Journées APMEP La Rochelle 25 octobre 2008
Conférence inaugurale

Les mathématiques : toujours en chantier dans une unité dynamique

Jean Pierre BOURGUIGNON[1]
(CNRS-IHÉS, École polytechnique)

Les mathématiques sont souvent présentées comme le langage de la science quantitative : pour faire des mathématiques on doit compter et donc utiliser des nombres. Or, comme vous le savez, les mathématiciens manipulent beaucoup d'autres objets : des formes et des figures géométriques, des structures (motifs, symétries ...), des processus, des algorithmes...
Classiquement on considère que les mathématiques sont édifiées sur quatre piliers :

- l'algèbre, science des formules et des algorithmes (but : résoudre des équations),
- la géométrie, science des formes et des espaces (but : développer des outils pour concevoir les objets),
- l'analyse, science des inégalités et des limites (but : estimer),
- les probabilités, science des processus aléatoires (but : prévoir en avenir incertain).

En prenant une perspective historique qui montre leur persistance, pour déboucher sur la présentation de quelques notions récemment apparues, je voudrais montrer que ces quatre piliers sont inséparables parce que liés entre eux par des liens complexes qui s'enrichissent en permanence.
Je voudrais montrer ainsi :

- la vigueur des mathématiques, science **toujours en chantier** ;
- leur diversité : elles créent en permanence des concepts, sous une double influence, interne et externe (elles sont influencés par d'autres sciences et la technologie) ;
- mais aussi leur **unité dynamique**.

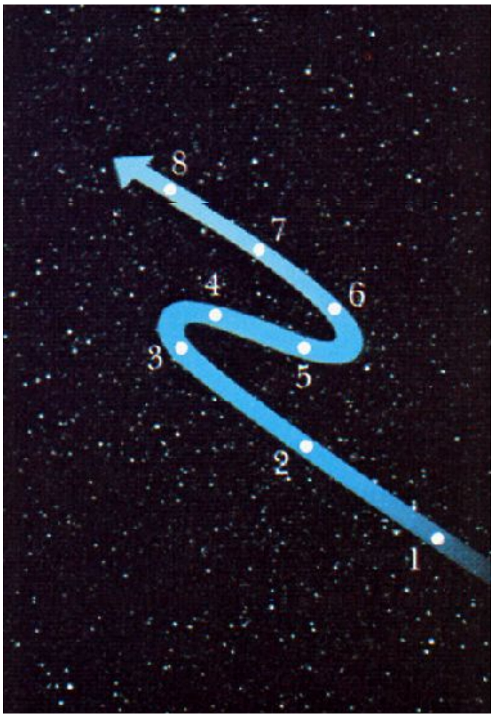
Le célèbre tableau de René MAGRITTE, *La clairvoyance* (1936), servira de métaphore pour illustrer mon propos :

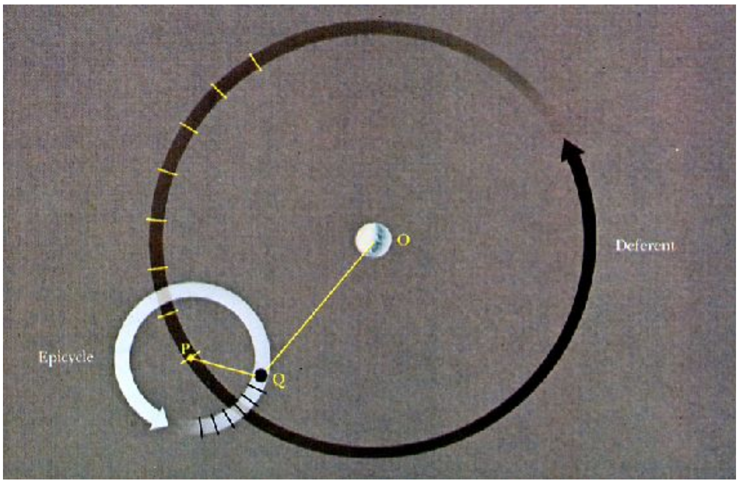
[1] jpb@ihes.fr ; Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette

I. Comprendre l'espace grâce à la géométrie

La clairvoyance (1936), modifiée 2008

Selon Platon, on peut construire un système du monde qui associe philosophie et science.
Dans sa Physique, Aristote utilise beaucoup de modèles géométriques dans lesquels la **sphère** joue un rôle essentiel pour comprendre ce qui se passe dans le ciel. Cela soulève la question de la relation avec ce qui se passe sur la Terre.
Pour expliquer le mouvement des planètes (litt. corps errants), les Grecs combinent ingénieusement deux mouvements sphériques :



