'ensemble terminal est très simple : elle a seulement deux objets non-isomorphes $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, et seulement une application en plus des identités. Elle peut être dessinée ainsi

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}}$$

Dans cette catégorie, il est habituel d'appeler les deux objets $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ respectivement *faux* et *vrai*, ce qui fait que (1) peut aussi être dessiné ainsi

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{1}) = \boxed{faux \longrightarrow vrai}$$

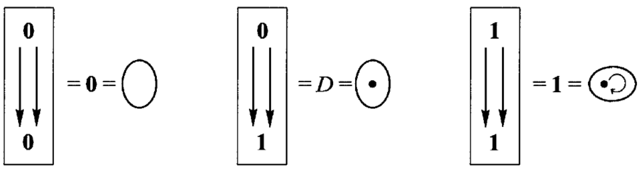
Qu'en est-il de la catégorie des graphes $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\downarrow\downarrow}$? Quelle est la catégorie des parties de l'objet terminal dans cette catégorie ? Pour répondre à cela, nous devons commencer par déterminer ces graphes X de telle façon que l'unique application $X \longrightarrow \mathbf{1}$ vers le graphe terminal soit injective. Pour cela, il est utile de se rappeler qu'un graphe, c'est deux ensembles (un ensemble de flèches et un ensemble de points) et deux applications,

$$\boxed{\begin{tikzcd} \textit{arrows} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ \textit{dots} \end{tikzcd}}$$

et que pour le graphe terminal, les deux ensembles sont des singletons, de telle façon que nous devons trouver les différentes possibilités pour les ensembles *flèches* et *points* pour lesquels la seule application de graphes

$$\begin{tikzcd} \textit{arrows} \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \mathbf{1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ \textit{dots} \arrow[r, "f_D"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

est injective. Cela signifie (exercice) que les deux applications d'ensembles f_A, et f_D doivent être injectives, chacun des ensembles *flèches* et *points* doit être soit vide soit avoir un seul élément. Ainsi, tout sous-graphe du graphe terminal est isomorphe à l'un de ces trois graphes :



Ces trois graphes et les applications entre eux forment une catégorie qui peut être dessinée ainsi

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{0} \longrightarrow D \longrightarrow \mathbf{1}}$$

Les graphes $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ sont aussi appelés respectivement "*faux*" et "*vrai*", de telle façon que nous pouvons écrire

$$\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \boxed{faux \longrightarrow D \longrightarrow vrai}$$

Ici le graphe D représente une valeur de vérité intermédiaire qui peut être interprétée comme "vrai pour les points mais faux pour les flèches".

Les réponses que nous obtenons pour "les parties de $\mathbf{1}$" semblent familières, parce que nous les avons déjà vues précédemment : l'application $X \longrightarrow \mathbf{1}$ est injective si et seulement si X est idempotent.

Comme cela a été souligné au début de cette session, étant donnés deux objets $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$, et $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ dans $\mathcal{P}(X)$, il y a au plus une application $A \xrightarrow{f} B$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\beta f = \alpha$. Ainsi, la catégorie des parties d'un objet est très spéciale. Pour n'importe quels objets au nombre de deux, il y a au plus une application du premier vers le second. Une catégorie qui a cette propriété est appelée un *pré-ordre* ou un *poset* (pour ensemble pré-ordonné). Ainsi, *la catégorie des sous-objets d'un objet donné dans n'importe quelle catégorie est un poset.*

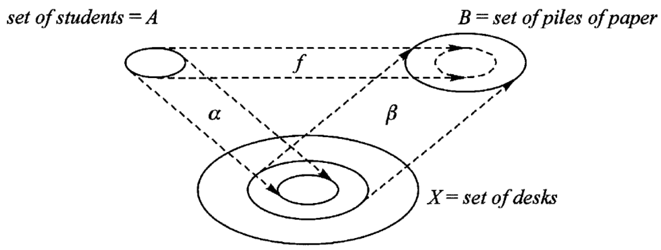
Par conséquent, pour connaître la catégorie des sous-objets d'un objet donné X, nous avons seulement besoin de savoir, pour chaque paire de sous-objets de X, s'il y a ou s'il n'y a pas d'application du premier vers le second. Pour indiquer qu'il y a une application (nécessairement unique) d'un sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ vers un sous-objet $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$, nous utilisons souvent la notation

$$A \subseteq_X B$$

(lire : A est *inclus* dans B sur X) ; le "A" est une abréviation pour "la paire A, α", et similairement pour B. Le "X" en indice est destiné à nous rappeler cela.

