Bourbaki : 1945-75, Dialogue organisé par la Fondation Hugot du Collège de France, entre Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier, Jacques Dixmier et Alain Connes, Juin 2019.

Au sujet de la correspondance Serre-Grothendieck, Jean-Pierre Serre et Alain Connes.

Entre deux, temps et vérité, Alain Connes et Daniel Sibony.

Bourbaki : 1945-75
Dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
entre Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier,
Jacques Dixmier et Alain Connes
Juin 2019

Alain Connes : Donc nous sommes réunis pour parler de Bourbaki, mais de Bourbaki dans la période qu'on appelle l'âge d'or de Bourbaki et, en discutant avec Jacques, on a situé cet âge d'or disons sur 30 ans, entre 1945 et 1975. Je ne tiens pas à des limites précises bien entendu. Donc mon rôle sera simplement le rôle de modérateur dans la discussion et j'insisterai surtout bien sûr sur des témoignages personnels et non pas sur les généralités qu'on trouve dans la littérature, etc. Ce qui m'intéresse vraiment, c'est d'avoir des témoignages personnels et je commencerai à dire simplement que ce qui force l'admiration, quand on regarde cette période-là, c'est surtout, enfin d'abord, c'est l'effacement des ego dans cette tâche...

Jean-Pierre Serre : L'effacement des... ? *

Alain Connes : Des ego, des individualités.

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : L'effacement des ego, c'est-à-dire le fait que dès le départ, il était convenu qu'aucun des membres de Bourbaki n'attacherait son nom à ce qui était produit et en fait, je pense que ce n'est pas du tout étranger, ce fait qu'il y ait cet effacement des ego, avec ce que ça a engendré, bien sûr, on en parlera, au niveau mathématique, les réussites extraordinaires que ça a engendré, mais aussi, ça a engendré un esprit de fraternité, je dirai, dans la communauté mathématique, et cet esprit de fraternité est visible, pas seulement bien sûr à l'intérieur de Bourbaki, mais en fait, je pense qu'il a débordé de Bourbaki en soi et bien sûr, c'était dû... on ne peut pas dire que

∗. Transcription : Denise Vella-Chemla, 21.6.2019.

Bourbaki a pris le pouvoir, mais on peut dire qu'il y avait une telle panoplie de talents dans Bourbaki qu'en fait, je veux dire, ils ont été le modèle de toute une génération de mathématiciens, pas seulement français, mais aussi à l'étranger puisqu'il y a eu des étrangers qui ont participé à Bourbaki. Donc en fait, ça, c'est mon point de départ et la manière que j'ai envie d'utiliser pour vous faire participer, c'est de faire des tours de table sur des sujets assez spécifiques, mais, comme je le disais, j'ai envie de sujets qui n'ont pas leur réponse déjà dans la littérature, ou dans ce qu'on trouve sur internet, etc., mais qui auront des réponses tout à fait personnalisées. Donc, simplement pour voir si le tour de table marche et puis pour se chauffer, le premier sujet, c'est un sujet qui est assez simple, c'est la question suivante, "est-ce que vous connaissiez Bourbaki avant d'avoir été recruté ? Comment avez-vous été recruté ? Et quels sont vos souvenirs du premier congrès Bourbaki ?" Voilà. Donc je pense... Je ne sais pas dans quel ordre on peut procéder *(tendant la main vers Jean-Pierre Serre).*

Jean-Pierre Serre : Je pense qu'on pourrait répondre dans l'ordre dans lequel on a été pris, tu vois ? Or là, j'ai été pris en premier.

Alain Connes : Tu as été pris en premier ? D'accord.

Jean-Pierre Serre : En 49. Alors là, je peux répondre à toutes ces questions-là... parce que... la façon dont j'ai connu Bourbaki : alors, bien sûr, j'avais regardé les livres de Bourbaki ; il n'y en avait pas beaucoup. Il y avait la Topologie générale, chapitres 1 et 2, je crois, et il y avait Algèbre 1, je crois. Algèbre 2 n'était même pas sorti.

Alain Connes : Il y avait les fondements aussi ? *(rire de JD)*

Jean-Pierre Serre : Non, non, non, il n'y avait rien de tout ça.

Jacques Dixmier : Il y avait le fascicule de Résultats des ensembles.

Jean-Pierre Serre : Il y avait le fascicule de Résultats. Ca, c'était très utile d'ailleurs. Et alors, personnellement, ce qui s'est passé, c'est que j'ai passé l'agrégation et il y avait une épreuve d'analyse, bon, que j'avais plus ou moins comprise, pas beaucoup, du coup, et puis je rentre à l'Ecole Normale et là, Bourbaki avait un congrès qui était dans une salle et je suis rentré

par hasard dans cette salle...

Alain Connes : Ah, d'accord, tu es rentré par hasard dans cette salle, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Et puis j'ai vu qu'ils discutaient de questions qui étaient très voisines, tu vois, de celles qui étaient dans mon problème d'agrégation. Et du coup, ça m'a intrigué. Et j'ai appris comme ça par accident que le prochain congrès Bourbaki trois mois après, ça c'était tu vois, c'était en juin ou juillet 48, qu'en octobre ou novembre, il y aurait comme ça une réunion Bourbaki, à Nancy.

Alain Connes : A Nancy.

Jean-Pierre Serre : Rue de la Craffe. Alors à l'époque en question, j'étais avec ma femme à Auxerre, parce qu'elle avait été professeur à Auxerre, et j'ai rien demandé à personne, j'ai pris un billet de train et je suis parti pour Nancy...

Alain Connes : Bien sûr *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Oh, eh bien pour moi, il était normal que les maths ce soit ouvert, tu vois, je n'avais pas la moindre idée de politesse, qu'il fallait demander, non, non, je suis allé à Nancy, et là, il y avait un amphithéâtre et je me suis assis dans l'amphithéâtre ; ils discutaient de théorie des corps, je me souviens très bien, il y avait une proposition de Chevalley un peu extraordinaire qui était de supprimer la théorie de Galois *(rires)*, qu'il a transformée en un choix "ou bien vous la mettez, mais dans ce cas-là, vous mettez aussi les algèbres de Lie..."

Alain Connes : Première apparition des algèbres de Lie par Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Du coup, ils ont eu le bon sens de lui dire oui. Et je crois que je suis intervenu, parce que je pouvais intervenir tu vois, et je crois que je suis intervenu pour dire une bêtise dont je me souviendrai jusqu'à la fin de ma vie qui était que la théorie de Galois ne servait à rien, tu vois *(rires de tous)*. Et ça, ça m'a frappé, parce que tout le reste de ma vie, je m'en suis servi. Là, le bon Dieu ne m'a pas raté. Alors, ils ont été contents des

commentaires que je faisais sur les espaces vectoriels topologiques, des trucs faciles, comme ça, ils m'ont invité alors cette fois-ci pour le congrès d'après. Donc ça devait être en janvier, ou en février-mars.

Pierre Cartier : Ca devait être en 49.

Jean-Pierre Serre : En 50, euh, en 49. Au congrès d'après, ils m'ont dit "on te prend". Voilà, c'est comme ça que je suis rentré.

Alain Connes : Et qui il y avait à l'époque ? Donc il y avait Cartan, Dieudonné, Chevalley... ?

Jean-Pierre Serre : Non, mais j'ai forcé la porte de Bourbaki en quelque sorte.

Alain Connes : Oh, très bien, tu l'as ouverte, et elle est restée ouverte !

Jean-Pierre Serre, s'adressant à Jacques Dixmier : Alors voyons, alors, ensuite, je crois que c'est toi qu'on a pris ? On t'a pris en quelle année toi ?

Jacques Dixmier : Attends, avant toi, il y a eu Godement et Schwartz, qui ont été recrutés juste avant.

Jean-Pierre Serre : Mais oui, mais *(désignant AC)* il disait parmi nous trois.

Jacques Dixmier : Ah, parmi nous trois. Alors oui, après, c'est moi, oui.

Jean-Pierre Serre : C'est quelle année, toi ?

Jacques Dixmier : En 49. Tu as même été... vous étiez chargés, Samuel et toi, de me recruter.

Jean-Pierre Serre : Pour savoir si tu acceptais.

Jacques Dixmier : Et vous n'avez eu aucun effort à faire parce que, j'étais *(rires)*... Je dois... Avouons, j'étais flatté, et puis intéressé.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais ça te changeait les idées, quand-même aussi un petit peu.

Jacques Dixmier : Comment, ça me changeait les idées ?...

Jean-Pierre Serre : Par rapport aux espaces de Hilbert.

Jacques Dixmier : Et puis, ah oui, ça m'a énormément changé les idées, oui, alors là ! Et même tout de suite, je me suis rendu compte que ça m'intéressait plus que mes propres travaux, là, alors, immédiatement.

Alain Connes : Et le premier congrès alors ? Vas-y, raconte...

Jacques Dixmier : Le premier congrès, alors, en 49, mais alors à quel endroit c'était, je ne me rappelle pas. Attends, je reviens sur autre chose, on est un peu libres ? Sur ton introduction, parce qu'il y a un point sur lequel je ne suis pas d'accord, enfin, je veux me désolidariser, c'est que tu appelles ça l'âge d'or de Bourbaki. Alors ça l'est peut-être, je n'en sais rien, comme justement j'ai perdu complètement contact avec Bourbaki, ça m'embête de dire "c'est l'âge d'or de Bourbaki", alors que je ne sais rien de ce qui se passe ou presque rien de ce qui se passe depuis. Tu comprends que c'est prendre une position de supériorité qui est un peu déplaisante quand-même. Pour moi en tout cas.

Pierre Cartier : Je crois que c'est l'opinion générale hein.

Jean-Pierre Serre : (*désignant Alain Connes*) Disons que c'est son opinion à lui, parce que par exemple,

Jacques Dixmier : (*s'adressant à Alain Connes*) Bon, d'accord, c'est ton opinion à toi, d'accord.

Alain Connes : Pas seulement, c'est ce qui est écrit dans les livres qui parlent de Bourbaki, c'est tout. On va pas s'éterniser là-dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca sera pas écrit, de toute façon *(s'adressant à Alain Connes)*, tu l'as dit de toute façon, on ne peut pas le supprimer.

Alain Connes : Je l'ai dit, j'en prends la responsabilité.

Jean-Pierre Serre : Mais effectivement, j'étais un peu agacé quand Cartier a fait des laïus, et par écrit, lui, sur la mort de Bourbaki, que c'était fini parce qu'il n'était plus à Bourbaki, du coup, Bourbaki était mort.

Alain Connes : Eh bien, la mort de Bourbaki a été annoncée, comme vous le savez, en 1968.

Tous ensemble : C'était un canular.

Jean-Pierre Serre : C'était un canular stupide.

Jacques Dixmier : Oh, stupide, il était pas plus idiot que beaucoup de canulars.

Jean-Pierre Serre : Non mais c'est beaucoup dire, ça, déjà *(rires).*

Jean-Pierre Serre : Bon donc ça, c'est ton entrée dans Bourbaki. *(Se tournant vers Pierre Cartier)* Et toi Cartier, c'est un peu plus compliqué, parce que tu es rentré deux fois en quelque sorte ?