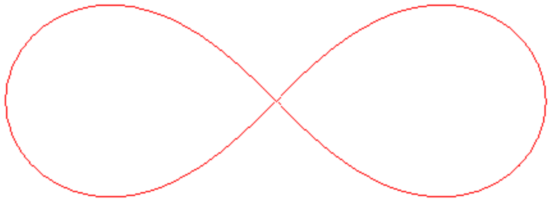


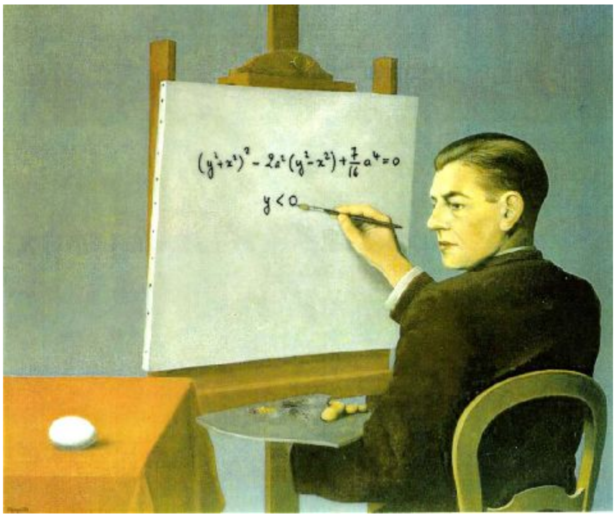
Pour Descartes, c'est la "*musique des sphères* " qui produit l'harmonie
Ces conceptions sont un encouragement puissant à développer la géométrie.

Les *Éléments* d'Euclide (probablement le livre non religieux dont l'influence dans l'Histoire de l'Humanité aura été la plus longue) donnent un modèle pour l'espace et une méthode pour

l'analyser et le comprendre : partant de points, de droite et de plans, Euclide construit des objets plus élaborés, comme les coniques.
En même temps il établit la méthode axiomatique, et le rôle de la démonstration.
Mais pour Euclide, nombres et figures sont deux domaines séparés.

Une révolution est due à René DESCARTES, qui affirme que *chaque figure géométrique peut être représentée par des nombres*. C'est la naissance de la géométrie analytique, véritable *acte de violence* selon Hermann WEYL.
Conséquence pour les modèles mathématiques : on dispose pour les courbes de beaucoup plus de possibilités. Elles peuvent être représentées par des équations algébriques de n'importe quel degré, pas seulement de degré 2 comme les coniques. Par exemple le **lemniscate de Bernoulli** est une courbe de degré 4, tout comme **l'œuf** :

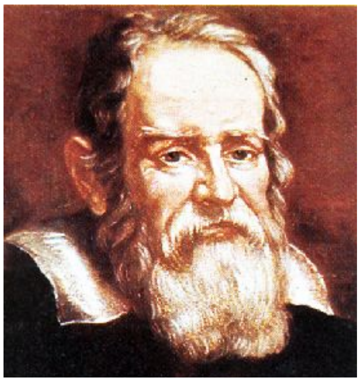


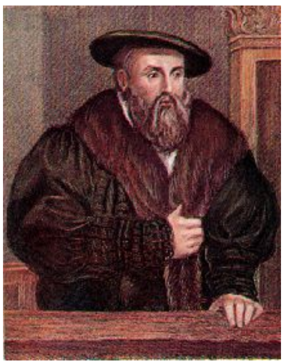


Avec COPERNIC, la Terre n'est plus au centre de l'univers mais tourne autour du Soleil.
Un cadre théorique manque encore pour calculer les trajectoires des planètes.
Trois contributions majeures permettront de l'édifier :

- *celle de* GALILÉE, qui écrit dans Il Saggiatore :

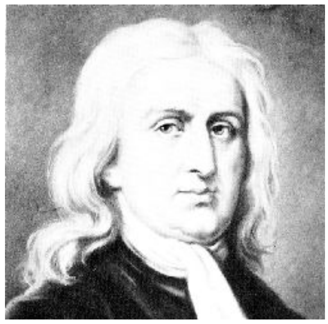
« La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. »





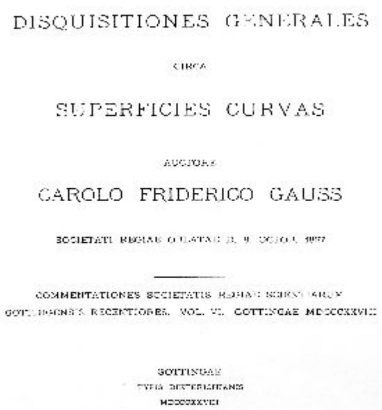
- celle de KÉPLER, dont les trois lois gouvernent le mouvement des planètes :
  - les planètes se meuvent autour du Soleil en parcourant des ellipses dont un des foyers est occupé par le Soleil ;

- le segment joignant le Soleil et la planète balaie des aires égales dans des temps égaux ;
- il y a une relation algébrique entre le diamètre de l'ellipse et la distance au Soleil.



