

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : conséquences de la loi de monodromie; résumé de la théorie locale.* Note de M. MARC KRASNER, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes <sup>(1)</sup>. De la loi de monodromie que j'y ai démontrée (avec des hypothèses, par mégarde, trop restrictives sur les facteurs premiers  $\mathfrak{p}'$  de  $D_K$  dans  $K'$  : le théorème reste valable si l'on ne suppose, pour ces  $\mathfrak{p}'$ , que la non-ramification du corps composé de  $K'_{\mathfrak{p}'}$  et de  $(K/k)_{\mathfrak{p}}$  par rapport à  $K'_{\mathfrak{p}'}$ , et, alors, le théorème réciproque est aussi vrai [et banal]) résultent les conséquences suivantes : 1° Si  $K/k$  et  $K'/k$  satisfont aux conditions de la loi de monodromie, et si  $(K' : k) \leq (K : k)$ , on a  $K' = K$ ; 2° Si, pour tout facteur premier  $\mathfrak{p}'$  de  $D_{K'/k}$  dans  $K'$ , le corps composé de  $K'_{\mathfrak{p}'}$  et de  $(K/k)_{\mathfrak{p}}$  est non ramifié par rapport à  $(K/k)_{\mathfrak{p}}$  et si, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $K'$  tel que  $N(\mathfrak{p}') \leq |D_K|^{1/n'}$  [où  $n' = (K' : k)$ ],  $K'_{\mathfrak{p}'}/k_{\mathfrak{p}}$  est  $\subseteq (K/k)_{\mathfrak{p}}$ ,  $K'/k$  est une sous-extension de  $K/k$  (on applique la loi de monodromie au corps de Galois de  $K'/k$ , auquel on fait jouer le rôle de  $K$ , et à  $K$ , auquel on fait jouer le rôle de  $K'$ ), et réciproquement; 3°  $K'/k$  est galoisienne si et seulement si, pour tous les facteurs premiers  $\mathfrak{p}'$  de  $D_{K'/k}$  dans  $K'$ ,  $K'_{\mathfrak{p}'}/k_{\mathfrak{p}}$  est galoisienne et ne dépend que de  $\mathfrak{p}$  et, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $K'$  tel que  $N(\mathfrak{p}') \leq |D_K|^{1/n'}$ ,  $(K'_{\mathfrak{p}'} : k_{\mathfrak{p}})$  ne dépend que de  $\mathfrak{p}$  (on applique la loi de monodromie au corps de Galois de  $K'/k$ , qui joue le rôle de  $K$ , et à  $K'$ ); 4°  $G_{K/k}$  est engendré par les groupes d'inertie dans  $K/k$  des facteurs premiers  $\mathfrak{p}$  de  $D_{K/k}$  dans  $K$  et par les groupes de décomposition dans  $K/k$  des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $K$  tels que  $N(\mathfrak{p}) \leq \sqrt{|D_K|}$  (on applique la loi de monodromie à la sous-extension  $\overline{K}/k$  de  $K/k$  appartenant au sous-groupe  $\overline{g}$  de  $G_{K/k}$  engendré par les groupes indiqués et à  $k/k$ , jouant le rôle de  $K'/k$ ); 5° soient  $K'/k$  et  $K''/k$  deux sous-extensions de  $K/k$ ,  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $K$ ,  $\mathfrak{p}'$ ,  $\mathfrak{p}''$  les idéaux premiers des  $K'$ ,  $K''$  qu'il divise; alors, si, pour tout facteur premier  $\mathfrak{p}$  de  $D_{K/k}$  dans  $K$ ,  $K'_{\mathfrak{p}'}$  et  $K''_{\mathfrak{p}''}$  sont latéraux, et si, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  tel que  $N(\mathfrak{p}) \leq \sqrt{|D_K|}$ ,  $K'_{\mathfrak{p}'}$  et  $K''_{\mathfrak{p}''}$  coïncident on a  $K' = K''$  (on applique la conséquence précédente aux  $G_{K/K'}$  et  $G_{K/K''}$ ).

Afin de caractériser l'anneau principal <sup>(1)</sup> de  $k$ , je vais résumer les définitions et les résultats de ma théorie locale non abélienne des corps de classes, énoncés ou démontrés dans mes travaux antérieurs <sup>(2)</sup>. On dira que quelque chose peut se vérifier ou se construire *finiment*, si cela est possible à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles. Soient  $k$  un corps de nombres  $p$ -adiques,  $f(x)$ , un polynôme normé irréductible à coefficients entiers de  $k$  [l'irréductibilité

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 223, 1947, p. 785, 973 et 1113.