Pierre Cartier : Oui, oui, bon alors, comment est-ce que je connaissais Bourbaki ? Eh bien, évidemment, les livres de Bourbaki, je les connaissais. Je les ai découverts quand j'étais potache vers 16 ans parce que mon parrain qui était prof à Henri IV a voulu me faire un cadeau pour je sais plus pour quelle occasion, il m'a emmené chez Hermann, il m'a laissé là, tout l'après-midi dans la boutique, et quand il est revenu, il a sorti le chèque qu'il avait rédigé d'avance et le libraire avait calculé exactement, il lui avait dit d'avance... Bon et je me souviens, je crois que j'avais choisi la topologie générale de Bourbaki parmi d'autres livres, il y avait aussi les livres de Lichné [†]. Et mon parrain me dit "Tu sais qui est Bourbaki ?", "Ah non, pas du tout", "Tu sais qui est Simone Weil ?", j'ai dit "Tu m'en as beaucoup parlé !". Parce qu'ils avaient été normaliens ensemble. "Elle a un frère, André Weil, qui a fondé un groupe qui s'appelle Bourbaki et peut-être qu'un jour, tu les connaitras.". Alors je

†. Lichnerowicz

me suis précipité, j'ai passé tout mon été à essayer de le lire. La difficulté, c'est que je n'avais pas le fascicule de résumés de théorie des ensembles. Et donc toutes ces notations, je ne les connaissais pas. Et donc j'ai eu du mal à les reconstituer.

Alain Connes : Et qu'est-ce qu'il y avait comme chapitres de topologie générale, 1 et 2 ?

Pierre Cartier : 1 et 2, 1 et 2.

Alain Connes : 1 et 2 seulement, il n'y avait pas les nombres réels.

Jean-Pierre Serre : Mais y avait pas mal de choses quand-même.

Jean-Pierre Serre : Il y avait les compacts, par exemple.

Alain Connes : Il y avait les structures uniformes.

Pierre Cartier : Il y avait des choses, mais la terminologie des ensembles n'était pas réexpliquée. C'est ça qui m'a posé difficulté. Alors bon, donc, voilà comment j'en avais entendu parler. Et puis, comment est-ce que ça s'est passé. Eh bien, ma première année à l'école, il y avait un séminaire Cartan où Eilenberg était, Samuel Eilenberg était là.

Jean-Pierre Serre : C'est quelle année ça ?

Pierre Cartier : C'est 50. Moi, je suis rentré en 50. Il y a un séminaire 50-51, un des grands séminaires de Cartan, Eilenberg avait parlé de la cohomologie, ensuite il y avait les faisceaux, enfin il y avait beaucoup de choses. Et Eilenberg avait fait un cours en parallèle là-dessus auquel j'ai assisté bon et j'avoue que j'étais très bon, on s'est très bien entendus Eilenberg et moi et je pense que c'est lui qui a dit à Cartan "Tu devrais l'inviter, on devrait l'inviter", alors j'étais comme cobaye en juin 51. Et je suis arrivé, alors Cartan avait une petite réserve parce que je devais passer je ne sais plus quel examen de licence et je l'ai séché en promettant à Cartan que je le passerais en septembre et que je l'aurais *(rires)*. Et je l'ai eu, enfin bon. Alors je suis arrivé et c'était à Pelvoux-le-Pouët, lieu historique, je suis arrivé là, et j'ai vu tout le monde. Il y avait Cartan bien sûr, il y avait Schwartz, je me

souviens fort bien de Schwartz, je me souviens de Dieudonné, je me souviens de Godement, enfin, de tout ça, tout ça était très très agité. Cet endroit, Pelvoux-le-Pouët, on y est allés un certain nombre de fois, il y avait une petite auberge sympathique et la légende veut, je ne peux plus la garantir, la légende veut qu'un jour Weil et Dieudonné se soient tellement engueulés que la patronne du restaurant, de l'auberge, a eu peur et qu'elle a dit à son fils "Va donc chercher les gendarmes." et quelqu'un l'a rassurée "Mais non, mais non, il ne se passera rien, rassurez-vous, on va pas s'étriper.". Donc ça, c'était mon premier congrès, et je me souviens qu'on a discuté des groupes de Lie, bon, il y avait un rapport de Schwartz sur les groupes de Lie.

Alain Connes : De Schwartz pas de Chevalley alors ?

Jean-Pierre Serre : Il y a eu aussi Weil après mais enfin, Weil, c'était pas les groupes de Lie, c'était les variétés, c'était pas les groupes de Lie, si, c'est Schwartz.

Pierre Cartier : Schwartz avait fait les groupes de Lie et je me souviens qu'il y avait l'abréviation Pass.Ad. Je ne sais plus pourquoi. *(S'adressant à JPS)* Pass. et Ad., Ad. adjoint, je ne sais plus ce que ça voulait dire, ça avait fait rire tout le monde, évidemment, passade. C'est là que j'ai appris par exemple, là, il y avait une chose qui m'a beaucoup inspiré, c'était un théorème de Schwartz que *l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe, c'était l'algèbre des distributions ayant pour support l'origine pour la convolution.* Et ça, ça m'a énormément inspiré ensuite, ça. J'ai démarré, ma thèse a démarré là-dessus, sur ces idées-là. Bon qu'est-ce qui s'est passé. On a fait une expédition au glacier blanc.

Jacques Dixmier : Pas moi.

Pierre Cartier : Mais il y a encore des photos qui traînent un peu partout sur cette expédition, on est tous photographiés, et alors Weil nous avait persuadés, ou le guide nous avait persuadés qu'il fallait porter un béret de chasseur alpin. On ne pouvait pas faire une expédition de montagne sans mettre un béret de chasseur alpin. Et Weil était très fier de son béret de chasseur alpin et *(s'adressant à JPS)* il me semble que tu avais fait un dévissage d'ailleurs là ? !...

Jean-Pierre Serre : Et que je n'avais pas de béret non plus ! Mais par contre, j'ai dévalé une pente, ils ont été un petit peu inquiets, en particulier Cartan, de me voir dégringoler. Et puis je me suis arrêté au bas de la pente et puis voilà.

Pierre Cartier : Tu as quand-même dévissé de 50 ou 100 mètres hein ?

Jean-Pierre Serre : Oui mais c'était une pente qui n'était pas verticale, elle était inclinée suffisamment pour que ça continue, tu vois *(mines impressionnées de AC et JD)* oui mais ça se terminait par le glacier tu vois, c'était pas...

Pierre Cartier : Et alors, je me souviens aussi que c'est là que j'ai fait la connaissance de Chevalley par exemple. Et Chevalley, il était là avec sa fille, parce qu'il venait de se remarier et il était là avec sa fille Catherine qui avait 2 ans. Tout ça, ce sont mes souvenirs de ce premier congrès.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est le second ou c'est le premier congrès, ça ? Parce que tu n'as pas été pris à ce moment-là ?

Pierre Cartier : J'ai été pris plusieurs années après, en 54.

Alain Connes : Ah, tu as été pris plusieurs années après, d'accord.

Jacques Dixmier : *(s'adressant à PC)* Sauf erreur, mais je ne me fie pas trop à ma mémoire, j'étais chargé de te recruter, ainsi que Bruhat. Mais est-ce que ça concorde avec tes propres souvenirs ?

Pierre Cartier : Oui, oui, on a été recrutés, Bruhat et moi, à peu près au même moment, je sais.

Jacques Dixmier : Ah non, non, non, on n'a pas été recrutés au même moment. Moi c'était en 49 et toi, tu dis en 54.

Alain Connes : Non, non, il parle de Bruhat et lui.

Jacques Dixmier : Oui, Bruhat et toi, enfin, dans mon souvenir, Bourbaki m'a dit "recrute-les", enfin, "dis-leur qu'on les recrute", c'était pas moi qui

recrutais, c'était Bourbaki bien sûr.

Pierre Cartier : Est-ce que tu te souviens du recrutement de Koszul ?

Jean-Pierre Serre : Oui, j'allais en parler aussi parce que ça avait été assez rigolo.

Jacques Dixmier : Non mais alors, on sort de nous trois, là.

Alain Connes : Non, non mais bien sûr, allez-y, allez-y.

Jean-Pierre Serre : Alors Koszul, on avait décidé de le prendre, et on avait chargé Cartan de le "contacter". Et alors à un congrès suivant, on a demandé à Cartan "Alors, tu as contacté Koszul ?" "Oui, enfin non, il a rien dit, enfin...". Au bout de 6 mois, *(s'adressant à Jacques Dixmier)* enfin, tu t'en souviens sans doute.

Jacques Dixmier : Les dates, les durées, non, je ne me souviens pas des durées, non, la morale, je me souviens.

Jean-Pierre Serre : Au bout d'un an, enfin, au bout d'un certain temps quand-même on s'est dit "Quelqu'un d'autre..." *(à JD)* toi, peut-être ?

Jacques Dixmier : Non, c'est pas moi.

Jean-Pierre Serre : C'est pas moi. Je sais plus qui d'entre nous a dit "Va demander à Koszul". On a demandé à Koszul qui a dit instantanément oui et on lui a demandé "Mais Cartan ne t'a pas demandé ?" "Non, j'avais pas compris...". Cartan avait été si discret, tu vois, que Koszul n'avait pas compris qu'il était invité *(rires)*.

Pïerre Cartier : C'était ça le truc.

Jacques Dixmier : Faut dire que Cartan était le patron de thèse de Koszul, peut-être que ça rendait les relations un tout petit peu plus formelles.

Pierre Cartier : Cartan était le patron de thèse de pratiquement tout le monde, au moins officiellement.

Jean-Pierre Serre : Il n'était pas formel mais il était...

Jacques Dixmier : Il n'était pas bon directeur de thèse.

Jean-Pierre Serre : Il était très poli, quand-même, il pouvait...

Alain Connes : C'est sûr, il était très poli, donc peut-être qu'effectivement...

Jean-Pierre Serre : Où est-ce que c'est, je crois que c'est dans Proust, qu'il y a comme ça, tout à fait au début, il y a une histoire en effet d'une tante, qui demande...

Alain Connes : Mais bien sûr ! Non, mais qui veut remercier Swan pour avoir donné des bouteilles de vin.

Jean-Pierre Serre : Remercier Swan, c'est ça, elles le font d'une façon si discrète...

Alain Connes : Elles le font de manière tellement discrète que finalement...

Jean-Pierre Serre : ... que personne ne s'en rend compte.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, j'avais envie d'en parler de ce passage de Proust, parce que ça m'évoquait exactement ça, exactement.

Jean-Pierre Serre : Cartan s'est comporté comme ça.

Alain Connes : Bon, alors donc je vois que le tour de table marche bien. Donc on va maintenant aborder une question un peu plus délicate.

Jacques Dixmier : Attends, si tu parles des recrutements alors, on parle des recrutements ou pas ? On a parlé de nos recrutements à nous trois.

Alain Connes : Tu peux parler de recrutements.

Jacques Dixmier : On vient de parler de celui de Koszul. Il y a d'autres recrutements, par exemple Grothendieck, le recrutement de Grothendieck.

Alain Connes : Ca a été fait en quelle année, le recrutement de Grothendieck ?

Jacques Dixmier : C'était à Nancy, Grothendieck est allé comme jeune élève.

Jean-Pierre Serre : Ah non non, il n'était pas du tout dans Bourbaki quand il était à Nancy, il a été pris nettement après tu vois.

Jacques Dixmier : Enfin c'est lié quand-même, écoute, il est allé à Nancy tout de suite après ses études en faculté, il a...

Jean-Pierre Serre : Non il a été élève de membres de Bourbaki mais c'est pas pareil.

Alain Connes : De Schwartz et Dieudonné.

Jacques Dixmier : Il était élève de Schwartz et Dieudonné, c'est ça, mais Schwartz et Dieudonné ont dit tout de suite "il est formidable" alors...

Jean-Pierre Serre, Alain Connes, ensemble : Ah mais c'est pas pareil ! !

Jean-Pierre Serre : *(poursuivant)* C'est tout-à-fait différent : on n'a pas pensé du tout à le prendre comme membre du groupe Bourbaki tout de suite, ça, je suis presque sûr.