- celle de NEWTON, basée sur une dimension complètement nouvelle des mathématiques, à savoir l'introduction du **calcul différentiel**.

Le succès du calcul différentiel a permis de développer une nouvelle **géométrie différentielle**, dont un des contributeurs essentiels a été Carl Friedrich GAUSS.
Dans son ouvrage décisif, *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* paru en 1878, il introduit la notion fondamentale de **courbure intrinsèque** d'un espace. Sa motivation principale vient de l'étude de la géodésie.



DISQUISITIONES GENERALES

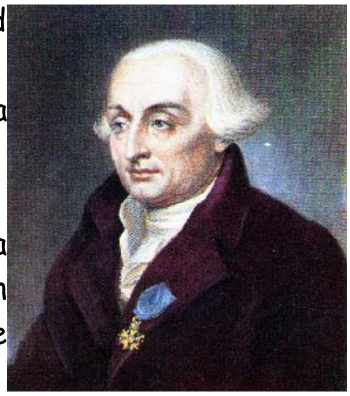
CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

CAROLO FRIDERICO GAUSS

GOTTINGAE

Tout au long du XVIIIème siècle, la mécanique céleste a connu un grand succès grâce à la théorie des perturbations.
La complexité croissante des calculs a exigé de nouveaux outils : la **mécanique analytique** *de* LAGRANGE est une étape majeure.



Dans un mémoire paru en 1808 une autre étape radicalement nouvelle a été franchie par LAGRANGE puisqu'il propose de travailler dans un espace complètement abstrait, l'espace des mouvements elliptiques : une première historique.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE

DES

VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES

ET EN PARTICULIER

DES VARIATIONS DES GRANDS AXES DE LEURS ORBITES (*)

(Mémoires de la première classe de l'Institut de France, année 1808.)

On entend, en Astronomie, par éléments d'une planète les quantités qui déterminent son orbite autour du Soleil, supposée elliptique, ainsi que le lieu de la planète dans un instant marqué, qu'on appelle l'*époque*. Ces quantités sont au nombre de cinq, dont deux, le grand axe ou la distance moyenne qui en est la moitié, et l'excentricité, déterminent la grandeur de l'ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers; les trois autres, la longitude de l'aphélie, celle des nœuds, et l'inclinaison, déterminent la position du grand axe sur le plan de l'ellipse et la position de ce plan sur un plan qu'on regarde comme fixe par rapport aux étoiles. Ces cinq quantités, jointes à l'époque, étant connues pour une planète, on peut trouver en tout temps son lieu dans le ciel par le moyen de ces deux lois, découvertes par Képler, que les aires décrites dans l'ellipse par le rayon vecteur croissent proportionnellement au temps, et que la durée de la révolution est proportionnelle à la racine carrée du cube du grand axe. Les Tables d'une planète, abstraction faite de ses perturba-

(*) Lu, le 22 août 1808, à l'Institut de France.

Mais en rapportant les planètes, non au centre du Soleil, mais au centre commun de gravité du Soleil et des planètes autour duquel leur mouvement est presque plus régulier qu'autour du Soleil, j'obtiens des équations différentielles semblables, dans lesquelles la fonction dont il s'agit est symétrique, et demeure par conséquent la même pour toutes les planètes; alors le calcul devient uniforme et général, et n'est plus sujet à aucune exception. On a de cette manière les variations des éléments de chacune des orbites rapportées au centre commun de gravité, et l'on démontre par une même Analyse que le grand axe de chacune de ces orbites ne peut avoir dans les deux premières approximations aucune inégalité croissant comme le temps. Or il est facile de passer du mouvement autour du centre de gravité au mouvement autour du Soleil, et, en regardant celui-ci comme elliptique, on trouve facilement, par la Théorie des osculations, les expressions variables des éléments. Par ce moyen je démontre la proposition générale de la non-existence des inégalités proportionnelles au temps dans les grands axes des planètes rapportées au Soleil.

L'objet de ce Mémoire est d'exposer les nouvelles formules que j'ai trouvées pour les variations des éléments des planètes, ainsi que leur application aux variations des grands axes, et de développer surtout l'Analyse qui m'y a conduit, et qui me paraît mériter l'attention des Géomètres par son uniformité et par sa généralité, puisqu'elle est indépendante de la considération des orbites elliptiques, et qu'elle peut s'appliquer avec le même succès à toute autre hypothèse de gravitation dans laquelle les orbites ne seraient plus des sections coniques.