<sup>(2)</sup> *Mathematica* (Cluj), t. 13, 1937, p. 72-191; *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1534; 219, 1944, p. 433; 220, 1945, p. 28, 761; 221, 1945, p. 37; 222, 1946, p. 165, 581, 626, 984.

de  $f(x)$  se vérifie finiment <sup>(3)</sup>],  $\alpha$  un zéro de  $f(x)$ ,  $K = k(\alpha)$ ,  $n = (K:k)$  le degré de  $f(x)$ . On peut déterminer finiment l'extension de restes  $R/r$  de  $K/k$ , son module de valuation  $\mathfrak{M}$ , l'ordre par rapport à l'idéal premier de  $\mathfrak{P}$  de  $K$  de tout  $\beta \in K$  donné, et l'on peut construire finiment un  $\pi \in K$  d'ordre 1 en  $\mathfrak{P}$  et, pour tout  $\beta \in K$ , déterminer pour toute puissance  $\mathfrak{P}^u$  de  $\mathfrak{P}$ , un développement  $\xi_i \pi^i + \xi_{i+1} \pi^{i+1} + \dots + \xi_{u-1} \pi^{u-1}$ , tel que  $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{u-1}$  ( $i$  entier négatif, positif ou nul) soient des racines d'unité d'exposant premier à  $\mathfrak{p}$  quand ils ne sont pas nuls, qui soit  $\equiv \beta \pmod{\mathfrak{P}^u}$ . On appelle *polygone de ramification* de  $f(x)$  le polygone de Newton  $\Pi_f$  de  $f(x + \alpha)$  [qui se construit finiment] et on note  $\varphi_f(v)$  l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des ordonnées de la droite de coefficient angulaire  $-v$  qui touche  $\Pi_f$ . C'est une fonction strictement croissante de  $v$ , et sa fonction inverse sera notée  $v_f(\varphi)$ .  $\Delta^{(f)} = -\text{Log } v^{(f)}$  étant le minimum de la distance des zéros de  $f(x)$  dans la fermeture algébrique valuée  $\mathfrak{A}$  de  $\hat{k}$ , on pose  $\varphi_f = \varphi_f(v^{(f)})$ .

Le polygone  $f(x)$  est dit *discriminantiel* si l'idéal  $(D_f)$  engendré par son discriminant  $D_f$  est égal au discriminant  $D_{K/k}$  de  $K/k$ , ce qui a lieu si, et seulement si  $\alpha \equiv \xi_0 + \xi_1 \pi \pmod{\mathfrak{P}^2}$ , où le reste de  $\xi_0$  engendre  $R/r$  et où  $\xi_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ . On vérifie donc finiment si un polygone donné est discriminantiel. Si  $f(x)$  est discriminantiel,  $\Pi_f$  coïncide avec le *polygone de ramification*  $\Pi_{K/k}$  de  $K/k$ , déterminé par ses nombres et hypergroupes de ramification <sup>(2)</sup>, et,  $\varphi_{K/k}(v)$ ,  $v_{K/k}(\varphi)$ ,  $\varphi_{K/k}$  étant la fonction  $\varphi(v)$  relative au polygone  $\Pi_{K/k}$ , sa fonction inverse, le plus grand nombre de ramification fini de  $K/k$ ,  $\varphi_{K/k}(v_{K/k})$ , on a  $\varphi_f(v) = \varphi_{K/k}(v)$ ,  $v_f(\varphi) = v_{K/k}(\varphi)$ ,  $v^{(f)} = v_{K/k}$ ,  $\varphi_f = \varphi_{K/k}$ .

Soit  $S_k$  l'ensemble des polynômes normés irréductibles de  $k$ . On organise  $S_k$  en un espace ultramétrique <sup>(2)</sup>  $S_k^{(a)}$ , où  $a$  est une constante positive, en l'organisant par la distance  $d_a(f, g)$  [ $a$ -distance de  $S_k$ ] définie comme suit :  $n, u$  étant les degrés des  $f(x), g(x) \in S_k$  et  $R(f, g)$  étant leur résultant, on pose  $d_a(f, g) = |R(f, g)^{a:nu}|$ ,  $n$  étant un entier positif,  $S_{k,n}$  désigne le sous-espace de  $S_k^{(a)}$  formé par ses polynômes de degré  $n$ . J'ai démontré <sup>(2)</sup> que si  $-\text{Log } d_n(f, g) > \varphi_f$ ,  $g(x)$  définit (à  $k$ -isomorphie près) une surextension de l'extension  $K/k$  définie par  $f(x)$ , et qu'il existe un  $g(x) \in S_k$ , ne définissant pas une surextension de  $K/k$ , tel que  $-\text{Log } d_n(f, g) = \varphi_f$ . En particulier, quand  $f(x)$  parcourt les polynômes minimaux dans  $k$  des entiers d'une extension finie  $K$  de  $k$ ,  $\varphi_f$  atteint, pour les  $f(x)$  discriminantiels, son minimum, qui est  $\varphi_{K/k}$ . On appelle *conducteur* de  $K/k$  le p. p. c. m.  $\mathfrak{J}_{K/k}$  des diviseurs <sup>(2)</sup>  $\mathfrak{J}$  de  $S_k^{(a)}$ , où  $n = (K:k)$ , tels qu'on puisse trouver un polynôme minimal  $f(x)$  dans  $k$  d'un entier de  $K$  et un  $g(x) \in S_k$  ne définissant pas une surextension de  $K/k$  tels que  $f(x) \equiv g(x)(\mathfrak{J})$ .  $|\mathfrak{J}|_n$  étant la valuation <sup>(2)</sup> de  $\mathfrak{J}$  dans  $S_k^{(a)}$ , on a, visiblement,  $|\mathfrak{J}_{K/k}|_n = e^{-\varphi_{K/k}}$ . On associera au diviseur  $\mathfrak{J}$  de  $S_k^{(a)}$  l'idéal  $\mathfrak{f}$  de  $\mathfrak{A}$  tel que sa valuation  $|t|$  dans  $\mathfrak{A}$  soit  $= |\mathfrak{J}|_n$ . L'idéal  $\mathfrak{f}_{K/k}$  de  $\mathfrak{A}$

