

245. (CESÀRO). — La constante

$C_r = \lim \left[ \frac{1}{2}(\log 2)^r + \frac{1}{3}(\log 3)^r + \dots + \frac{1}{n}(\log n)^r - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1} \right]$ ,  
pour  $n = \infty$ , a la signification suivante

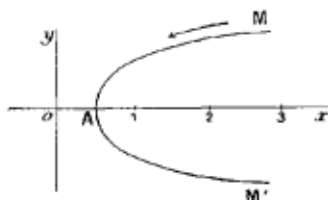
Si l'on fait, avec Riemann,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$ , on aura

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{1 \cdot 2 \dots r} C_r (s-1)^r,$$

C étant la constante d'Euler. Or, si l'on suppose la partie réelle de  $s > 1$ , on aura, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$\zeta(s) = \int \frac{1}{t^s} \frac{dt}{e^{2\pi i t} - 1},$$

l'intégrale étant prise, dans le sens direct, le long d'un chemin indéfini tel que MAM' comprenant à son intérieur les pôles 1, 2, 3, ..., de la fonction sous le signe somme. L'expression  $\frac{1}{t^s}$  est



définie par l'exponentielle  $e^{-s \log t}$  où  $\log t$  a sa valeur principale.

Au chemin d'intégration MAM' on peut substituer une parallèle à l'axe des  $y$  passant par le pôle  $x = 1$ , si l'on a soin d'éviter ce

pôle par un demi-cercle de rayon *infinitement petit*, situé à gauche de cette parallèle.

On obtient ainsi l'équation

$$(1) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi it} - 1} \left[ \frac{1}{(1-it)^s} - \frac{1}{(1+it)^s} \right],$$

qui montre que la fonction  $\zeta(s)$  est uniforme dans tout le plan et n'a qu'un point singulier à distance finie, le pôle  $s=1$ . En développant les deux membres de cette équation suivant les puissances de  $s-1$ , on trouve

$$C_r = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi it} - 1} \left\{ \frac{[\log(1-it)]^r}{1-it} - \frac{[\log(1+it)]^r}{1+it} \right\},$$

comme réponse à la question que nous traitons.

Puisque  $\zeta(-2n) = 0$ ,  $n$  étant un entier positif, il résulte de la formule (1)

$$0 = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi it} - 1} [(1-it)^{2n} - (1+it)^{2n}],$$

équation qui permet de calculer de proche en proche les nombres de Bernoulli.

Abel a fait connaître (*Œuvres*, t. I, p. 38) une formule qui comprend la nôtre comme cas particulier, mais sa démonstration est insuffisante. On établira cette formule plus générale au moyen des mêmes principes en faisant sur la nature de la fonction  $\varphi(t)$  des hypothèses indiquées par notre mode de démonstration.

J. FRANEL (Zurich).

En posant

$$C_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(\log 1)^r}{1} + \frac{(\log 2)^r}{2} + \dots + \frac{(\log n)^r}{n} - \frac{(\log n+1)^{r+1}}{r+1} \right],$$

$$\text{on a } (-1)^2 C^2 = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right] e^{-z} [\Pi(1) + \log z]^r dz,$$

la puissance  $[\Pi(1) + \log z]^r$  étant *symbolique* et représentant le développement

$$\Pi^{(r)}(1) + \frac{r}{1} \Pi^{(r-1)}(1) \log z + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \Pi^{(r-2)}(1) \log^2 z + \dots,$$

où  $\Pi^{(r)}(1)$  est la valeur, pour  $\mu=1$ , de la dérivée d'ordre  $r$  de

la fonction  $\Pi(\mu)$ , définie comme l'inverse de l'intégrale eulérienne de deuxième espèce :  $\Pi(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}$ .