Ayant montré à M. de Laplace mes formules et mon Analyse, il me montra de son côté en même temps des formules analogues qui donnent les variations des éléments elliptiques par les différences partielles d'une même fonction, relatives à ces éléments. J'ignore comment il y est parvenu; mais je présume qu'il les a trouvées par une combinaison adroite des formules qu'il avait données dans la *Mécanique céleste* (*). Ainsi son

(*) Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de Laplace a publié ses formules dans un *Supplément à la Mécanique céleste*.

Le processus visant à comprendre l'espace en élargissant les concepts géométriques a continué ensuite grâce aux contributions de beaucoup de mathématiciens et de physiciens :

- Bernhard RIEMANN, en 1854, faisant une synthèse entre LAGRANGE et GAUSS, généralise de façon considérable la notion de **métrique** dans un espace :

Pour lui, une métrique est un produit scalaire sur les vecteurs tangents en chaque point :

$g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$.

La déviation par rapport à la géométrie euclidienne est mesurée par un objet complexe : le **tenseur de courbure** $R_{ijk}{}^{l}$.

Il était inspiré par la recherche d'un modèle pour la théorie physique de l'Ether.

Son mémoire « *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* » a été publié après sa mort en 1868.

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)*)

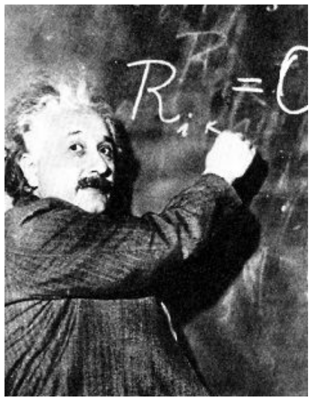
Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der

*) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu derselben.

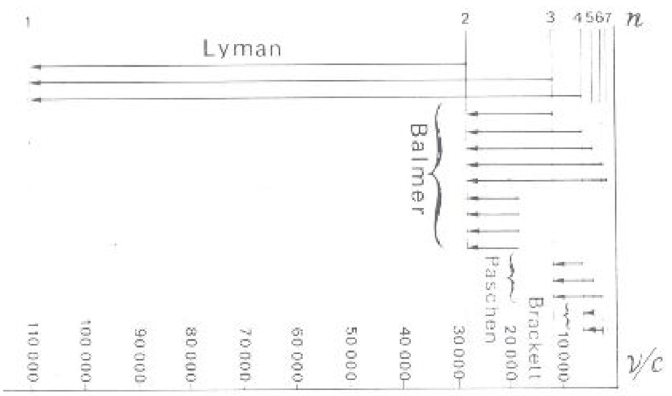
- Albert EINSTEIN, en 1905, proposé que l'espace ne soit pas séparé du temps. C'est un des points de base de sa théorie de la **relativité restreinte**. Ceci a exigé de travailler dans une nouvelle géométrie, différente de la géométrie euclidienne, identifiée par Henri POINCARÉ et Hermann MINKOWSKI.



En 1915, EINSTEIN a franchi une étape de plus dans sa théorie de la **relativité générale**. Cela a été une stimulation forte pour la géométrie introduite par RIEMANN, car cela fait jouer un rôle central à la courbure (via un de ses avatars : la courbure de Ricci R_{ik}).

Le processus de comprendre l'espace en élargissant les concepts géométriques a continué ensuite grâce aux contributions de beaucoup de mathématiciens et de physiciens : RIEMANN, EINSTEIN, POINCARÉ, MINKOWSKI, CONNES, …
En 1985, Alain CONNES affichait un programme ambitieux, inspiré par la physique quantique : il proposait de construire étape par étape un nouveau corps de connaissances, qu'il a appelé la **géométrie non-commutative**.

d'autre part que le spectre est un ensemble de différences, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I de fréquences tel que le spectre soit l'ensemble des différences $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ entre des couples arbitraires ν_i, ν_j d'éléments de I. Cette propriété montre que l'on peut combiner les fréquences ν_{ij} et ν_{jk} pour en obtenir une troisième, $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$. Ce corollaire important est le principe de composition de Ritz Rydberg, le spectre est doté naturellement d'une loi de composition partiellement définie, la somme de certaines fréquences du spectre est encore une fréquence du spectre.



ble d'en prédire l'intensité et la polarisation. C'est par une remise en cause fondamentale de la mécanique classique qu'Heisenberg est parvenu à ce but, et à aller bien au-delà de ce qu'avaient fait ses prédécesseurs. Cette remise en cause de la mécanique classique est à peu près la suivante : dans le modèle classique, l'algèbre des quantités physiques observables se lit directement à partir du

groupe Γ des fréquences émises, c'est l'algèbre de convolution de ce groupe de fréquences. Comme Γ est un groupe commutatif, cette algèbre est commutative. Or dans la réalité on n'a pas affaire à un groupe de fréquences, mais à cause de la règle de composition de Ritz Rydberg, on a affaire au groupoïde $\Delta = \{(i,j) ; i,j \in I\}$ avec la règle de composition $(i,j).(j,k) = (i,k)$. L'algèbre de convolution garde encore un sens quand on passe d'un groupe à un groupoïde, et l'algèbre de convolution du groupoïde Δ n'est autre que *l'algèbre des matrices*, le produit de convolution s'écrit en effet :

$$(a.b)_{(i,k)} = \sum_j a_{(i,j)}\, b_{(j,k)}$$

ce qui est identique à la règle de composition des matrices.

