

En vertu des relations $a'_i \cdot a'_j = 0$, l'addition logique se confond ici avec la disjonction exclusive, si bien que, dans le tableau (II), on peut remplacer à droite $+$ par $\vee$. Cette décomposition additive n'offre pas le même intérêt que la première; elle n'exprime d'ailleurs que ce que donnerait la lecture de la Table de valeurs.

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions finies et séparables des corps valués complets : approximation des corps de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0 ; modifications de la théorie.* Note ⁽¹⁾ de M. MARC KRASNER, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes ⁽²⁾. On a le

THÉOREME. — *Tout corps valué complet de caractéristique $p \neq 0$ peut être approché par une suite de corps valués complets de caractéristique 0.*

Démonstration dans le cas localement compact : k , étant localement compact de caractéristique $p \neq 0$, est le corps des séries méromorphes d'une variable x sur un champ de Galois r , valué de manière que $|\alpha_s x^s + \alpha_{s+1} x^{s+1} + \dots| = \alpha^s$, où $\alpha = |x|$ est un nombre réel fixe < 1 ($\alpha_s \neq 0$, $\alpha_{s+1}, \dots \in r$). Soit k'_m l'extension non ramifiée du corps p -adique rationnel de corps de restes r , valuée de manière que $|p| = \alpha^m$, et $k_m = k'_m(x_m)$, où $x_m^m = p$. Soient $\Pi^{(m)}$, Π_m les diviseurs multiplicatifs des k , k_m de norme α^m . Deux unités de k (qui sont des séries de Taylor en x) sont congrues $(\text{mod } \Pi^{(m)})$ si, et seulement s'ils le sont $(\text{mod } \alpha^m)$, et chaque classe $c \pmod{\Pi^{(m)}}$ d'unités de k possède un et un seul élément $f_c(x)$, qui soit un polynôme en x dans r de degré $< m$ et tel que $f_c(0) \neq 0$, et tout polynôme de cette forme appartient à quelque classe. De même, toute unité α_m de k_m se met sous la forme d'un polynôme $f(x_m)$ en x_m dans le domaine d'intégrité i'_m de k'_m de degré $< m$ et tel que $f(0) \neq 0 \pmod{p}$, et deux unités sont congrues $(\text{mod } \Pi_m)$ si, et seulement si les polynômes correspondants le sont $(\text{mod } p)$. Dès lors, les classes $(\text{mod } \Pi_m)$ d'unités de k_m peuvent s'identifier avec les polynômes en x_m dans r de degré $< m$, et $f_c(x_m) \rightarrow c$ est une application biunivoque des classes $(\text{mod } \Pi_m)$ d'unités de k_m sur celles $(\text{mod } \Pi^{(m)})$ d'unités de k . L'addition et la multiplication d'unités de $k \pmod{\Pi^{(m)}}$ étant celle des séries de Taylor en x dans $r \pmod{\alpha^m}$, et celles d'unités de $k_m \pmod{\Pi_m}$ étant celles de polynômes dans $i'_m \pmod{p, x_m^m}$, l'application $f_c(x_m) \rightarrow c$, $X_m \rightarrow X$, où X , X_m sont les classes suivant $\Pi^{(m)}$, Π_m des x , x_m , peut se prolonger en un isomorphisme résiduel ζ_m de k_m sur k de norme α^m . Comme $\alpha^m \rightarrow 0^+$, on a $k = \lim k_m$.

Le cas général se démontre à partir du cas localement compact par induction transfinie, en montrant qu'un isomorphisme résiduel de tout corps valué complet k se prolonge en celui du complété K de toute son extension simple.

⁽¹⁾ Séance du 10 février 1947.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 222, 1940, pp. 626-628, 934-986, 1370-1372; 223, 1947, pp. 173-175.

Ce théorème permet de déduire la théorie des corps de classes pour les extensions abéliennes séparables des corps localement compacts de caractéristique $p \neq 0$ à partir de la théorie locale ordinaire des corps de classes : en effet, si k est un corps localement compact de caractéristique $p \neq 0$, et si $k_1, k_2, \dots, k_m, \dots$ en est une suite approximante de corps p -adiques, pour toute extension séparable K de k , il existe une suite approximante $K_1, K_2, \dots, K_m, \dots$ d'extensions des $k_1, k_2, \dots, k_m, \dots$, satisfaisant au théorème de la dernière de mes Notes ⁽²⁾. Donc, K/k est abélienne si, et seulement si K_m/k_m l'est as. K_m/k_m l'est si, et seulement si son groupe de Takagi H_m est d'indice $n_m = (K_m : k_m)$ dans le groupe multiplicatif k_m^* de k_m , et, sinon, $(k_m^* : H_m) < n_m$. Or, le groupe de Takagi H de K/k est $\lim H_m$, $k^* = \lim k_m^*$, et, as., $n_m = n = (K : k)$, d'où, as., $(k^* : H) = (k_m^* : H_m) \leq n$, et K/k est abélienne si, et seulement si $(k^* : H) = n$. Les lois d'unicité, d'ordination et d'isomorphisme résultent de $H = \lim H_m$. H a, as., les mêmes valeurs et indices critiques que H_m , et $g_{K_m/k_m} \simeq g_{K/k}$ de manière que les éléments correspondants aient les mêmes nombres caractéristiques ⁽³⁾ et induisent les mêmes isomorphismes du corps de restes, d'où la validité de la Führer-Diskriminantenformel de M. Hasse et la possibilité de définir son symbole dans K/k à partir de celui de K_m/k_m . Les lois d'existence et de translocation se démontrent aussi sans difficulté.