On aura donc,  $r$  étant successivement 0, 1, 2, ... ,

$$C_0 = C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log \overline{n+1} = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right) e^{-z} dz,$$

$$C_1 = \frac{\log 1}{1} + \frac{\log 3}{2} + \frac{\log 3}{3} + \dots + \frac{\log n}{n} - \frac{(\log \overline{n+1})^2}{2} \\ = - \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right] e^{-z} (C + \log z) dz = -0,0728 \dots,$$

$$C_2 = \frac{(\log 1)^2}{1} + \frac{(\log 2)^2}{2} + \frac{(\log 3)^2}{3} + \dots + \frac{(\log n)^2}{n} - \frac{(\log \overline{n+1})^3}{3} \\ = - \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right] e^{-z} [2C^2 - \Gamma^2(1) + 2C \log z + \log^2 z] dz.$$

Les résultats ci-dessus peuvent être généralisés; en attendant la publication d'un petit travail sur ce sujet, je signalerai seulement la formule

$$(-1)^{r+1} \lim \left\{ \sum_1^n \frac{(\log \overline{n+x})^r}{n+x} \right. \\ \left. - \frac{1}{r+1} [(\log \overline{n+x+1})^{r+1} - (\log \overline{x+1})^{r+1}] \right\} \\ = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right] e^{-(x+1)z} [\Pi(1) + \log z]^2 dz.$$

E. MAIO.

Je désigne par  $\zeta(s)$  la fonction uniforme qui, pour des valeurs de  $s$  dont la partie réelle est  $> 1$ , est représentée par la série

$\sum_1^n \frac{1}{n^s}$ . A l'égard de cette fonction au pôle unique  $s=1$ , on établit le développement valable dans tout le plan

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = C + C_1 \frac{(1-s)}{1} + C_2 \frac{(1-s)^2}{1,2} + \dots + C_r \frac{(1-s)^r}{r!},$$

où j'ai remplacé  $1 + C_0$  par la constante  $C$  d'Euler.

En supposant positive la partie réelle de  $s$ , on peut démontrer en outre l'égalité

$$\Gamma(s) \left\{ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right\} = \int_0^{\infty} x^{s-1} dx \left\{ \frac{1}{e^x-1} - \frac{e^{-x}}{x} \right\},$$

dont le second membre se développe en série entière, ce qui donne

$$\Gamma(s) \left\{ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right\} = J_0 + J_1 \frac{(s-1)}{1} + J_2 \frac{(s-1)^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

où

$$J_r = \int_0^{\infty} (\log x)^r dx \left\{ \frac{1}{e^x-1} - \frac{e^{-x}}{x} \right\} = \int_0^{\infty} (\log x)^r f(x) dx.$$

Du rapprochement des deux séries ainsi obtenues on conclut, en désignant par  $\Gamma^{(r)}$  la constante  $\left[ \frac{d^r \Gamma(s)}{ds^r} \right]_{s=1}$ ,

$$J_0 = \Gamma^{(0)} C, \quad J_1 = \Gamma' C - \Gamma^{(0)} C_1, \quad J_2 = \Gamma'' C - 2 \Gamma' C_1 + \Gamma^{(0)} C_2, \\ J_3 = \Gamma''' C - 3 \Gamma'' C_1 + 3 \Gamma' C_2 - \Gamma^{(0)} C_3,$$

.....

Évidemment ces relations permettent d'exprimer les constantes  $C_r$  par les intégrales  $J_r$ . On trouve

$$C_1 = - \begin{vmatrix} \Gamma^{(0)} & J_0 \\ \Gamma' & J_1 \end{vmatrix}, \quad C_2 = - \begin{vmatrix} \Gamma^{(0)} & 0 & J_0 \\ \Gamma' & -\Gamma^{(0)} & J_1 \\ \Gamma'' & -2\Gamma^{(0)} & J_2 \end{vmatrix}, \\ C_3 = + \begin{vmatrix} \Gamma^{(0)} & 0 & 0 & J_0 \\ \Gamma' & -\Gamma^{(0)} & 0 & J_1 \\ \Gamma'' & -2\Gamma' & \Gamma^{(0)} & J_2 \\ \Gamma''' & -3\Gamma'' & 3\Gamma' & J_3 \end{vmatrix},$$

ou bien, en tenant compte de la valeur connue de  $\Gamma^{(r)}$ ,

$$\left( \begin{aligned} C_1 &= - \int_0^{\infty} f(x) dx (\log x + C), \\ C_2 &= \int_0^{\infty} f(x) dx [(\log x)^2 + 2C \log x + C^2 - \zeta(2)], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