Jacques Dixmier : Alors là, mes souvenirs ne sont pas assez précis, je peux rien dire, ça m'étonne un peu mais enfin, bon... Moi je dirais qu'il a été recruté en 55, par là.

Jean-Pierre Serre : Oui, moi aussi.

Jacques Dixmier : *(désignant Pierre Cartier)* C'est-à-dire juste après toi, tout au moins, ton recrutement officiel.

Pierre Cartier : A peu près au même moment, à peu près au même moment.

Jean-Pierre Serre : Non mais on ne va pas passer en revue les membres de Bourbaki.

Jacques Dixmier : Ben je n'sais pas...

Pierre Cartier : Non, il y a les archives qui permettent de savoir.

Jean-Pierre Serre : On va revenir, revenons à nous, plutôt.

Jacques Dixmier : Les recrutements des membres postérieurs à nous font partie de nos souvenirs personnels.

Jean-Pierre Serre : Il y en a eu des tas d'un peu bizarres, tu vois, par exemple, Atiyah a été invité une fois, et il n'est pas revenu.

Alain Connes : Mac Lane est venu une fois aussi.

Jean-Pierre Serre : Alors lui, il était même pas, c'est pas pareil, il était venu comme visiteur tu vois, c'est pas pareil.

Jacques Dixmier : Non mais le recrutement de Borel, par exemple, là, tu dois avoir des souvenirs. Et c'est intéressant parce que ça doit être un des premiers non-normaliens qu'on a recrutés.

Alain Connes : Etranger tu veux dire.

Pierre Cartier : Et un des premiers étrangers en plus.

Alain Connes : Et Eilenberg non ? Eilenberg avait été recruté avant.

Pierre Cartier : Eilenberg, c'est en 50.

Jean-Pierre Serre : Je ne sais pas quand c'était, Eilenberg, c'était en 50 ?

Pierre Cartier : Si j'en suis certain, c'était en 50.

Alain Connes : Donc, c'est Eilenberg le premier étranger à avoir été recruté.

Pierre Cartier : C'est quand il est venu à Paris, l'année qu'il a passée à Paris.

Alain Connes : Et Tate alors, quand est-ce qu'il a été recruté ?

Jean-Pierre Serre : C'est nettement plus tard, mais effectivement, il est venu plusieurs fois. Ca a pas été du tout illusoire, comme Atiyah, tu vois, non.

Alain Connes : Atiyah est venu une fois, alors ?

Jean-Pierre Serre : Une fois, et puis ça ne lui a pas plu, quoi, ça ne correspondait pas...

Pierre Cartier : A sa manière de faire, c'est certain.

Alain Connes : Alors je vais aborder une autre question, la question suivante. C'est une question qui a à voir avec les maths de Bourbaki, mais pour être beaucoup plus spécifique que ça, la question que je voudrais vous poser, c'est "comment est-ce que vous conciliiez votre propre travail de recherche avec le travail que vous aviez à faire pour Bourbaki, les rédactions, etc., et est-ce qu'il y avait des relations dans un sens et dans l'autre, c'est-à-dire, est-ce que le travail pour Bourbaki vous influençait pour votre propre travail et inversement. Ca, pour moi, c'est une question capitale.

Jean-Pierre Serre : Il faudrait que tu choisisses un ordre, parce que...

Alain Connes : Eh bien, on peut respecter le même ordre que tout à l'heure puisque ça permet de...

Jean-Pierre Serre : Je commence alors.

Alain Connes : Oui tu commences.

Jean-Pierre Serre : C'est difficile à dire. J'ai toujours eu un grand plaisir à travailler pour Bourbaki.

Alain Connes : Ah bon ?

Jean-Pierre Serre : Moi, c'était un grand plaisir.

Pierre Cartier : Un grand... plaisir ?

Jean-Pierre Serre : Plaisir parce que à la fois, j'essayais de le rédiger aussi bien que possible mais en même temps, je savais que quelqu'un d'autre le reprendrait après, et le corrigerait.

Alain Connes : Donc tu étais tranquille, oui, d'accord, je comprends.

Jean-Pierre Serre : Alors je pouvais me laisser aller, tu vois.

Alain Connes : Tu avais une sécurité, tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Et alors le style de Bourbaki évidemment me convenait parfaitement. Pour rédiger mes propres articles, si possible, je suivais le style de Bourbaki, je faisais comme si je rédigeais pour Bourbaki, en expliquant un petit peu.

Alain Connes : Mais dans quel sens c'est allé, je veux dire, quand tu écrivais des articles après avoir, puisque tu as commencé très tôt avec Bourbaki, donc en fait, tu as suivi ce style-là dès que tu as commencé à écrire.

Jean-Pierre Serre : C'était mon style spontané en fait, curieusement. Dès que j'ai commencé, je rédigeais naturellement dans ce style-là.

Alain Connes : D'accord, et tu tapais à la machine, comment tu faisais ?

Jean-Pierre Serre : Je tapais, oui, j'avais une machine à écrire, et puis à l'époque, on tapait très facilement parce que quand ça n'allait pas, on tapait des X sur ce qu'on voulait effacer, on faisait des lettres à la main s'il le fallait, c'était épatant ça. Alors, point de vue influence...

Alain Connes : Oui point de vue influence, dans les deux sens, voilà, c'est ça qui m'intéresse.

Jean-Pierre Serre : Oh, hummf, j'ai peut-être influencé Bourbaki un peu, c'est difficile, une personne déterminée, à part Weil, n'influençait pas vraiment Bourbaki, quand-même.

Pierre Cartier : Sauf l'algèbre commutative, quand-même.

Jacques Dixmier : C'est lui qui parle, mais on pourra corriger après.

Alain Connes : Tu corrigeras après, bien sûr. Non parce que...

Jean-Pierre Serre : Non, je ne crois pas que j'aie poussé, bon, en algèbre commutative, j'ai poussé un petit peu, j'ai aidé. J'avais le sentiment d'aider, et puis surtout, j'avais ce sentiment sur Bourbaki, que c'est une œuvre, quelque-chose de salut public, d'espace public.

Alain Connes : C'est ce que j'essayais de dire au début.

Jean-Pierre Serre : Que c'est fait pour rendre service. Ca, les gens ne l'ont absolument pas compris ça, les gens qui commentent Bourbaki... Et également, ça je l'avais bien compris, parce que dans la discussion, c'était clair, que ce qui est fait dans Bourbaki, c'étaient pas les maths spécialement intéressantes, c'étaient les maths utiles pour faire des choses intéressantes.

Alain Connes : Pour faire des maths intéressantes, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et ça, c'est différent. Je veux dire on devait prendre, un peu comme si dans une cuisine, où tu as du sel bien pur, où tu as ceci-celà et ça, c'est pas de la cuisine. La cuisine, c'est de les mélanger et de faire des choses...

Alain Connes : C'est les outils qui sont au point, et puis après, on s'en sert.

Jean-Pierre Serre : De nettoyer, de préparer bien les outils, pour qu'après, on puisse s'en servir. Et ça, malheureusement, les gens qui ont commenté Bourbaki n'y ont rien compris. Ils ont vu ça comme une entreprise de pou-

voir, par exemple, à la Bourdieu, quoi, bon *(geste évasif)*.

Alain Connes : Et dans l'autre sens ? Est-ce que ce que tu faisais pour Bourbaki t'a influencé pour tes propres recherches ?

Jean-Pierre Serre : Le style m'a influencé forcément, tu vois. Mais j'ai pas eu l'idée de travailler sur des sujets de Bourbaki, ça n'a pas de sens, ça, mais de m'en servir.

Alain Connes : Ah, si, quand-même, si, quand-même, laisse-moi te poser une question plus précise, par exemple, lorsque les groupes de Lie ont été traités, dans Bourbaki, etc., est-ce que ça, ça a pu t'influencer à faire des choses sur les algèbres de Lie ou sur les groupes de Lie... ?

Jean-Pierre Serre : Non, c'est le contraire, j'en avais besoin pour ce que je faisais, des groupes l-adiques, des trucs comme ça, et au contraire, c'est plutôt que ça m'a donné plus d'enthousiasme pour, dans Bourbaki, insister pour que les réseaux de Lie ne soient pas sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alain Connes : Bon, alors j'ai une autre question un peu plus précise, c'est, quand on voit par exemple, la preuve de Dwork sur... on voit bien qu'il faut utiliser des espaces de Banach p-adiques, etc., est-ce que ça, c'est toi qui as insisté pour que les E.V.T. [‡] aussi soient faits dans le cadre p-adique.

Jean-Pierre Serre : Non, ça c'était déjà fait je crois. D'ailleurs, ils n'ont pas été tellement bien faits du point de vue p-adique, c'est pas utilisable...

Alain Connes : Non, c'est trop, c'est trop superficiel.

Jean-Pierre Serre : Non, non, c'était déjà... Dieudonné, de lui-même, avait dit "un corps muni d'une norme" et puis voilà quoi.

Alain Connes : Et puis on fait tout là-dessus, d'accord.

Jean-Pierre Serre : On fait tout mais on fait rien d'intéressant. Les choses intéressantes, c'est Hahn-Banach, et tout.

‡. E.V.T. = Espaces Vectoriels Topologiques.

Alain Connes : Ca c'est sur $\mathbb{R}$ aussi.

Jean-Pierre Serre : Sauf le théorème de Banach, il est aussi vrai sur les p-adiques, sur les graphes fermés.

Alain Connes : Quand-même, oui, il y avait quand-même quelque-chose.

Jacques Dixmier : Sur les espaces de dimension finie, localement compacts.

Alain Connes : Alors Jacques, vas-y.

Jacques Dixmier : D'une part, Bourbaki m'a énormément influencé dans mes travaux personnels.

Alain Connes : Alors ça, c'est très important.

Jacques Dixmier : Et même les 3/4 de ce que j'ai fait ont été influencés par Bourbaki. Si j'avais pas été dans Bourbaki, j'aurais travaillé sur les espaces de Hilbert toute ma vie.

Jean-Pierre Serre : Peut-être mais peut-être pas quand-même.

Jacques Dixmier : J'ai tout de même fait d'autres choses. Et c'est grâce à Bourbaki.

Alain Connes : C'est grâce à Bourbaki, ah oui ? ! Ca c'est fort quand-même.

Pierre Cartier : *(taquin, désignant AC)* Il y en a d'autres qui s'occupent des espaces de Hilbert.

Alain Connes : Non, mais pas que ça, non, non.

Jean-Pierre Serre : Tu sais qu'on disait ça de Dieudonné aussi, que s'il n'y avait pas eu Bourbaki, il aurait continué sur les polynômes à une variable

parce que c'était ça son seul sujet.

Jacques Dixmier : Je ne suis pas le seul sûrement, je suis un peu Dieudonné au petit pied, si tu veux : j'ai rédigé beaucoup. Alors là, mon rôle dans Bourbaki n'a pas été un rôle... *(s'interrompant)* Alors, d'abord, quand-même, je reprends ce qu'il dit lui *(désignant JPS)*, quand il dit qu'il n'a pas eu d'influence sur Bourbaki, c'est un contresens énorme.

Jean-Pierre Serre : Tu me fais plaisir mais...

Jacques Dixmier : Non mais attends, il faut distinguer deux parties : à partir du moment si tu veux où les membres fondateurs sont partis, ils ont commencé à partir avec la loi des 50 ans en 54, Cartan avait 50 ans, il est parti. A ce moment-là, eh bien, c'est toi et Borel qui avez influencé Bourbaki et ses directions générales.