FATIMA : Pouvez-vous expliquer l'inclusion d'une partie dans une autre avec un diagramme ?

Oui. Supposons que sur certains bureaux de la classe, il y ait des piles de papiers. Si B est l'ensemble des piles de papiers, nous avons l'application injective de B vers l'ensemble des bureaux, appelons-la $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$. Nous avons aussi une application injective α de l'ensemble A des étudiants vers l'ensemble X des bureaux, chaque étudiant occupe un bureau. Maintenant, supposons que chaque étudiant a une pile de papiers, et qu'il puisse aussi y avoir des piles de papiers sur des bureaux non-occupés. Alors le diagramme des deux inclusions est le suivant :



qui montre que les bureaux occupés par les étudiants sont inclus dans les bureaux sur lesquels il y a une pile de papiers. La raison ou la "preuve" pour cette inclusion est une application $A \longrightarrow B$ (affectant à chaque étudiant la pile de papiers sur son bureau) telle que $\beta f = \alpha$. Cette application est la (seule) preuve de la relation $A \subseteq_X B$.

DANILO : Mais si chaque pile de papier appartient à un étudiant, l'application évidente est de B vers A, affectant à chaque pile de papier son propriétaire.

Oui, nous aurions alors une application $B \longrightarrow A$, mais elle pourrait ne pas être compatible avec les inclusions α et β de A et B dans X ; en général $\alpha g = \beta$.

DANILO : Alors on devrait dire "si f existe".

Tout à fait ! C'est ce qui importe. Une telle application f peut ne pas exister, mais il ne peut y en avoir plus d'une puisque β est à part.

D'un autre côté, dans quelques cas, l'application g peut aussi être dans la catégorie $\mathcal{P}(X)$; i.e. elle peut être compatible avec α et β ($\alpha g = \beta$). Si tel est le cas, il est aussi vrai que

$$B \subseteq_X A$$

Alors, en fait, les applications f et g sont inverses l'une de l'autre, de telle façon que A et B sont des objets isomorphes ; et plus que ça : $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ et $B \overset{\beta}{\hookrightarrow} X$ sont des objets isomorphes dans $\mathcal{P}(X)$. Ainsi, nous avons :

$$\text{Si } A \subseteq_X B \text{ et } B \subseteq_X A \text{ alors } A \cong_X B.$$

Que signifie un isomorphisme de sous-objets ? Supposons que le vendredi et le lundi, les étudiants des ensembles d'étudiants F et M occupent exactement les mêmes chaises dans la classe. Alors nous avons deux applications différentes vers les ensembles de chaises, mais elles sont isomorphes :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & M \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Puisque entre deux sous-objets isomorphes, il n'y a qu'un seul isomorphisme, nous les traitons comme le "même sous-objet".

L'idée d'une chaise occupée peut être exprimée de la façon suivante : supposons que l'on ait un sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ et une figure $T \xrightarrow{x} X$ (qui n'est pas supposée être injective). Dire que x est dans le sous-objet $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ (écrit $x \in_X A$) signifie qu'il existe un $T \xrightarrow{a} A$ pour lequel $\alpha a = x$. Maintenant, puisque α est injective, il y a au plus un a, ce qui prouve que $x \in_X A$. Par exemple, si Danilo s'assoit sur cette chaise, alors Danilo est la preuve que cette chaise est occupée. Selon la définition ci-dessus, si on a $x \in A$ et $A \subseteq B$ (le X étant compris) alors nous pouvons conclure que $x \in B$, dont la preuve n'est rien d'autre que la composée des applications $T \xrightarrow{a} A \xrightarrow{i} B$ prouvant respectivement $x \in A$ et $A \subseteq B$.