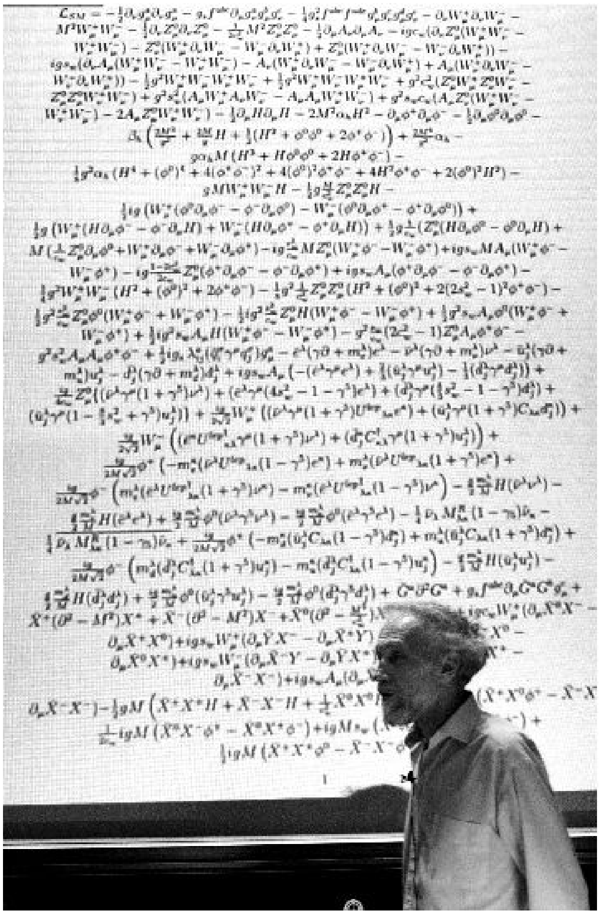
Pour atteindre son but, il part de la théorie de la mesure, mais il a besoin d'aller plus loin. Il y parvient remarquablement en créant la **cohomologie cyclique, les K-cycles**.

Quand on spécialise la théorie des algèbres de von Neumann au cas très simple des *algèbres commutatives* on obtient la théorie de la mesure au sens de Lebesgue. Plus préci-

nées sur le spectre de H. La théorie générale des algèbres de von Neumann apparaît ainsi comme un analogue non commutatif de la théorie de Lebesgue. L'importance

de la mesure. Dans la hiérarchie des moyens qui sont a notre disposition pour analyser un espace classique, la théorie de la mesure occupe en effet la place la plus primitive. Un espace ordinaire n'acquiert de connexité, de linéarité infinitésimale, et de géométrie que grâce aux théories suivantes :

② Topologie algébrique.
③ Variétés différentiables.
④ Géométrie Riemannienne.



Le domaine est en pleine ébullition, à cause des travaux d'Alain CONNES, mais aussi maintenant de ceux de plusieurs centaines de chercheurs de par le monde.

La géométrie non commutative permet de considérer sur un pied d'égalité des objets discrets et des objets continus, et fournit de très intéressants modèles pour la physique.

« En fait, le passage de la mesure des distances en géométrie riemannienne à la mesure des distances en géométrie non-commutative est l'exact reflet de l'évolution de la définition du mètre dans le système métrique (1960). »