Jean-Pierre Serre : C'est pas si précis que ça, quand-même, c'était vraiment collectif, quand-même, mais ça a aidé.

Jacques Dixmier : Si tu compares l'influence que tu as eue sur Bourbaki et l'influence que j'ai eue sur Bourbaki, j'vais pas mettre ça sur le même plan. Par contre, j'ai rendu grand service sur Bourbaki parce que, comme Dieudonné, je rédigeais énormément. Alors 10 fois moins que Dieudonné, parce que Dieudonné, il est hors concours *(rires)* mais enfin, je... Bon alors, encore une fois, ce point étant réglé, de mon point de vue, Bourbaki m'a influencé en m'apprenant énormément de choses.

Alain Connes : Des choses nouvelles que tu ne connaissais pas, d'accord.

Jacques Dixmier : Et bon, du même coup, j'ai parlé de mon influence sur Bourbaki, en tant que rédacteur.

Alain Connes : Pas seulement, quand-même, tu n'as pas seulement...

Jacques Dixmier : Non, je n'ai pas influencé Bourbaki autrement qu'en facilitant le travail, en rédigeant beaucoup.

Alain Connes : Mais attends, pour une question un tout petit peu plus

précise, c'est que, si tu veux, il y a eu quand-même, dans Bourbaki, des contributions *nouvelles*, je veux dire, Serre a raison de dire qu'on ne peut pas situer cela du tout sur le même plan puisqu'on mettait au point des outils, mais par exemple, avant 45, il y avait les filtres et les ultra-filtres, qui avaient été quand-même mis au point par Bourbaki, et qui n'existaient pas avant. Donc la question que je pose, c'est...

Jean-Pierre Serre : Mais c'est vraiment pas une des choses les plus importantes, alors ça, personne ne s'en sert en réalité, je pense.

Pierre Cartier : C'est pas vrai.

Alain Connes : Si, les ultra-filtres...

Pierre Cartier et Alain Connes : Si en logique, ils les utilisent.

Jean-Pierre Serre : *(accompagnant sa parole d'un geste)* Oh oui bon...

Alain Connes : Mais peu importe, mais ce que je veux dire, c'est en quel sens, la question était un petit peu plus précise, en quel sens il y a eu une créativité de concepts, etc.

Jacques Dixmier : Oui, tu m'as déjà posé la question en dehors de cette réunion, il faut distinguer.

Alain Connes : C'était pas le but, bien sûr.

Jacques Dixmier : Oui, pendant les congrès-mêmes, je ne crois pas qu'il y ait beaucoup de... Par exemple, un exemple qui m'est venu à l'esprit, les idéaux associés, pour faire la décomposition primaire, c'est une création de Chevalley, il l'a fait en dehors d'un congrès : il est arrivé, il a fait une rédaction, c'est apparu dans une rédaction Bourbaki.

Alain Connes : Ah quand-même, oui donc ça veut dire...

Jacques Dixmier : Pour le monde extérieur, c'est une invention de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah tu penses que ça n'existait pas avant ?

Jacques Dixmier : Ca n'existait pas avant. En tout cas, Samuel[§] me l'a affirmé et Samuel connaît parfaitement la question, et il était d'ailleurs un peu indigné, Samuel, parce que quand il y a eu la revue de ce bouquin aux Maths reviews, aucune allusion au fait que c'était un point-de-vue nouveau mais ça, ça n'a pas d'importance.

Jean-Pierre Serre : Ca n'a pas d'importance.

Jacques Dixmier : Les revues sont souvent déconnantes.

Jean-Pierre Serre : Non, c'est pas ça, quand il y a des choses nouvelles dans un texte, c'est justement ce que le reviewer ne comprend pas, tu vois, donc il n'en parle pas, c'est sûr.

Jacques Dixmier : Ah oui, mais là, c'était l'essentiel du chapitre, enfin bon, passons.

Jean-Pierre Serre : Non, c'est pas l'essentiel.

Jacques Dixmier : Un autre exemple, alors. Alors là, ça s'est quand-même passé pendant un congrès, donc je vais t'en parler, on discutait du chapitre 5 d'intégration et on lisait, si mes souvenirs sont exacts, une rédaction de Dieudonné, il y a beaucoup de choses dans le chapitre 5, il y avait les mesures produits, les mesures images, les mesures induites, les mesures à densité, et brusquement, Schwartz a eu une idée qui unifiait tout ça : au lieu que ça soit 4 ou 5 *(gestes des deux mains comme s'il tournait une manivelle)*, où on recommençait à chaque fois, pour démontrer les théorèmes, il a eu une idée qui unifiait tout.

Jean-Pierre Serre : Et qu'est-ce que c'était, j'ai oublié ?

Pierre Cartier : Familles de mesures.

Jean-Pierre Serre : Familles, c'est ça ?

§. Pierre Samuel.

Jacques Dixmier : Ce que Choquet a appelé les diffusions après...

Jean-Pierre Serre : Non, non, ça s'appelait pas diffusions dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Ca correspond aux diffusions des probabilités.

Jacques Dixmier : Enfin bref, tu prends une mesure qui n'est pas d'un paramètre, et ce paramètre est lui-même dans un espace mesuré, et il faut intégrer.

Jean-Pierre Serre : Et ça donne les différents cas, ça ?

Jacques Dixmier : Ca contient tous les différents cas. Alors, je m'en souviens d'autant mieux que ça a enthousiasmé tout le monde, je crois on peut le dire, moi en particulier et j'ai été chargé de la rédaction.

Alain Connes : La rédaction d'après tu veux dire ?

Jacques Dixmier : La rédaction suivante, j'ai rédigé ça, ça m'a pris plusieurs mois. J'étais emballé là, *(puis riant franchement)* quand ça a été lu en congrès, ça a été sérieusement écrémé.

Jean-Pierre Serre : On était habitué à ça.

Jacques Dixmier : C'est passé dans les exercices...

Alain Connes : Ca fait rien, c'est un point très important, je pense, parce que si tu veux...

Jacques Dixmier : Mais c'est pas des nouvelles maths.

Alain Connes : Ah non mais quand-même, ce qui est intéressant je pense, ce qu'on voudrait savoir en fait, c'est lorsqu'il y avait des lectures en commun, comme ça se passait tout le temps...

Jacques Dixmier : Eh bien, oui, puisque c'était le principe.

Jean-Pierre Serre : Est-ce que tu veux en parler de ça, peut-être, des lectures à haute voix, parce que c'est très important dans Bourbaki.

Alain Connes : Absolument ! ! Bon, je remets ça à un peu plus tard, alors, d'accord, ce sera le sujet suivant. Mais effectivement, c'est un point très important. Finalement, c'est le seul moment où il y avait une réflexion commune qui se produisait. Alors Pierre maintenant. Donc Pierre, l'influence de tes maths sur Bourbaki et de Bourbaki sur tes maths.

Pierre Cartier : Je peux dire que pendant presque 30 ans, j'ai consacré 1/3 de mon activité scientifique à Bourbaki.

Alain Connes : 1/3, donc oui, d'accord.

Pierre Cartier : 1/3 à peu près, quand-même, en volume : les rédactions à faire, les tribus éventuellement que je faisais quand ce n'était plus toi *(à l'adresse de JD)* qui les faisais, les corrections d'épreuve, enfin, bon là, j'ai vraiment beaucoup, beaucoup... je dirais à peu près 1/3 de mon activité. C'était chronophage.

Alain Connes : 1/3 de ton activité, c'est énorme.

Jacques Dixmier : Et le procès ?

Alain Connes : Non, non, ça n'en parlons pas encore.

Jean-Pierre Serre : Oh, mon Dieu, non.

Jacques Dixmier : Oui, mais chronophage.

Pierre Cartier : Non le procès, je n'en parle pas. D'un autre côté, mes intérêts propres, scientifiques, n'ont pas toujours coïncidé avec ceux de Bourbaki ; par exemple, je me suis beaucoup intéressé aux probabilités, à une époque où Bourbaki s'y intéressait pas beaucoup.

Jean-Pierre Serre : Schwartz quand-même, Schwartz s'y intéressait.

Alain Connes : *(en riant)* Mais pas Dieudonné, hein.

Jacques Dixmier : Je coupe, Cartier s'intéresse à tout, alors forcément il a débordé Bourbaki.

Alain Connes : Non, non, non, mais là il a en tête quelque-chose de très particulier, oui oui, bien sûr.

Pierre Cartier : Bon, mais il est vrai que la gymnastique de rédiger dans un style imposé, parce que c'était un style très imposé, ça vous forme, ça, c'est clair que ça vous forme. Et alors d'un autre côté, si tu veux pour mes intérêts scientifiques, j'ai dit que j'avais beaucoup travaillé sur les probabilités, ce qui n'était pas dans les lignes de mire de Bourbaki, mais j'ai aussi beaucoup travaillé sur les groupes de Lie, sur des choses comme ça, et alors là, bon ben je veux dire que c'est certain, la rédaction des livres sur les groupes de Lie, ça a été pour moi un moment crucial. Et d'ailleurs je racontais tout à l'heure que je viens enfin de terminer une démonstration commencée il y a 60 ans sur ce sujet-là.

Jean-Pierre Serre : *(hochement de tête très intéressé)* Ah ? !

Pierre Cartier : Construire le schéma sur les entiers associé à un groupe de Lie semi-simple... Bon, j'ai une nouvelle démonstration qui m'a pris 60 ans à mettre au point.

Alain Connes : On parlait de l'article de Chevalley de 55.

Jean-Pierre Serre : Mais il faut qu'elle soit complète, cette démonstration-là. Parce qu'il y a des tas de gens (Kostant, etc.) en ont fait mais qui ne sont pas, toi aussi, tu en avais fait, et où il n'y avait pas les détails qu'il faut, donc ça ne servait à rien.

Pierre Cartier : Il y aura tous les détails, là, je te le garantis.

Jean-Pierre Serre : Il faut vraiment qu'il y ait tous les détails, hein.

Pierre Cartier : Non mais ça je suis d'accord, je connais le sujet. Bon enfin, bon. Disons que je me suis emballé pour beaucoup des projets que

Bourbaki a faits. Par exemple, on parlait de probabilités, le seul endroit où on s'approche des probabilités, c'est le dernier livre sur l'intégration.

Jacques Dixmier : Dernier "chapitre", Monsieur.

Pierre Cartier : Ah oui, dernier chapitre. Chapitre 9... qui a été fait sous l'impulsion de Schwartz, et essentiellement rédigé par Paul-André Meyer, qui n'était pas de Bourbaki, mais qui a servi disons de conseiller.

Jean-Pierre Serre : Mais il n'était pas dans Bourbaki, Paul-André Meyer ?

Pierre Cartier : Non, non, non, non, non.

Jacques Dixmier : Il est venu comme cobaye, je crois, une ou deux fois. Mais il n'était pas membre de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah il n'était pas membre.

Pierre Cartier : Non, il n'était pas membre. Mais il a participé, justement, à cette écriture du livre sur les probabilités.

Jacques Dixmier : C'est un cas très spécial, un non-membre qui a écrit, enfin, 50 % parce que toi, tu en as bien écrit 50 % aussi.

Pierre Cartier : Il y avait Schwartz, il avait Meyer et moi. Et on a réussi à le faire. Enfin, ça a été... disons que pour moi ça a été... S'il n'y avait pas eu cette impulsion de Bourbaki, je ne me serais sans doute pas intéressé à ce qui avait été fait par l'école russe à l'époque, Prokhorov, Kolmogorov et tout ça, et ça, ça m'a énormément servi ensuite. Donc, je veux dire que mes intérêts mathématiques...

Jean-Pierre Serre : Ils débordaient beaucoup, ils ont beaucoup débordé de Bourbaki.