La propriété ci-dessus (si $x \longrightarrow A$ et $A \subset B$ alors $x \longrightarrow B$) est parfois prise comme la *définition* de l'inclusion, à cause du résultat suivant : si pour tous les objets T et toutes les applications $T \xrightarrow{x} X$ telles que $x \in A$ it is vrai that $x \in B$, alors nécessairement $A \subseteq B$.

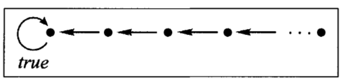
2. Topos et logique

Il est clair de ce qui précède qu'on peut discuter de la catégorie $\boldsymbol{\mathcal{P}}(X)$ et des relations $\subseteq$, $\in$ dans n'importe quelle catégorie $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, mais la structure "logique" est beaucoup plus riche pour ces catégories connues sous le nom de *topos*.

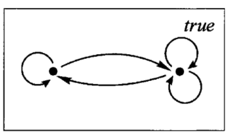
Définition : *Une catégorie* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est un topos si et seulement si :
1. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ a $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, x, +, et pour tout objet X, $\boldsymbol{\mathcal{C}}/X$ a des produits.
2. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ a des objets applications Y^X, et
3. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ a un "objet valeur-de-vérité" $\mathbf{1} \longrightarrow \Omega$ (également appelé "classifiant de sous-objets").

La plupart des catégories que nous avons étudiées sont des topos : les ensembles, les graphes irréflexifs, les systèmes dynamiques, les graphes réflexifs. (Les ensembles pointés et bipointés ne sont pas des topos, puisque le fait d'avoir des objets applications implique la distributivité.)

Nous avons vu à la session précédente que l'objet valeur-de-vérité dans la catégorie des ensembles est $\mathbf{2} = vrai, faux$, alors que ceux des systèmes dynamiques et des graphes irréflexifs sont respectivement



and



La propriété définissant un objet valeur-de-vérité ou un sous-objet classifiant $\mathbf{1} \xrightarrow{vrai} \Omega$ était que pour tout objet X, les applications $X \longrightarrow \Omega$ sont "les mêmes" que les sous-objets de X. Cette idée est abrégée symboliquement en

$$\frac{X \longrightarrow \Omega}{? \hookrightarrow X}$$

Cela signifie que pour chaque sous-objet, $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ de X, il existe exactement une application

$$X \xrightarrow{\varphi_A} \Omega$$

ayant la propriété que pour chaque figure $T \xrightarrow{x} X$, $\varphi_A(x) = vrai_T$ si et seulement si la figure x est incluse dans la partie $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} X$ de X.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\
& X \arrow[r, "\varphi_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

La conséquence de l'existence d'un tel objet est que tout ce qu'on peut dire à propos des sous-objets d'un objet X peut être traduit en des énoncés à propos des applications de X vers Ω.

Quelle est la relation entre cela et la logique ? On peut considérer le produit $\Omega \times \Omega$ et définir l'application $\mathbf{1} \xrightarrow{(vrai,vrai)} \Omega \times \Omega$. Elle est injective parce que toute application dont le domaine est terminal est injective ; par conséquent, c'est vraiment un sous-objet et il a une application classifiante, ou application caractéristique $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$. Cette application classifiante est l'opération logique "*et*", notée de différentes façons comme "&" et "$\wedge$". La propriété de cette opération est que pour tout $T \xrightarrow{a} \Omega \times \Omega$, disons $a = \langle b, c \rangle$ où b et c sont des applications de T vers Ω, l'application composée

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend right, "b \wedge c"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(qui est habituellement notée $b \wedge c$ plutôt que $\wedge \circ \langle b, c \rangle$, exactement comme on écrit $5 + 3$ plutôt que $+ \circ \langle 5, 3 \rangle$) a la propriété que $b \wedge c = vrai_T$ si et seulement si $\langle b, c \rangle \in \langle vrai, vrai \rangle$, qui signifie précisément : $b = vrai_T$ et $c = vrai_T$.