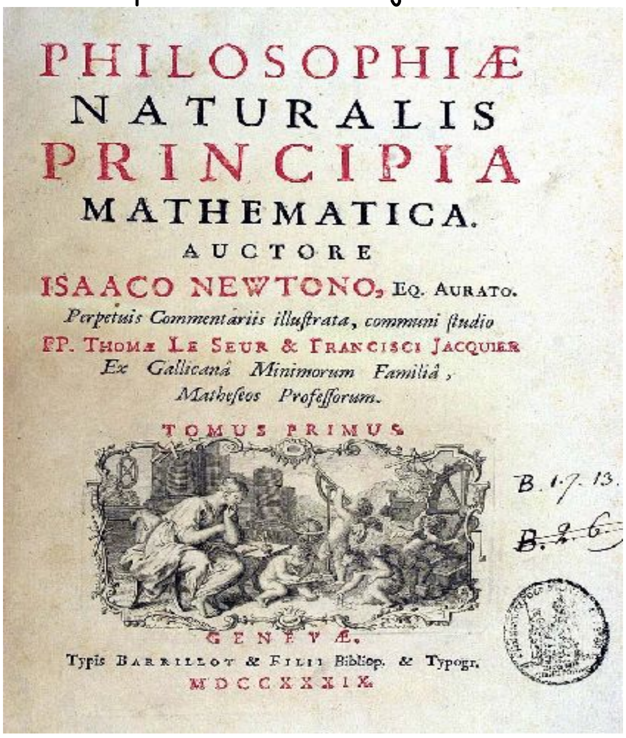
« La mesure des distances utilise les algèbres d'opérateurs. On obtient ainsi une notion d'espace géométrique de nature spectrale, d'une très grande flexibilité. La géométrie non-commutative traite à la fois d'espaces de dimension non entière, d'espaces de dimension infinie, et surtout d'espaces de nature " quantique ", et enfin de l'espace-temps lui-même si l'on prend en compte non seulement la force électro-magnétique mais aussi les forces faibles et fortes qui conduisent à un modèle non commutatif de l'espace-temps. »

Grâce aux nouveaux points de vue, de nouvelles perspectives ont pu être gagnées sur la distribution des zéros de la fonction ζ de RIEMANN, ...

II. Le continu et le discret (la saga de l'analyse)

La clairvoyance (1936), modifiée 2008

En 1687 paraît l'œuvre majeure de NEWTON : *Philosophiae Naturalis Principia Matematica*



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.
Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio
PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER
Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,
Matheseos Professorum.
TOMUS PRIMUS
GENEVÆ,
Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.
MDCCXXXIX.

Le livre contient trois contributions majeures au développement des sciences :

- le **calcul infinitésimal**, qui est fondé sur la clarification du concept de limite, notamment la notion de vitesse instantanée, et conduit à la création d'une nouvelle branche des mathématiques, **l'analyse** ;
- la loi fondamentale de la dynamique ;
- la loi de l'interaction gravitationnelle.

NEWTON établit que les trajectoires (elliptiques) des planètes sont solutions de l'équation différentielle

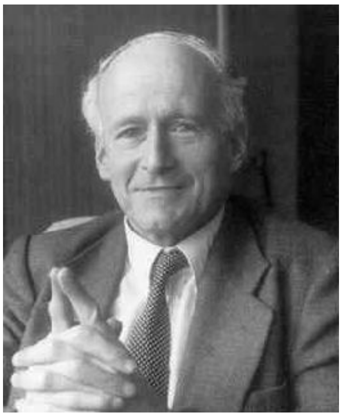
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Il retrouve les lois de KÉPLER de façon déductive, grâce à la forme de la loi fondamentale de la dynamique , et grâce à la forme qu'il propose pour l'interaction gravitationnelle.
Depuis lors, l'analyse s'est développée en une des branches majeures des mathématiques.

Le développement du calcul différentiel à plusieurs variables a conduit à la théorie des **équations aux dérivés partielles** qui sont essentielles pour l'étude des problèmes d'évolution dans les sciences de la nature, comme les équations de la chaleur et des ondes, et l'étude de questions internes aux mathématiques, par exemple en géométrie et en théorie des nombres.

L'équation différentielle la plus simple est celle qui dit que la dérivée d'une fonction inconnue est une fonction connue : $\frac{dx}{dt} = f$.

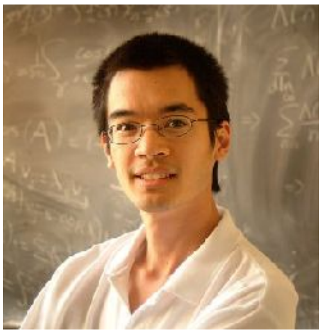
Quand on résout une telle équation, on dit qu'on l'intègre, d'où le nom de **calcul intégral** donné à l'étude des primitives d'une fonction.
Le calcul intégral, initié par LEIBNIZ, a été développé par RIEMANN.



Au XXème siècle, l'analyse a continué son développement, avec des avancées décisives dans l'étude du calcul intégral par Henri LEBESGUE.

A aussi émergé une théorie générale des équations aux dérivées partielles linéaires.
Un nouveau concept est apparu, celui de **solution faible**, anticipé par certains physiciens. Une étape essentielle de ce point de vue a été franchie par Laurent SCHWARTZ, qui, grâce à sa théorie des **distributions**, a fourni un réservoir général pour les solutions faibles.