Pierre Cartier : Ils ont débordé beaucoup de Bourbaki : je me suis intéressé à la physique mathématique et ça, c'était pas un sujet qui intéressait beaucoup Bourbaki.

Alain Connes : Non, c'est certain.

Jacques Dixmier : Ca intéressait beaucoup Bourbaki mais on avait autre chose à faire, quoi !

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est pas des maths, quand-même.

Pierre Cartier : Non.

Jean-Pierre Serre : On pouvait pas le rédiger avec corollaires et démonstration.

Jacques Dixmier : Enfin, il y a un spectre continu, de l'un à l'autre.

Jean-Pierre Serre : Aaahh, *(faisant le geste d'une faille dans la montagne)* il y a une rupture discrète *(PC rit en montrant AC, qui fait comme s'il disait "Tant pis")*, il y a une rupture, non, non, non.

Pierre Cartier : Disons que ça n'a pas été une motivation pour faire des maths, ça c'est différent.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est différent. Ca peut même inspirer des énoncés.

Alain Connes : Mais d'ailleurs, ça touche une question qui est quand-même très importante, c'est "comment est-ce qu'a été conçue et comment est-ce qu'a évolué l'architecture des livres de Bourbaki ?"

Jean-Pierre Serre : Quand je suis arrivé, c'était déjà lancé si tu veux, ils ont commencé ça très tôt tu vois, le plan général...

Pierre Cartier : ...date de 1935.

Jean-Pierre Serre : Dieudonné l'avait en poche depuis longtemps, ils ont dû faire ça dans les années 30 tu vois, à peu près.

Alain Connes : Tu veux dire, il avait mis E.V.T. avant théorie de la mesure *(rires)*, avant intégration.

Pierre Cartier : Non, ça c'est un détail.

Alain Connes : Non, je rigole, on en reparlera.

Jean-Pierre Serre : Le livre de Lie n'était pas prévu initialement. Ca s'arrêtait aux Espaces Vectoriels Topologiques. Intégration, ça c'était dedans, je crois que ça s'arrêtait là *(se tournant vers PC)*.

Pierre Cartier : Il y avait deux parties : première partie, les 6 premiers livres, et la seconde partie... Y avait un gros débat.

Jean-Pierre Serre : Seconde partie, c'était un peu un mythe. C'était "la seconde partie, on s'en occupera après", c'était plutôt ça tu vois.

Pierre Cartier : Non mais je veux dire que ce qui était prévu quand-même, c'est un peu plus que ça, c'était que les 6 premiers livres étaient le fondement indispensable pour tout ce qui suivait, et que ça, ils le suivaient dans un ordre très précis.

Jean-Pierre Serre : Ils le suivaient dans un ordre déterminé, tandis qu'après effectivement, on pouvait mélanger les...

Pierre Cartier : Après ça divergeait *(indiqué d'un geste d'écartement de branches, vers le haut)*

Alain Connes : Mais attends, ce que je ne comprends pas, je suis un peu interloqué par quelque chose qui me vient à l'idée, la théorie des faisceaux, elle est où dans ces 6...

Jean-Pierre Serre : Elle n'y est pas, elle n'est pas dans Bourbaki.

Alain Connes : Parce que moi je l'ai trouvée dans...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)*, Eh bien, non, ça n'est pas la peine, puisqu'il y avait un membre de Bourbaki qui l'avait écrite, on n'allait pas recopier, il y avait ça tu vois aussi.

Alain Connes : Mais alors la question qu'on peut poser, c'est en quel sens justement, Godement a été influencé ou a influencé Bourbaki, justement, pour quelque-chose comme ça, parce qu'on en parlait avec Pierre, justement.

Pierre Cartier : Godement, Godement, bon, c'est lui qui a écrit "le" bouquin sur les faisceaux à une époque.

Jean-Pierre Serre : Et c'est lui qui a écrit l'intégration, sur les mesures de Radon, mais ça, c'était sur l'ordre de Bourbaki, c'était pas uniquement son goût à lui.

Alain Connes : C'était une demande de Bourbaki, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Là, j'ai assisté à cette séance.

Pierre Cartier : Les faisceaux, les faisceaux, ça faisait partie des discussions courantes, évidemment bien sûr, on ne pouvait pas ignorer les faisceaux, on était tous...

Jean-Pierre Serre : On ne voulait pas en parler dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Non, non mais attention, nous avons tous été formés par Cartan, et les faisceaux, c'étaient, c'étaient...

Alain Connes : Mais quelle était la raison pour laquelle vous ne vouliez pas en parler, justement alors ?

Jean-Pierre Serre : Il aurait fallu faire un livre de topologie algébrique, or, c'était pas la peine, on était en train de la construire, tu ne peux pas faire un Bourbaki sur quelque chose qui est en train de se faire tu vois, c'est pas raisonnable, ça.

Pierre Cartier : C'était la manière de voir.

Jean-Pierre Serre : Non, tu fais un Bourbaki sur des choses qui sont déjà assez bien établies, que tu réarranges.

Alain Connes : D'accord, mais la théorie générale des faisceaux, quand-même, elle était parfaitement bien établie, je veux dire...

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, regarde, l'expérience a montré qu'il aurait fallu prendre des revêtements autres que les revêtements bêtes, il fallait prendre des...

Alain Connes : Oui tu veux dire pour avoir la théorie de Scholze avec les revêtements pro-étales et tout ça, oui, bien sûr.

Pierre Cartier : Plutôt Grothendieck, la topologie étale.

Jean-Pierre Serre : Et puis, on va pas refaire ce qui est bien fait dans la littérature.

Jacques Dixmier : Pour l'architecture, là, j'ai une opinion bien nette, c'est que, d'ailleurs tu l'as dit, c'était réglé quand nous sommes entrés, ça a été fait entre 35 et 40, par les membres fondateurs, ça n'était pas du tout fait en 35 ni en 36, puisqu'ils voulaient écrire un traité d'analyse, mais dans les 2 ou 3 premières années, ils ont compris, enfin, ils ont imaginé autre chose, et d'ailleurs, ça a eu comme résultat que 4 ou 5 participants des premiers congrès ont foutu le camp, parce que c'était pas ça qu'ils voulaient faire, enfin, je sais pas *(s'adressant JPS pour qu'il confirme).*

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, Dieudonné avait ce plan. Alors il y avait une suite, une deuxième partie, comme disait Cartier, mais c'était complètement vague.

Jacques Dixmier : Ca s'est précisé un peu... D'abord, je précise, Dieudonné, quand il parlait de ça, c'était sous-entendu "avec l'approbation de Cartan, Weil et Chevalley", il ne se serait pas permis, Dieudonné, de ... Bon. Deuxièmement, ils ont tout-de-même un peu structuré cette deuxième partie puisque c'était devenu "Structures algébriques, structures fonctionnelles, structures géométriques".

Jean-Pierre Serre : Non, ils n'ont pas fait ça, non.

Jacques Dixmier : Eh bien, j'ai entendu ça une fois. La deuxième partie

était divisée en 3.

Jean-Pierre Serre : Non, non.

Jacques Dixmier : Ah ben si, je t'affirme que si.

Jean-Pierre Serre : Non, je t'assure que ça n'a pas continué, non.

Jacques Dixmier : Ca n'a pas été fait, non, ça n'a pas été fait du tout, c'était dans leur esprit.

Jean-Pierre Serre : Dans la deuxième partie, qu'est-ce qu'il y a eu finalement : il y a eu Théorie spectrale...

Pierre Cartier : Algèbre commutative... Théorie spectrale, Algèbre commutative et Groupes de Lie.

Jean-Pierre Serre : Et théorie des variétés dont il n'est resté que le fascicule... Grâce à Dixmier, d'ailleurs.

Alain Connes : Ce qui est terrible, quand on regarde de loin, c'est qu'il y a ce livre qui est très très bien sur la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Jean-Pierre Serre : Oh oui, il est magnifique, personne ne le connaît. Les grands O sont splendidement définis.

Alain Connes : Mais par contre il n'y a pas un livre des fonctions d'une variable complexe alors quand-même, ça, c'est...

Pierre Cartier : Oui mais ça, c'est historique, si tu veux.

Alain Connes : C'est triste, ça...

Jean-Pierre Serre : Mais ça, ils pourraient le faire maintenant tu vois.

Pierre Cartier : A l'époque, à la Sorbonne, on ne parlait que de ça. Les cours de calcul infinitésimal dans ma génération, ou un peu avant, les cours,

il n'y avait que les fonctions d'une variable complexe.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais il n'y avait pas les choses utiles pour la théorie des nombres. Il n'y avait pas les grands O, les estimations, les choses comme ça.

Pierre Cartier : Oui mais alors je veux dire qu'il y avait une lassitude devant ces fonctions d'une variable complexe.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, ils en avaient assez vu, quand-même effectivement.

Jacques Dixmier : Mais je me demande si le livre sur les variétés ne faisait pas partie, dans l'esprit des fondateurs, mais alors là, j'ose pas m'avancer... Mais à mon avis, ça faisait partie des structures fondamentales, vu l'importance qu'ils apportaient aux travaux d'Elie Cartan...

Jean-Pierre Serre : Non, je ne crois pas.

Jacques Dixmier : Ah j'aimerais bien qu'ils soient là pour qu'on leur pose la question.

Jean-Pierre Serre : Mais en tout cas, on peut te remercier parce que c'est grâce à toi que le fascicule de résultats existe.

Alain Connes : Pour les variétés tu veux dire.

Jacques Dixmier : Ah non, alors là.

Jean-Pierre Serre : Et je vais te dire pourquoi...

Jacques Dixmier : Vas-y *(rires d'AC)*.

Jean-Pierre Serre : On avait le livre sur les groupes de Lie, qu'on voulait démarrer. Et alors en particulier chapitre 2, chapitre 3. Le chapitre 3, toutes les bases. Et Dixmier a mis son veto, il pouvait mettre un veto, tant qu'il n'y aurait pas un texte sur les variétés. Parce que tu vois, dans le chapitre 3, on utilise tout le temps des théorèmes sur les trucs intégrables, des machins

comme ça, les sous-variétés, et tu as mis un veto.

Jacques Dixmier : J'ai oublié.

Jean-Pierre Serre : Et c'est moi qui ai écrit en bonne partie le fascicule de résultats, à toute allure *(se tenant la tête dans les mains)* : je crois qu'il y a eu des jours où j'ai rédigé 10 pages, de ce fascicule de résultats, et c'était horriblement difficile à écrire parce que sans démonstration, pour ne pas dire de bêtise... Ouh ! *(soupirant)*

Alain Connes : C'est pas évident, c'est sûr.

Pierre Cartier : En plus avec les a priori qu'on avait faits qu'il fallait traiter toutes les sortes de variétés en même temps, les dimensions finies, dimensions infinies.

Jean-Pierre Serre : les Banach p-adiques, mais *(détachant les mots)* ON L'A FAIT ! Et tu nous as forcé la main, tu vois, et c'est excellent d'avoir la main forcée, il n'y a rien de plus utile, pour écrire des livres.

Jacques Dixmier : Ca me rappelle, alors, le commentaire de Godement sur le chapitre 3, une fois que Godement, après qu'il ait abandonné Bourbaki.

Alain Connes : Sur les groupes de Lie ?

Jacques Dixmier : Il estime que c'est un monstre *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Il est très très bien, ce livre, il est gros effectivement.

Jacques Dixmier : Il est gros et lourd, mais je vois pas comment on peut faire mieux.

Jean-Pierre Serre : Tu te souviens quand-même que tu as mis un veto, tu t'en souviens ?