Maintenant, comme b est une application dont le codomaine est Ω, par la propriété définissant Ω, elle doit être application classifiante d'un sous-objet de T, $B \hookrightarrow T$. De la même façon, c est l'application classifiante de quelques autres sous-objets, $C \hookrightarrow T$, et le sous-objet classifié par $b \wedge c$ est appelé l'*intersection* de B et C.

Une autre opération logique est l'"implication", qui est notée "$\implies$". C'est aussi une application $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, définie comme l'application classifiante du sous-objet $S \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ déterminé par toutes ces $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $\Omega \times \Omega$ telles que $\alpha \subseteq \beta$.

Il y a une troisième opération logique appelée "*ou*" (disjonction) et notée "$\vee$", et il y a des relations au niveau des opérations $\wedge$, $\implies$, $\vee$, qui sont complètement analogues aux relations parmi les opérations catégoriques $\times$, objet application, et $+$. Rappelez-vous que ces relations étaient

$$\frac{X \longrightarrow B_1 \times B_2}{X \longrightarrow B_1, X \longrightarrow B_2} \qquad \frac{X \longrightarrow Y^T}{T \times X \longrightarrow Y} \qquad \frac{B_1 + B_2 \longrightarrow X}{B_1 \longrightarrow X, B_2 \longrightarrow X}$$

Les cas particuliers parmi ceux-ci dans la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des sous-objets de X sont les règles de logique suivantes :

$$\frac{\xi \subseteq \beta_1 \wedge \beta_2}{\xi \subseteq \beta_1 \text{ et } \xi \subseteq \beta_2} \qquad \frac{\xi \subseteq (\alpha \implies \eta)}{\xi \wedge \alpha \subseteq \eta} \qquad \frac{\beta_1 \vee \beta_2 \subseteq \xi}{\beta_1 \subseteq \xi, \beta_2 \subseteq \xi}$$

La règle du milieu est appelée *règle d'inférence du modus ponens.*

Fatima : La dernière ne devrait-elle pas dire "ou" plutôt que "et" ?

Non. Pour que la disjonction "$\beta_1 \vee \beta_2$" soit incluse dans ξ, il est nécessaire qu'à la fois β_1 ET β_2 soient inclus dans ξ. C'est une autre manifestation du fait que les produits sont plus basiques que les sommes. La conjonction "et" est réellement un produit, elle est encore nécessaire dans le but d'expliquer la disjonction "ou", qui est une somme.

Un élément remarquable à propos de l'application classifiante d'un sous-objet est que bien que le sous-objet soit juste déterminé par les éléments sur lesquels l'application classifiante prend la valeur "*vrai*", l'application classifiante assigne aussi de nombreuses autres valeurs aux éléments restant.

Ainsi, ces autres valeurs sont en quelque sorte déterminées justement par ces éléments sur lesquels l'application prend la valeur "*vrai*".

Il est aussi possible de définir une opération de négation ("non") par

$$non\ \varphi \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi \implies faux]$$

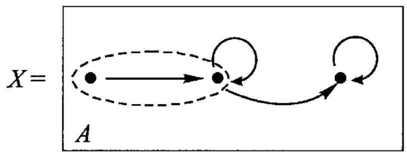
Alors on peut prouver l'égalité

$$\varphi \wedge non\ \varphi = faux$$

et l'inclusion

$$\varphi \subseteq\ non\ non\ \varphi.$$

Dans la plupart des catégories, cette inclusion n'est pas une égalité. La propriété universelle (règle d'inférence) pour $\implies$ entraîne que pour tout sous-objet A d'un objet $X, non(A)$ est le sous-objet de X qui est le plus grand parmi tout les sous-objets dont l'intersection avec A est vide. Voici un exemple dans les graphes.



La logique dans un topos tel que celui-ci est dite *non-Booléenne* ; l'algébriste et logicien G. Boole a traité le cas particulier selon lequel $non\ non\ A\ =\ A$. Noter, cependant, que dans cet exemple

$$non\ non\ non\ A\ =\ non\ A$$