La stimulation par l'Informatique demande de nouvelles combinaisons de savoir-faire et donne plus d'importance à des champs classiques comme la combinatoire, les algorithmes, la logique,...
D'où l'émergence d'une nouvelle génération de mathématiciens comme :



- Terence TAO, qui a remarquablement contribué à beaucoup de domaines mathématiques, de l'analyse à la théorie des nombres, à partir d'idées combinatoires ;

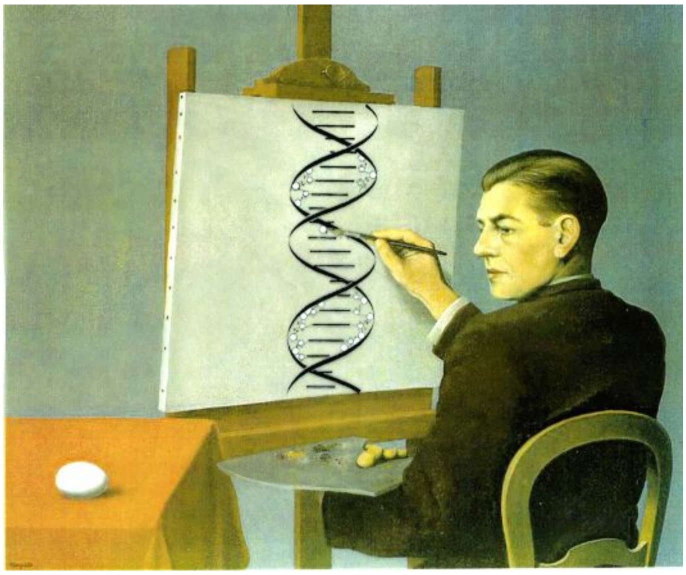
- Sergei BRIN et Larry PAGE, les fondateurs de Google.

Leur succès initial est dû au puissant moteur de recherche et d'indexation PageRank, qui a pour objet de déterminer le rang d'une page sur la toile pour un moteur de recherche. Il est fondé sur des marches aléatoires comme procédé de sommation géométrique.

- Fan CHUNG

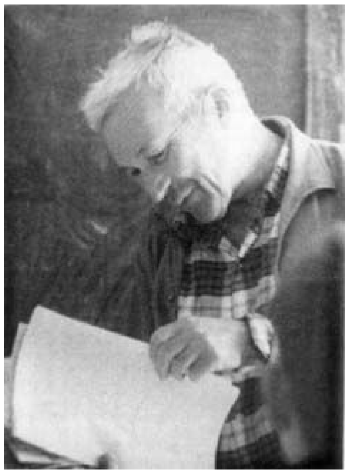
Elle a généralisé le concept à la base de PageRank à des marches aléatoires qui satisfont l'équation de la chaleur sur un graphe. Cela permet de généraliser au cadre discret des résultats obtenus dans le cadre continu. On en déduit des algorithmes de partition rapide d'un graphe. Ceci est relié à une constante qui, dans le cas continu, est une borne inférieure du niveau minimum d'énergie.

III. Contrôler l'aléatoire (l'âge d'or des probabilités et des statistiques)



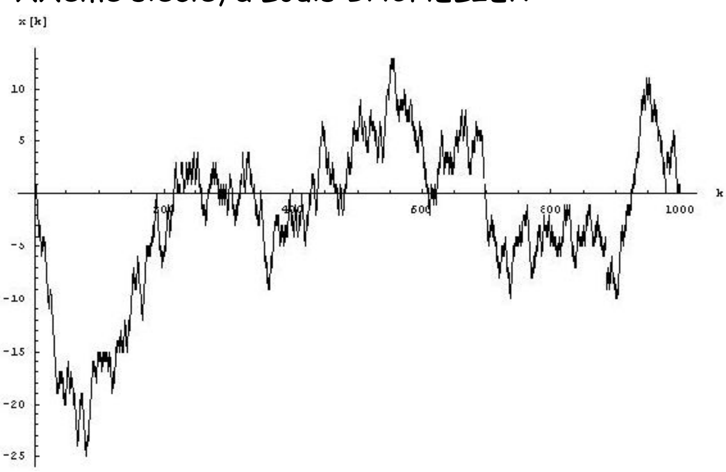
La clairvoyance (1936), modifiée 2008

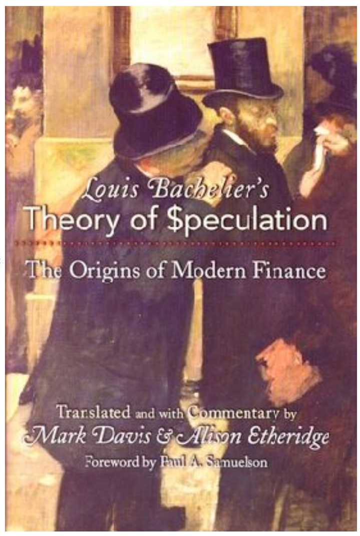
Tous les objets mathématiques considérés jusque là sont déterministes.
D'autres approches ont été développées plus récemment et ont donné naissance à de nouvelles branches des mathématiques : **approche statistique, approche stochastique**.