Jacques Dixmier : Non, je ne m'en souviens pas.

Jean-Pierre Serre : Sans blague, tu ne t'en souviens pas *(sidéré)*.

Jacques Dixmier : Mais ça ne m'étonne pas de moi *(rires)*. J'oublie des choses...

Jean-Pierre Serre : Ce qui m'étonne de toi, c'est que tu as mis un veto, c'est la seule fois de ta vie, je crois, d'ailleurs, il y a eu très peu de veto dans Bourbaki.

Jacques Dixmier : Je te fais confiance, en fait.

Jean-Pierre Serre : Je ne me souviens pas d'un autre, *(s'adressant à PC)* tu t'en souviens ?

Pierre Cartier : Chevalley, sur l'algèbre 2. Il ne voulait que des espaces vectoriels de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était pas un veto, c'était une proposition et puis Weil a sauté en l'air. Il voulait supprimer tous les modules, tu vois, Chevalley. Qu'il n'y avait que les espaces vectoriels qui étaient utiles.

Alain Connes : *(expression du visage estomaquée et soupir)* Ouh !

Pierre Cartier : Et de dimension finie.

Jacques Dixmier : C'est d'autant plus extraordinaire, ce que tu dis, qu'un peu plus tard, quand on a étudié les algèbres séparables, Chevalley nous a vendu un énorme fourbi avec des algèbres séparables de dimension infinie. Et puis, on s'embrouillait là-dedans, à un congrès, "écoute, on pourrait laisser ça de côté...". Chevalley dit "Ah non maintenant c'est trop tard, on l'a lu suffisamment souvent, il faut le garder" *(rires)*. Heureusement, il a pas...

Alain Connes : Il a pas trop insisté.

Jean-Pierre Serre : On ne suivait jamais ce que voulait Chevalley, il avait très mauvais goût pour les rédactions élémentaires, tu vois ; il rédigeait très bien les théorèmes difficiles, mais alors quand il a essayé lui-même de faire des livres élémentaires, son livre sur les produits tensoriels, puissances

symétriques, etc.

Jacques Dixmier : C'était imbuvable, mais par contre Theory of Lie groups, c'est un chef-d'œuvre... !

Pierre Cartier : Tous ses livres qui contiennent quelque-chose sont merveilleux.

Jean-Pierre Serre : Ah ben voilà, absolument, tous ceux qui contiennent quelque-chose. Mais l'exposition, c'était affreux.

Pierre Cartier : Mais celui qu'il avait publié aux Etats-Unis, sur les algèbres, relativement élémentaire.

Jacques Dixmier : Et son livre sur les spineurs, il est très agréable aussi !

Jean-Pierre Serre : Oui, sauf son côté systématique, mais il ne voulait pas mélanger différents points de vue et alors.

Jacques Dixmier : Et puis je pense à autre chose, on revient aux fondements, enfin, on ne revient pas, quand on a fini par rédiger les chapitres 1 et 2, de la théorie des ensembles...

Alain Connes : Ca a été fait quand ça ?

Pierre Cartier et Jean-Pierre Serre : En 50 à peu près.

Alain Connes : Ca a été fini quand ?

Jacques Dixmier : Quand je suis rentré moi en 49, j'ai eu entre les mains une rédaction de Dieudonné qui était vraiment pas engageante. Et après ça, il y a eu une rédaction Chevalley...

Jean-Pierre Serre : Et qui était bien ?

Jacques Dixmier : Ah moi, je l'ai trouvée formidable.

Jean-Pierre Serre : Ah bon, d'accord.

Jacques Dixmier : Alors j'ai été chargé de mon boulot habituel, de bien lisser, j'ai fait la rédaction après Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Non mais parce qu'il est bien, le livre de théorie des ensembles, pour des tas d'usages.

Jacques Dixmier : Oh eh bien, il a des tas de défauts, encore, mais enfin, en tous cas, Chevalley a fait un très bon travail de rédaction là-dessus, c'était ça que je voulais dire.

Alain Connes : Donc il était capable quand-même...

Pierre Cartier : Chevalley, on disait de lui qu'il entrait dans un tunnel, tout noir, et que la sortie était à 4 km de là, avec une petite lueur.

Jacques Dixmier : Oui ben écoute, hein, le livre d'André Weil sur la théorie des nombres, hein, quand j'ai essayé de le lire, c'est un peu ça...

Jean-Pierre Serre : Ah le Basic Number Theory ?

Alain Connes : Oh le Basic Number Theory, oh, il est superbe, il est lourd, parce qu'il est localement compact, donc... *(rires)*

Jean-Pierre Serre : Non mais il y a des démonstrations complètes.

Jacques Dixmier : Non mais je dis pas, il a sûrement d'énormes qualités, etc, mais... pour un non-expert.

Jean-Pierre Serre : Est-ce qu'il démontre le corps de classes dedans, je crois, oui ?

Alain Connes : Non, mais si tu veux, il pousse à bout un point de vue, bon, qui est le point de vue localement compact des adèles, etc, et il le pousse très bien à bout.

Pierre Cartier : Mais c'est un point-de-vue important quand-même.

Alain Connes : C'est un point-de-vue très important mais bon, il ne le fait pas avec légèreté, ça c'est ce qu'on peut dire.

Jean-Pierre Serre : Bon alors qu'est-ce que tu avais comme questions ?

Alain Connes : Non, on devrait parler maintenant des réunions autour de la table, et du type de discussions qu'il y avait, parce que ça, c'est très important, je pense. Non, ce que je veux dire qui n'est pas évident à comprendre, c'est que bon, finalement donc, il y avait un rédacteur, qui faisait une rédaction, qui y passait du temps, qui essayait de rédiger le mieux possible, et ensuite, cette rédaction était lue.

Jacques Dixmier : Pas toujours.

Alain Connes : Pas toujours ? Il y avait des cas où elle n'était pas lue ?...

Jean-Pierre Serre : 100 pages, 100 pages, on lisait, c'est arrivé...

Alain Connes : 100 pages qui sont lues, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...je me rappelle de la rédaction de Dieudonné sur l'intégration, et ils ont lu les 3 premières pages, et ils ont dit, moi, j'ai assisté à ça, et ils ont dit "ah non, ça, c'est pas possible, c'est imbuvable, il faut le faire autrement, Godement, tu feras avec des mesures de Radon. Voilà". Et hop, à la trappe.

Alain Connes : Hop, à la trappe ? *(sifflement)*

Jean-Pierre Serre : Ah oui oui oui.

Jacques Dixmier : Et sauf erreur, ma rédaction du chapitre 1 des variétés, parce que j'y tenais moi aux rédactions détaillées... *(signe de la main que la rédaction est passée aux oubliettes)*. J'étais pas là, j'étais aux Etats-Unis.

Alain Connes : Ah mais c'est normal, t'as pas assisté. Si tu n'étais pas là, qu'est-ce que tu veux...

Jacques Dixmier : Non j'en ai pas souffert, pour moi, la chose importante, c'était que j'avais appris ce que c'était qu'une variété.

Jean-Pierre Serre : Moi aussi, j'ai fait des rédactions Bourbaki même sans espoir qu'elles soient prises, je ne me souviens plus de ce que j'avais rédigé, peu importe, je savais qu'elles ne serait pas prise, mais comme ça, j'avais clarifié pour moi, c'était écrit et puis voilà.

Jacques Dixmier : On ne l'a pas dit ça, tout à l'heure.

Alain Connes : Non, on ne l'a pas dit, on ne l'a pas assez mentionné.

Jean-Pierre Serre : Dire quoi ?

Alain Connes : Dire si tu veux qu'en fait, il y avait un des rôles positifs de Bourbaki qui était de forcer quelqu'un à aller au bout d'un sujet et à l'apprendre vraiment en profondeur, c'est quand-même important ça.

Jean-Pierre Serre : Oui, je voulais dire que pour moi, j'ai appris énormément de choses parce que, pour les rédiger pour Bourbaki, ça m'obligeait à donner des démonstrations complètes.

Alain Connes : Et tant qu'on n'a pas fait ça, je veux dire, on ne peut pas dire qu'on a compris.

Jean-Pierre Serre : Ca c'était parfait : j'ai appris les algèbres de Lie semi-simples, les racines, etc., en le rédigeant.

Alain Connes : J'ai amené ce livre parce que moi, je trouve que c'est un des livres les...

Jean-Pierre Serre : Ah eh bien, oui, c'est le plus célèbre de Bourbaki, au fond, le plus lu.

Alain Connes : On ne peut pas parler de Bourbaki...

Jacques Dixmier : Chapitre 4, 5 et 6, ah oui, c'est celui qui a le plus de

succès, personne n'a osé en dire du mal, enfin à ma connaissance jusqu'ici.

Jean-Pierre Serre : En index de citations, je suis sûr que ça doit battre tous les autres.

Alain Connes : Je veux dire, il y a des gens qui ont critiqué Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Et celui-là, je crois qu'on le doit à Cartier en grande partie.

Jacques Dixmier : Je voudrais savoir ce qu'en aurait dit Arnold.

Jean-Pierre Serre : C'est toi qui as insisté, tu as insisté mais on a tous été enthousiaste.

Pierre Cartier : C'est moi qui ai insisté mais tout le monde y a participé.

Jean-Pierre Serre : On a été enthousiaste quand on a vu que ça se... *(faisant le geste de quelque-chose qui se développe bien)*. Et puis, en quelque sorte, les sous-produits sont très intéressants, les invariants de ces groupes, les choses comme ça.

Jean-Pierre Serre : Moi j'ai appris comme ça les groupes de Coxeter hyperboliques, par exemple, en écrivant des exercices pour Bourbaki. Et ils sont très amusants, les Coxeter hyperboliques.

Alain Connes : Là, il y a un va-et-vient manifeste entre l'intérêt personnel et le rôle dans Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Bourbaki est vraiment extrêmement utile pour ses rédacteurs, encore peut-être plus que pour ses lecteurs, tu vois.

Alain Connes : Mais oui, mais c'est un peu ce que j'avais en tête quand je parlais du va-et-vient entre l'activité de recherche...

Jean-Pierre Serre : Moi aussi, je crois que j'en ai bénéficié en bonne partie comme ça, en rédigeant.

Alain Connes : En rédigeant et en allant au fond des choses exactement.

Pierre Cartier : Vidons un compte ancien. Toi *(désignant Jacques Dixmier)*, tu avais rédigé l'algèbre commutative jusqu'au chapitre 5 ou 6.

Jacques Dixmier : Enfin, c'était déjà presque fini.

Pierre Cartier : Dans un plan déterminé. Puis Serre est arrivé et a tout rebouleversé, en introduisant la platitude.

Jean-Pierre Serre : Non, toi tu as rédigé après la platitude.

Jacques Dixmier : Enfin, tu as fait changer complètement le début en mettant les modules plats.

Jean-Pierre Serre : Oui mais toi, tu as dû...

Jacques Dixmier : J'étais pas capable de faire ça, moi.

Jean-Pierre Serre : Oui mais toi, tu as dû rédiger des spécialisations, des trucs comme ça, qui ont disparu.

Pierre Cartier : C'est ça, les spécialisations, c'est ça.

Jacques Dixmier : Quoi ?

Jean-Pierre Serre : Les spécialisations.

Jacques Dixmier : Non.

Jean-Pierre Serre : Non ? Parce que Weil...

Jacques Dixmier : Non, j'ai rédigé les valuations, qui ont été fort menacées à un moment donné par Grothendieck, mais elles sont restées.

Pierre Cartier : Mais enfin, le point de vue qu'on t'avait suggéré d'ailleurs pour rédiger, il a été, quand Serre est intervenu, il a été complètement bouleversé, ce point-de-vue-là sur l'algèbre générale.