J'écris encore ici les formules suivantes, qui sont peut-être

utiles pour évaluer les constantes  $C_r$  :

$$(A) \left\{ \begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{e^{-m}}{m} &= -J_0 - \Gamma' - \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{2m}, \\ \sum_1^{\infty} \frac{li(e^{-m})}{m} &= -J_1 - \frac{1}{2}\Gamma'' + \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{(2m)^2}, \\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m,1}^{\infty} \frac{li(e^{-x})}{x} dx &= -\frac{1}{2}J_2 - \frac{1}{6}\Gamma''' + \frac{1}{2} - \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{(2m)^3}, \\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \int_m^{\infty} \frac{dx}{x} \int_x^{\infty} \frac{li(e^{-x})}{x} dx &= -\frac{1}{6}J_3 - \frac{1}{24}\Gamma^{IV} + \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{(2m)^4}, \end{aligned} \right.$$

Les nombres  $B_m$  sont ceux de Bernoulli :  $B_1 = \frac{1}{6}$ ,  $B_2 = \frac{1}{30}$  ; la fonction  $li$  est le logarithme intégral.

Remarquons qu'on trouve, en ajoutant ces équations, après les avoir multipliées successivement par 1,  $(s-1)$ ,  $(s-1)^2$ ,  $(s-1)^3$ , ... ,

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{2m+s-1} \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{e^{-m}}{m} - (s-1) \sum_1^{\infty} \frac{li(e^{-m})}{m} \\ &= (s-1)^2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \int_m^{\infty} \frac{li(e^{-x})}{x} dx - (s-1)^3 \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \int_m^{\infty} \frac{dx}{x} \int_x^{\infty} \frac{li(e^{-x})}{x} dx \\ &= (s-1)^4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \int_m^{\infty} \frac{dx}{x} \int_x^{\infty} \frac{dx}{x} \int_x^{\infty} \frac{li(e^{-x})}{x} dx - \dots; \end{aligned}$$

l'expression analytique du produit  $\Gamma(s)\zeta(s)$  est conforme au théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes.

La première formule (A) donne la valeur de  $C$ , la deuxième la valeur de  $C_1$  et ainsi de suite, à l'aide de séries très convergentes. En effet, la deuxième formule s'écrit

$$C_1 = -\frac{1}{2}C^2 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} - \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{2m!} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_1^{\infty} \frac{li(e^{-m})}{m};$$

d'où l'on tire, au moyen d'une Table du logarithme intégral,

$$C_1 = 0,0738756.$$

Si l'on calcule auparavant l'intégrale  $\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x} dx$  par l'équation  $\int_m^\infty \frac{li(e^{-x})}{x} dx = -\frac{1}{2} C_2 - \frac{\pi^2}{12} - C \log m - \frac{1}{2} (\log m)^2 + \frac{1}{1^2} \cdot \frac{m}{1!} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{m^2}{2!} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{m^3}{3!} - \dots,$

il résultera de la troisième formule (A) :  $C_2 = -0,00903$ .

J.-C. KLUYVER (Leyde).

239. (E. LEMOINE.) — Voici les résultats remarquables trouvés par M. T.-J. Allersma (*Warfum*, Hollande) et publiés dans les *W. O.* (t. VI, p. 246-252).

L'auteur se sert d'un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  à origine O (centre du cercle circonscrit) et parallèles aux coordonnées d'inertie  $(\xi, \eta)$  à centre Z (centre de gravité), caractérisées par la condition  $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = 0$ , où  $(\xi_i, \eta_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) représentent les sommets du triangle. En introduisant des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$  définis par les relations