La théorie qui fait objet de mes Notes ⁽²⁾ admet plusieurs modifications intéressantes : d'abord, on peut en chercher une forme, où les entiers ou les polynômes à coefficients entiers de k ne jouent pas de rôle particulier. Si E est un espace ultramétrique, où $d(a, b)$ est la distance des $a, b \in E$, et si e_0 en est un élément fixe, E est aussi un espace ultramétrique par rapport à la distance $d^*(a, b) = d(a, b) : \text{Max}[d(a, e_0), d(b, e_0)]$. Si dans un corps valué K on prend $e_0 = 0$, les diviseurs de K , organisé par la distance $d^*(a, b)$, sont évidemment ses diviseurs multiplicatifs, et les analogues des nombres caractéristiques ⁽²⁾ $v_\alpha(\sigma) = \omega(\sigma\alpha - \alpha) = -\text{Log } d(\alpha, \sigma\alpha)$ ($\alpha \in K$, $\sigma \in g_{K/k}$) sont les nombres de ramification $w_\alpha(\sigma) = -\text{Log } d^*(\alpha, \sigma\alpha) = v_\alpha(\sigma) - \omega(\alpha)$. Ainsi, la nouvelle distance donne à peu près la même théorie de la ramification extrinsèque ⁽³⁾ que l'ancienne et, en plus, si $\beta : \alpha \in k$, on a $(\sigma\beta - \beta) : (\sigma\alpha - \alpha) = \beta : \alpha$, d'où $w_\beta(\sigma) = w_\alpha(\sigma)$. Mais la théorie intrinsèque de la ramification ⁽³⁾ est, en général, très différente pour les deux distances. On obtient, pour la distance $d^*(a, b)$, une théorie non abélienne des corps de classes, analogue à l'exposée, en posant, dans $\mathcal{E}_k$, $e_0 = f_{0/k}(x) = x$, et en organisant, ainsi, $\mathcal{E}_k$ par la distance $d_a^*(f, g) = |R(f, g)^{a:n}| : \text{Max}(|f(0)^{a:n}|, |g(0)^{a:n}|)$. On peut définir le conducteur et étudier les phénomènes critiques et anti-critiques à l'aide de $d_a^*(f, g)$, en prenant $\mathcal{E}_{K/k}$ au lieu $\mathcal{E}_{k/k}$. Mais, $f_{K/k}^*$ étant le conducteur de K/k dans la nouvelle théorie, la condition de $|f_{K/k}^*| = 1$ n'est pas la non-ramification de K/k ($K = K_{1/k}$), mais sa non-surramification ($K = K_{\mathfrak{p}/k}$) ⁽³⁾.

⁽²⁾ Voir KRASNER, *Comptes rendus*, 220, 1945, pp. 28-30 et 761-763.

D'autre part, on peut modifier la théorie en caractérisant K/k par l'ensemble $M_{K/k}$ des matrices irréductibles de k dont la décomposition dans un corps K' ne peut comprendre une composante de degré 1 que si K'/k est isomorphe à une surextension de K/k . M_k étant l'ensemble des matrices irréductibles de k , et Φ la relation d'équivalence (absolue) de matrices, soient m le degré d'une matrice μ , $\|\mu\|$ son déterminant, I_m la matrice unité de degré m ; $S = \{\mu \rightarrow \|I_m x - \mu\|\}$ applique M_k sur $\mathcal{E}_k$ de manière que les images réciproques des éléments de $\mathcal{E}_k$ soient les éléments de M_k/Φ , et l'on a $SM_{K/k} = \mathcal{E}_{K/k}^0$. μ, ν étant des matrices de M_k de degrés m, n , on a $R(\|I_m x - \mu\|, \|I_n x - \nu\|) = \| (I_n \times \mu) - (\nu \times I_m) \|$, où $\mu \times \nu$ est le produit kroneckérien des matrices μ, ν ; ainsi, la théorie exposée et sa modification peuvent être formulées à l'aide de l'espace M_k , organisé par les pseudo-distances $\Delta_a(\mu, \nu) = d_a(S\mu, S\nu) = \| (I_n \times \mu) - (\nu \times I_m) \|$ et $\Delta_a^*(\mu, \nu) = d_a^*(S\mu, S\nu) = \Delta_a(\mu, \nu) : \text{Max}(\|\mu\|, \|\nu\|)$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la réciproque du théorème d'Abel sur les séries entières.* Note de M. HUBERT DELANGE, présentée par M. Paul Montel.

Soit la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ sont des nombres réels positifs croissants, λ_k tendant vers $+\infty$ avec k , et les a_k des coefficients complexes.

En supposant que pour k infini λ_{k+1}/λ_k tend vers 1, Littlewood a montré que le fait que la série converge pour $\Re[z] > 0$ et que sa somme $f(z)$ tende vers une limite finie S quand z tend vers zéro par valeurs réelles positives entraîne la

convergence de $\sum_1^{+\infty} a_n$ avec comme somme S moyennant l'hypothèse que, pour $k \geq 2$,

$$(1) \quad |a_k| \leq \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k} M,$$

M désignant un nombre fixe.

Hardy et Littlewood ont montré ensuite que, si a_k est supposé réel, la condition (1) peut être remplacée par

$$(2) \quad a_k \geq - \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k} M.$$

Ces résultats peuvent d'ailleurs se déduire d'un énoncé général relatif à l'intégrale de Laplace, lui-même cas particulier d'un énoncé général de Karamata relatif à des intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} \psi(x, t) ds(t)$.

D'autre part, Ananda-Rau a montré que l'hypothèse que λ_{k+1}/λ_k tend vers 1 peut être supprimée dans l'énoncé initial de Littlewood relatif à la condition (1), mais non dans celui de Hardy et Littlewood relatif à la condition (2).