Jean-Pierre Serre : Oui, effectivement, j'ai eu une influence à ce moment-là...

Pierre Cartier : Tu parles, tu parles !

Jean-Pierre Serre : Sur l'algèbre commutative tu vois, eh bien parce que je voyais bien ce qui servait.

Pierre Cartier : C'est toi qui as introduit la platitude quand-même, enfin qui as insisté pour la platitude.

Jean-Pierre Serre : Oui et puis d'autres choses du même genre.

Alain Connes : Alors là, il y a une question, et on vient à des questions un peu plus délicates, si tu veux, pourquoi est-ce que dans le chapitre d'algèbre, pas d'algèbre commutative, sur l'algèbre homologique, pourquoi est-ce que ça a été fait non pas dans le cadre des catégories abéliennes mais dans le cadre des modules ?

Jean-Pierre Serre : Parce qu'il n'y avait pas le langage des catégories, tout simplement.

Alain Connes : Mais on ne pouvait pas le rajouter un petit peu là ?

Jean-Pierre Serre : Les catégories, tu peux pas rajouter *"un petit peu"*, non, non, non ! *(riant)*

Alain Connes : Il ne pouvait pas y avoir un fascicule de résultats sur les catégories, quand-même, oh écoute...

Jacques Dixmier : Ca aurait peut-être été une solution, oui. Mais je ne crois pas qu'on y ait songé.

Jean-Pierre Serre : Mais non, mais alors, est-ce que c'est un ensemble ou un fourbi ?...

Alain Connes : Ouaih, bon...

Jacques Dixmier : C'est ça la question.

Jean-Pierre Serre : Quand tu discutes, tu peux dire "oh, ouaih, etc.", mais tu ne peux pas dire "ouaih" par écrit !!

Alain Connes : Mais je suis d'accord.

Jacques Dixmier : Il y a deux questions : d'une part, parler des catégories, c'est une chose, et deuxièmement, la question du fondement de cette théorie, ce sont deux problèmes disjoints, tous les deux très emmerdants, mais...

Jean-Pierre Serre : Mais pas disjoints quand-même, tu ne peux pas en parler si tu ne sais pas ce que c'est quand-même.

Jacques Dixmier : Si, si, très bien, très facilement !

Jean-Pierre Serre : Tu peux en parler, mais l'écrire, non, quand-même, non, pas dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Pas dans le style Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Tu ne peux pas dire "soit $\mathcal{C}$ une catégorie" sans dire ce que c'est qu'une catégorie, ça, c'est pas...

Jacques Dixmier : En tous cas, dans le livre de Topologie algébrique dont nous sommes en train de médire abondamment *(rire d'AC)*, il y a quelques numéros sur les catégories...

Pierre Cartier : Les *petites* catégories, les *petites* catégories.

Alain Connes : Oui, des petites catégories, c'est sûr que ce sont des petites catégories ?

Pierre Cartier : C'est ça le problème. Les petites catégories, ça ne pose aucun problème. Les grosses catégories...

Alain Connes : C'est vrai que le livre de Demazure et Gabriel sur les groupes algébriques est canulé dès le début par cette discussion, hein, les univers, etc..., et ils sont obligés de discuter tout ça...

Pierre Cartier : Non mais Dixmier, tout le monde sait que parler de l'ensemble de tous les ensembles, c'est un non-sens complet, tout le monde sait ça, bon.

Jacques Dixmier : Oui, mais on sait aussi qu'à condition de ne pas s'orienter dans une certaine direction *(faisant le geste de prendre un chemin de traverse)*, on ne tombera pas sur des pépins.

Jean-Pierre Serre : Non mais ça, c'est du laïus, ça, tu ne peux pas le mettre par écrit ce laïus-là. Non par contre, ce qu'on peut faire, et Bourbaki le fait, et moi aussi, je l'ai fait souvent, ça, c'est de dire "le foncteur machin" pour dire juste "la construction que je viens de fabriquer"... a telles propriétés, ça, ça a un sens, on se permet ça.

Pierre Cartier : Bourbaki se permet ça.

Jean-Pierre Serre : On se permet ça, foncteur étant fonction simplement, ou construction plutôt.

Alain Connes : Mais je veux dire tu ne peux pas parler, tu ne parles pas d'une catégorie, tu ne nommes jamais une catégorie. La catégorie, je sais pas moi, des ensembles finis pointés par exemple.

Jean-Pierre Serre : Mais je ne sais pas où ils sont, dans quoi...

Alain Connes : Eh bien, tu en prends un squelette, qui est l'ensemble $\{0, ..., n\}$ avec le point T_0.

Jean-Pierre Serre : *(riant avec AC)* Bon, écoute, c'est pas l'endroit... de faire ça, on va pas faire un congrès Bourbaki et s'engueuler sur les catégories parce qu'on s'engueulera forcément, tu vois.

Alain Connes : Oui, sauf que je pense, si tu veux, que ça serait bien, parce que ça montrerait le genre de discussions, qui se produisaient autour de la

table...

Jean-Pierre Serre : Oh ben déjà, ça a commencé, nous sommes déjà en train de le faire, tu vois *(s'esclaffant tous, heureux)*, ce mauvais exemple que nous donnons, là, mais qui n'est pas un si mauvais exemple, d'ailleurs.

Alain Connes : Ben non, ça n'est pas un si mauvais exemple.

Jean-Pierre Serre : Non on ne pouvait pas s'en sortir. Il aurait fallu tout refaire, tu vois, tous les fondements.

Pierre Cartier : Il y avait deux raisons : premièrement, il fallait tout reconstruire, et deuxièmement, les fondements étaient pas solides.

Jean-Pierre Serre : Alors en plus, oui. Tu sais qu'il y a des topologies de Grothendieck dont même Deligne n'ose pas se servir...

Alain Connes : Parce que justement, ce ne sont pas des ensembles.

Jean-Pierre Serre : Les topologies plates, par exemple, parce que tu ne peux pas majorer, tu vois, un truc plat *(se tournant vers PC)*, tandis qu'un truc étale, quand tu as un fourbi, tu le majores, tu as des modèles.

Pierre Cartier : *(acquiesçant)* Oui, c'est facile.

Jean-Pierre Serre : Mais plates, tu ne sais jamais si par hasard, en changeant d'univers, tu vois, ça pourrait changer la cohomologie, c'est idiot quoi, il faut pas...

Alain Connes : Non ça c'est vrai qu'on est un peu dans l'inconnu, mais.

Pierre Cartier : Il y a Gabriel et Demazure qui s'étaient astreints à ce genre de vérification, pfffou ! *(deux expirations pour montrer la difficulté)*

Alain Connes : Mais c'est ce que j'ai dit tout à l'heure. Et leur bouquin sur les groupes algébriques justement, il commence par ça, donc on se dit "bon ben on arrête de lire".

Jean-Pierre Serre : Ils ont...

Alain Connes : Ils ont exagéré, bon.

Jean-Pierre Serre : Ils ont exagéré pour la typographie aussi, ils ont rendu leur livre impossible à cause de ça *(nouvelle critique de PC en riant, JPS le coupant)* On va pas critiquer, on a suffisamment à faire pour nous critiquer nous.

Alain Connes : Tout à fait.

Pierre Cartier : Non mais tu parles de la typographie.

Jean-Pierre Serre : La typographie de Gabriel et machin, tu vois, ils ont inventé un système compliqué de lettres gothiques, italiques, etc.

Alain Connes : Que tu ne peux même pas lire.

Jean-Pierre Serre : Tu n'as pas remarqué ça ?

Pierre Cartier : Si, si, si.

Alain Connes : Tu ne peux même pas lire les lettres qui sont écrites.

Jacques Dixmier : Dans les premiers Bourbaki, il y avait des lettres gothiques majuscules que les gens ne savaient pas lire, c'est Bourbaki qui a...

Jean-Pierre Serre : Non, non, mais tu n'as pas regardé le Gabriel. C'est pas pareil, non.

Alain Connes : Bon alors maintenant, un sujet un peu plus léger, mais quand-même je pense que je voudrais absolument l'entendre, c'est qu'il y a eu... Chacun d'entre vous a, je pense, des anecdotes, qui se sont produites à Bourbaki. Moi, je n'en connais qu'une mais... En fait, Jacques m'en a raconté une autre mais je n'ose pas la raconter. Mais du genre qu'un jour, sachant très bien que Dieudonné devenait furieux quand, bon,...

Jean-Pierre Serre : Oui, oh bon, celle-là est connue... La démission de

Dieudonné par Godement, c'est ça.

Alain Connes : Non mais attends *(désignant PC du doigt)*, et la rédaction déchirée de Dieudonné. Ca, c'est Cartier qui me l'a racontée.

Jean-Pierre Serre : Déchirée ?

Pierre Cartier : Je ne sais plus, il y avait une discussion...

Jean-Pierre Serre : Mais il avait un double quand-même *(on entend les rires d'AC)*.

Pierre Cartier : Ca devait être sur les ensembles, alors bon, on n'était pas d'accord.

Jean-Pierre Serre : Il n'y avait pas beaucoup de doubles à l'époque.

Pierre Cartier : On n'était pas d'accord et il y a eu une discussion un peu compliquée un soir. Alors Dieudonné, furieux, attrape le manuscrit, qui était tout fini, annoté, pour l'envoyer à l'impression, le déchire *(PC fait le geste de déchirer un livre en 2)*, et puis alors il avait un poing qui permettait de le déchirer en deux, et laisse tout tomber. Alors Cartan et Eilenberg se précipitent avec du scotch pour essayer de recoller les morceaux. Et le lendemain matin, Dieudonné qui s'était calmé, descend tranquillement au petit-déjeuner en apportant une autre copie *(rires)*, qu'il avait reconstituée pendant la nuit, ou qu'il avait faite d'avance, je sais plus.

Jacques Dixmier : C'était un petit bout de la théorie des ensembles. C'était peut-être sur les *lemmes de Serre...(tendant la perche aux autres, qui rient)*.

Jean-Pierre Serre : Oui, alors ça, toi, tu connais pas. Alors, il y a eu une époque où, il y avait dans Bourbaki, des *théorèmes de Weil* : les théorèmes de Weil, alors, qui étaient choisis pour être particulièrement évidents, tu vois, c'était ça qui était rigolo. *(Tous se marrent)*. Que si $f \circ g = 1$ et $g \circ f = 1$ alors f et g sont des bijections tu vois. Et alors ça, on rigolait, c'est commode tu vois, en ce moment, quand on veut montrer que le machin est bijectif, on fabrique son inverse. C'est beaucoup plus propre d'abord, comme truc. Et le

lemme de Serre, c'était quelque-chose comme ceci, alors attention, qu'est-ce que c'est que le lemme de Serre : on a $a \to b$ [¶] et $b \to c$ alors si $a \to c$ est injectif alors...

Alain Connes : $a \to b$ est aussi injectif.

Jacques Dixmier : C'est une partie des lemmes de Serre.

Jean-Pierre Serre : ... alors $a \to b$ est aussi injectif. C'est une partie, oui. Alors moi, tu vois, j'en avais besoin dans la C-théorie, quand tu négliges une classe de groupes, j'avais besoin de savoir si c'était vrai aussi dans cette théorie, c'est légèrement moins évident, tu vois. Mais alors pour se moquer de moi, ils appelaient ça les lemmes de Serre.

Alain Connes : Ah, d'accord, très bien *(rires)*.

Jacques Dixmier : Ca servait à démontrer le théorème de Weil *(tous s'esclaffent)*.

Jean-Pierre Serre : Exactement, les théorèmes de Weil sont des corollaires des lemmes de Serre, je sais plus comment, mais sûrement.