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 + \xi_1 \xi_2 &= \alpha, & \eta_2 \eta_3 + \eta_3 \eta_1 + \eta_1 \eta_2 &= \beta, \\ \xi_3 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 + \xi_1 \eta_2 &= -(\eta_2 \xi_3 + \eta_3 \xi_1 + \eta_1 \xi_2) = \gamma, \\ \lambda &= -\frac{\gamma}{3\alpha} = -\frac{\beta}{\gamma}, & \mu &= \frac{\gamma}{3\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}, & 3\lambda\mu &= -1; \end{aligned}$$

les équations des deux coniques, lieux de M et de M', deviennent

$$K \equiv 3\mu x^2 + 2xy + 3\lambda y^2 + 4q'x + 4p'y = 0,$$

$$K' \equiv 3\mu x^2 - 2xy - 3\lambda y^2 - 4qx - 4py = 0.$$

Dans ces équations figurent les coordonnées  $(p, q)$  et  $(p', q')$  des centres S et S' de K et de K'. Ces coordonnées s'expriment par les relations

$$\nu p = \lambda x_0 - y_0, \quad \nu p' = \lambda x_0 + y_0,$$

$$\nu q = -x_0 + \mu y_0, \quad \nu q' = x_0 + \mu y_0;$$

où  $\nu = \lambda + \mu$ , dans les coordonnées  $(x_0, y_0)$  de Z.

A l'aide de ces équations et de l'équation

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ = x_0^2 + y_0^2 + \frac{8}{3\nu^2} [(1 + 3\lambda^2)x_0^2 + (1 + 3\mu^2)y_0^2], \end{aligned}$$

245. (E. CESÀRO). — *Deuxième réponse.* — REMARQUES RELATIVES AUX RÉPONSES DE MM. FRANEL ET KLUYVER (1895, p. 153-157). — La formule (1) de M. Franel est identique à la suivante que j'ai posée comme question (*T. M.*, 1893, p. 54) :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\pi} \frac{(\cos \theta)^{s-1} \sin s \theta}{e^{2\pi i \tan \theta} - 1} d\theta.$$

Je trouve encore, dans mes notes, entre autres, les formules

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} + i 2^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\pi y} + 1} \left( \frac{1}{(1-yi)^s} - \frac{1}{(1+yi)^s} \right)$$

et  $(s-1)\zeta(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2} + yi)^{1-s}}{(e^{\pi y} + e^{-\pi y})^2} dy,$

où les logarithmes qui interviennent dans la définition des exponentielles ont leurs valeurs principales. Ces formules, dont la dernière est remarquable à cause de sa simplicité, se démontrent aisément à l'aide du théorème de Cauchy, si important pour la sommation des séries.

Dans une Note : Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann (*C. R.*, t. CIV, 1887), j'ai donné la série

$$(1) \quad (s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} C_v (s-1)^v,$$

$$\text{où } C_v = \frac{(-1)^{v-1}}{v!} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{v(\log n)^{v-1}}{n} - (\log n + 1)^v + (\log n)^v \right],$$

et calculé les neuf premiers coefficients avec neuf décimales (ce qui, dans ma notation, est désigné par  $(-1)^v v!$ .  $C_{v+1}$  est identique à  $C_v$  dans la notation de M. Cesàro). M. J.-P. Gram (Copenhague) a récemment calculé, avec un grand nombre de décimales, les coefficients du développement (1). Ses calculs seront sans doute publiés prochainement (ceci nous était envoyé le 14 avril 1895); en attendant, je transcris ci-après les résultats de mes calculs de 1887.

*Note.* — Tous les chiffres donnés sont certains; par conséquent l'erreur est toujours plus petite qu'une demi unité de la dernière décimale.

$$\begin{aligned}
 z^5(1+z) = & 1 + 0,57 \ 72 \ 15 \ 66 \ 49 \ 02 \ z \\
 & + 0,07 \ 28 \ 15 \ 84 \ 54 \ 84 \ z^2 \\
 & - 0,00 \ 48 \ 45 \ 18 \ 16 \ \dots \ z^3 \\
 & - 0,00 \ 03 \ 42 \ 30 \ 57 \ \dots \ z^4 \\
 & + 0,00 \ 00 \ 96 \ 89 \ \dots \ z^5 \\
 & - 0,00 \ 00 \ 06 \ 61 \ 10 \ 3. \ z^6 \\
 & - 0,00 \ 00 \ 00 \ 33 \ 16 \ 24 \ z^7 \\
 & + 0,00 \ 00 \ 00 \ 10 \ 46 \ 2. \ z^8 \\
 & - 0,00 \ 00 \ 00 \ 00 \ 87 \ 3. \ z^9 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

J.-L.-W.-V. JESSEN (Copenhagen).