<sup>(3)</sup> Voir par exemple, O. ORB, *Math. Ann.*, 96, 1926, p. 313 et 97, 1926-1927, p. 569.

associé ainsi à  $\mathfrak{J}_{K/k}$  sera dit aussi le conducteur de  $K/k$ , et la Führer-Diskriminantenformel de Hasse-Artin montre qu'il coïncide, dans les cas abélien et galoisien, avec le conducteur au sens habituel.

Quelque soit le vrai multiple  $\mathfrak{J}$  et  $\mathfrak{J}_{K/k}$ , l'ensemble  $\bar{E}_{K/k}$  des polynômes discriminantiels définissant  $K/k$  est une réunion  $E(\mathfrak{J}; K/k)$  d'un nombre fini  $n(K/k; \mathfrak{J})$  de classes suivant  $\mathfrak{J}$  dans  $S_{k,n}$ . Étant donné un polynôme discriminantiel  $f(x)$  définissant une extension  $K/k$  de degré  $n$ , il est possible <sup>(2)</sup> de former finiment à partir de  $f(x)$  un système complet de représentants des classes suivant  $\mathfrak{J}$  appartenant à  $E(\mathfrak{J}; K/k)$ .

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Noyaux pseudo-reproduisants et complétion des classes hilbertiennes*. Note <sup>(1)</sup> de M. NACHMAN ARONSZAJN.

Nous reprenons les notations et définitions de notre Note précédente <sup>(2)</sup>. Nous y avons défini la notion d'un n. p.-r. pour une classe de fonctions relativement à une classe d'ensembles exceptionnels  $\mathfrak{A}$ , une mesure  $\mu$  et un système  $\mu$ -fondamental  $\{U(x, \rho)\}$ , en abrégé *rel.*  $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$ . Les propriétés I, II et III des n. r. [voir <sup>(2)</sup>] possèdent leurs analogues dans le cas des n. p.-r.

I'. S'il existe un n. p.-r. pour la classe  $F$  *rel.*  $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$ , il est unique à une fonction près dont l'intégrale par rapport à  $x$  (ou  $y$ ) sur tout  $U(p, \rho)$  est égale à 0 pour tous les  $y$  (ou  $x$ ) *exc.*  $\mathfrak{A}$ .

II'. Pour énoncer le théorème d'existence des n. p.-r. pour une classe  $F$  *rel.*  $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$ , faisons correspondre à chaque fonction  $f$  de  $F$  la fonction définie sur le système d'ensembles  $\{U\}$  prenant pour tout ensemble  $U(x, \rho)$  la valeur égale à l'intégrale de  $f$  sur  $U(x, \rho)$ . On a ainsi une correspondance entre la classe  $F$  et une classe linéaire  $\Phi$  des fonctions définies sur  $\{U\}$ . On transplante alors le produit scalaire de  $F$  sur  $\Phi$ , ce qui fait de  $\Phi$  une classe hilbertienne formant un espace de Hilbert et admettant un n. r. Celui-ci est une fonction des couples d'ensembles de  $\{U\}$ , c'est-à-dire des ensembles de la forme  $U(x_1, \rho_1) \times U(x_2, \rho_2)$ . Cette fonction peut être prolongée en une fonction additive d'ensembles dans  $E \times E$ . Le fait que cette fonction additive est absolument continue (par rapport à la mesure-produit  $\mu \times \mu$ ) sur une suite croissante des sous-ensembles de  $E \times E$  convergeant vers  $E \times E$ , caractérise le cas où il existe un n. p.-r. pour  $F$ .

Cette caractérisation permet de démontrer que la classe hilbertienne des fonctions de carrés sommables dans un domaine de l'espace euclidien (le choix de  $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$  est alors évident et, pour  $\mathfrak{A}$  et  $\mu$ , unique), n'admet pas de n. p.-r.

III' a. Si  $N(x, y)$  est le n. p.-r. de la classe  $F$  *rel.*  $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$ , on a :

(1). Pour toute fonction  $\mu$ -mesurable  $g(x)$ , l'intégrale sur  $E \times E$  de  $N(x, y) g(x) g(y)$  est  $\geq 0$ , si seulement cette intégrale existe.

---

<sup>(1)</sup> Séance du 9 février 1948.