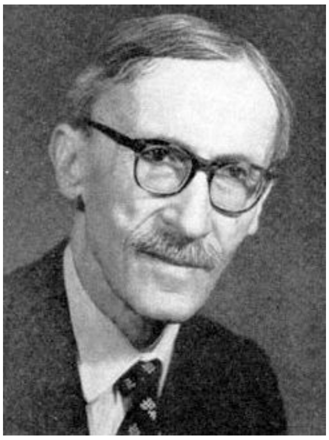
La théorie des probabilités a mis longtemps pour émerger comme théorie scientifique.
Elle était initialement stimulée par les considérations reliées à des questions sociales, comme la démographie, l'évaluation du risque d'accidents par les compagnies d'assurance. Cela supposait d'utiliser des données statistiques.
La théorie a eu nombre de précurseurs, mais Andrei N. KOLMOGOROV est certainement celui qui a donné sa forme finale aux fondements.
Le modèle aléatoire le plus simple est le **mouvement brownien**, obtenu à la limite en lançant une pièce non biaisée et en avançant de cette façon à chaque étape. Le concept vient du naturaliste Robert BROWN, qui, en 1823, a observé comment le pollen se déplace à la surface d'un liquide.

Les premières théories sont dues, à l'aube du XXème siècle, à Louis BACHELIER





et peu après à EINSTEIN dans un de ses papiers fameux de 1905.
Le graphe précédent montre qu'il faut considérer des objets très irréguliers.
Le tour de force a été de développer des outils permettant de calculer des espérances, et contrôler l'évolution de processus browniens ou même de processus plus complexes.



Cela a été rendu possible grâce aux contributions ultérieures importantes de Paul LÉVY et Kiyoshi ITÔ.
On doit à Kiyoshi ITÔ la définition d'une intégrale qui permet d'étendre le calcul intégral à des fonctions aléatoires. En prenant la discussion classique en finance, un modèle pour le prix S_t d'une action en fonction du temps serait $S_t^{-1}\, dS_t = \mu\, dt + v\, dW_t$, où μ représente le taux instantané de retour sur un bien sans risque, v la volatilité de l'action, et dW_t la variation infinitésimale du mouvement brownien dans l'intervalle dt . Le problème est de donner un sens à dW_t car les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas dérivables ! ITÔ s'en sort par un procédé d'approximation. L'intégrale classique de RIEMANN s'obtient par un procédé de limite (on définit d'abord l'intégrale des fonctions en escalier comme l'aire sous le graphe de la fonction ; on approxime ensuite la fonction à intégrer par des fonctions en escalier). Dans l'intégrale d'ITÔ on utilise comme briques élémentaires les processus simples i.e. les fonctions en escalier aléatoires. Les deux propriétés cruciales pour une fonction en escalier aléatoire a_t sont :

- $E(I(a_s\, dW_s)) = 0$, où E désigne l'espérance mathématique et I l'intégrale d' ITÔ ;
- l'espérance du carré est donnée par l'intégrale classique du carré de la fonction en escalier aléatoire.

IV. L'unité dynamique des mathématiques

La clairvoyance (1936), modifiée 2008

Le développement des mathématiques, continu tout au long de l'Histoire, mais particulièrement accéléré au XXème siècle, a conduit à la naissance de nouvelles branches des mathématiques et à de nouvelles interactions :

- avec l'avènement de l'informatique, une nouvelle insistance sur l'étude des structures discrètes ;
- les interfaces avec la biologie, la médecine, l'économie exigent une interaction forte avec les statistiques.

Les mathématiciens se préoccupent de l'unité de leur discipline, mais cela doit être compris comme un processus dynamique qui permet une **réorganisation interne permanente**.
Beaucoup de sujets actuels supposent la collaboration de branches différentes pour fusionner des points de vue. Pour comprendre par exemple les derniers développements de la physique théorique d'un point de vue mathématique, le point de vue stochastique est central mais on doit combiner aussi les points de vue algébrique, analytique et géométrique.
Cela pose la question de la nature des mathématiques :
C'est une science et pas seulement un langage ; on peut se risquer à dire que c'est la **science des structures**.
D'une façon plus philosophique, les découvre-t-on ou les invente-t-on ?
Par la présence des portraits, j'ai voulu souligner l'aspect « aventure humaine » en citant des figures hors du commun ; aujourd'hui, les mathématiques ont autant besoin d'un grand nombre de contributeurs.
Pour terminer je voudrais encore souligner trois points :

- L'avènement d'une société de l'information exige la manipulation de grandes quantités de données abstraites ;
- Les débouchés offerts par une formation en mathématiques se sont considérablement élargis ;
- Les besoins de connaissances de base en mathématiques par les citoyens sont beaucoup plus importants, et l'accès aux quatre piliers est une référence.