Jacques Dixmier : Mais Weil le prenait très bien.

Jean-Pierre Serre : Mais moi aussi, enfin ce sont des lemmes, ils sont vrais, quoi. Comme anecdote, c'est pas vraiment une anecdote mais c'est une expression de Bourbaki que j'aimais beaucoup et qui vaut la peine d'être gardée pour la postérité, c'est, on disait toujours sur les rédactions "oui, et puis il faudra faire attention à remplacer les théorèmes faux par d'autres."

Alain Connes : ssss ! Ouaih !

Jean-Pierre Serre : Avec l'ambiguité qui se...

Alain Connes : Alors attends, j'ai une question, qui revient un peu à la question des discussions autour des tables, etc. C'est-à-dire que si tu veux

¶. prononcer $\to$ "flèche".

d'habitude quand on réfléchit seul effectivement, on a de temps en temps *(geste d'un index qui tourne près de la tempe)* le rappel du cerveau qui dit "ça, ça peut être faux" un truc comme ça, et on a le temps. C'est-à-dire que ça peut venir, peut-être, une heure après, ou un truc comme ça. Alors comment ça se passait, lorsqu'il y avait les discussions autour de la table, c'est-à-dire est-ce que les discussions allaient suffisamment lentement, est-ce que les gens sortaient, partaient pour aller réfléchir.

Jacques Dixmier : Très souvent.

Jean-Pierre Serre : Mais en même temps, elles n'allaient pas lentement les discussions, elles étaient rapides. Elles étaient comme nous parlons là.

Alain Connes : Oui mais ça, ça laisse pas vraiment le temps de réfléchir, donc euh...

Jean-Pierre Serre : Ca excite un petit peu et après tu peux, après tu as le temps.

Jacques Dixmier : Ah eh bien, je vais te donner un exemple de discussion ultra-rapide : Schwartz, tout seul, disant "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute !" *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, c'est dans Bourbaki, on lui avait posé une question et il a répondu ça "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute !" *(riant)*.

Jacques Dixmier : C'est un cas extrême.

Jean-Pierre Serre : Joli cas de réflexion rapide, tu vois. Mais peut-être que tu pourrais dire un mot sur cette tradition de lire des textes à haute voix, parce que dans Bourbaki, il y avait cette règle que quand on nous apportait une rédaction, on n'était pas censé l'avoir lue avant.

Alain Connes : Bien sûr. Donc quelqu'un la lisait.

Jean-Pierre Serre : Quelqu'un l'avait écrite, on la lisait pas : et en congrès, l'un de nous la lisait à haute voix.

Alain Connes : L'un de nous, c'était pas une personne différente...

Jean-Pierre Serre et Pierre Cartier : Ca pouvait tourner. Ca ne tournait pas beaucoup, je lisais assez souvent. Il y a des gens qui n'aiment pas lire à haute voix, moi, ça ne me gênait pas.

Jacques Dixmier : Il y avait des bons lecteurs et des mauvais lecteurs, par exemple, je me souviens, à mon premier congrès, on m'a chargé de lire, et immédiatement, quelqu'un a dit "c'est un mauvais lecteur", j'ai pas dû en lire beaucoup.

Pierre Cartier : Tu écrivais suffisamment.

Jean-Pierre Serre : C'était vraiment important, tu vois, parce que sinon, la méthode traditionnelle, les gens envoient des textes, tu es censé les lire chez toi, et puis tu reviens, et en discussion, tu dis "oh oui, j'ai trouvé telle erreur". Non, ça, c'est de la blague, pour des maths, ça ne va pas du tout.

Pierre Cartier : Il faut passer partout.

Jean-Pierre Serre : Tandis que là, à haute voix. Et j'ai fait quelques fois avec des gens qui écrivaient un cours pour moi, je leur ai dit "on va vérifier, on va faire votre cours, vous venez chez moi, et on va le lire à haute voix", ils en étaient baba bien sûr, ça prend le temps que ça prend, ça prend des heures.

Alain Connes : Bien sûr, il faut du temps.

Jean-Pierre Serre : Chaque phrase y passe et là.

Pierre Cartier : Il y a le filtre, il y a le filtre.

Jean-Pierre Serre : On voit instantanément que ça ne va pas.

Alain Connes : D'accord mais la question c'est est-ce qu'on ne lit pas trop vite pour que les gens puissent réfléchir.

Jean-Pierre Serre : Non, on lisait raisonnablement.

Jacques Dixmier : Et puis j'ai un ajout à faire à ce qu'il a dit que quand-même, c'était pas du tout interdit d'avoir lu la rédaction à l'avance, c'était rare qu'on le fasse parce qu'on n'avait pas le temps, on avait trop de boulot, mais non seulement, c'était pas interdit, mais je crois même que c'était encouragé, on savait que c'était très peu fait mais enfin, ah ben écoute

Jean-Pierre Serre : C'était très peu fait, c'était pas ça l'essentiel. L'essentiel, c'était la lecture à haute voix.

Jacques Dixmier : Je me souviens d'une lecture à haute voix, d'une rédaction. Je vais peut-être mélanger les noms, mettons une rédaction de Chevalley sur des algèbres de Lie, non, une rédaction de Godement, et Chevalley l'a lue avant qu'on la discute en congrès, il a envoyé un commentaire comme quoi cette rédaction était pisseuse et éculée.

Alain Connes : *(sifflant)* Ouh la la !

Jean-Pierre Serre : C'est ça : ce ramassis des méthodes les plus pisseuses et éculées. C'était ça le style.

Alain Connes : C'est dur !

Jacques Dixmier : Ben dur, non ! C'est un peu le style des discussions Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Et on ne se fâchait pas !

Jacques Dixmier : C'était peut-être un peu limite mais pas tellement...

Alain Connes : Tu m'avais raconté, Jacques, je ne sais pas si mes souvenirs sont exacts.

Jacques Dixmier : Ce qu'il y a, c'est que Godement avait pas très bon caractère.

Jean-Pierre Serre : Mais il l'avait quand-même pas trop mal pris.

Pierre Cartier : Il était provocateur disons.

Jean-Pierre Serre : Non mais c'était Chevalley qui avait dit ça, c'était pas Godement. Non mais sa rédaction n'était pas spécialement mauvaise, je ne me souviens pas d'un... Mais il avait pris des méthodes standard et ça, Chevalley en effet avait de meilleures choses et nous, on les a améliorées.

Jacques Dixmier : C'était sur les premières rédactions des algèbres de Lie, peut-être même "la" première.

Alain Connes : Ah, sur les algèbres enveloppantes, et tout ça.

Jacques Dixmier : Non, pas sur les algèbres enveloppantes...

Pierre Cartier : Les répliques, Chevalley était fanatique des répliques.

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est pas mal, les répliques, mais enfin ça avait un sens, d'enveloppe algébrique.

Jacques Dixmier : Non, mais c'est pour dire que parfois, les rédactions étaient lues avant qu'on n'arrive au congrès.

Jean-Pierre Serre : Oui quand-même bien sûr, mais quand-même, le vrai travail, c'était au moment de la lecture.

Jacques Dixmier : Oui, c'était beaucoup plus fréquent, effectivement, on les découvrait, les rédactions, aux congrès.

Jean-Pierre Serre : La vraie critique. Le vrai travail, c'était sans doute après, le rédacteur suivant qui lui, alors, avait le droit aussi de ne pas respecter.

Jacques Dixmier : Alors là, je dirais à 50 % parce qu'il y avait eu les critiques pendant le congrès et puis, comme tu dis, après ça, le type qui rédigeait, il avait son boulot.

Jean-Pierre Serre : Il décidait, il décidait, parce que s'il trouvait que c'était idiot.

Jacques Dixmier : S'il trouvait que les critiques étaient idiotes, qu'il ne fallait pas en tenir compte, ça, ça arrivait souvent effectivement.

Alain Connes : Alors il y a une autre question qui est un peu reliée à ça, c'est que pendant une longue période qui est au moins jusqu'au départ à la retraite de Dieudonné, Dieudonné était là, donc il faisait le travail final de...

Jean-Pierre Serre : Oui, il faisait tout le travail final pour l'éditeur.

Alain Connes : Que s'est-il passé lorsqu'il est parti à la retraite, justement ?

Jacques Dixmier : Je ne m'en souviens pas là, qui a fait les dernières rédactions et les a envoyées à l'imprimeur.

Jean-Pierre Serre : *(s'adressant à JD)* Toi, tu as dû en faire toi.

Jacques Dixmier : Mais je ne m'en souviens pas.

Pierre Cartier : Non, c'était partagé, il n'y a pas eu de remplaçant.

Jean-Pierre Serre : Moi je n'en ai pas fait, je n'ai jamais donné une rédaction à l'imprimeur, il y a toujours eu quelqu'un intermédiaire, pour moi.

Pierre Cartier : Moi je ne pense pas que j'en aie donné non plus.

Jean-Pierre Serre : Par exemple, avec Bruhat, on a complètement terminé dans ce livre-là *(désignant le livre amené par AC dont il a été question précédemment et s'adressant à PC)*, il y avait des petits bouts tu vois, on les a écrits...

Jacques Dixmier : Je me demande écoute, est-ce que par hasard, on n'écrivait pas à Dieudonné en lui disant "voilà, le boulot est fini...", non mais je rigole pas, il était très dévoué Dieudonné, il aurait été prêt à faire...

Jean-Pierre Serre : Peut-être que c'était simplement la secrétaire de Bourbaki qui le donnait à l'imprimeur, tu vois, peut-être qu'on lui préparait le travail...

Jacques Dixmier : J'arrive pas à me rappeler, c'est dommage parce que... c'est pas très important, mais quand-même.

Alain Connes : Ah quand-même, oui, on aimerait savoir, effectivement oui.

Jacques Dixmier : Je ne peux pas te répondre.

Jean-Pierre Serre : Je pense que c'est elle qui avait un rapport avec l'éditeur parce que je vois pas l'un de nous aller chez Hermann.

Jacques Dixmier : Ah moi, je suis allé assez souvent chez Hermann.

Jean-Pierre Serre : Ah tu y es allé ?

Jacques Dixmier : Oui, c'était par exemple pour le... J'sais plus pourquoi j'y allais, j'avais fait la connaissance des, c'étaient deux vendeurs, qui étaient des braves types, là, c'était même pas Berès que je voyais... Bon, ben non, on ne sait pas répondre.

Alain Connes : Effectivement, il y a une autre question qui s'est posée, c'est, tu veux, lorsque les gens devaient partir à la retraite, en fait, j'ai un exemple particulier puisqu'on en avait parlé avec Jacques. Je veux dire, cette règle qui avait été posée à l'avance, il y a eu forcément des cas, où les gens n'étaient pas très très heureux, je pense à André Weil, de partir à la date donnée, ils étaient obligés.

Pierre Cartier : C'est quand-même lui qui a rappelé la règle. En 54. En 54 ou 55, je me souviens qu'on a lu une lettre, le jour de l'anniversaire de Dieudonné, qui était le 4 juillet, le jour de la fête nationale américaine, on fêtait ça, bon, on avait arrosé ça, et à la fin, Cartan a sorti une lettre de Weil. A la fin du pot.

Jean-Pierre Serre : Comme cadeau d'anniversaire, c'était bien choisi.

Alain Connes : Oui, c'est sympa, oui.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est Bourbaki !

Alain Connes : Weil était là ?

Pierre Cartier : Non, il n'était pas là. J'ai reçu une lettre de Weil et à cette occasion, bla bla bla, je vais vous la lire. Et c'est là, Weil mettait les pieds dans le plat "on s'était promis de partir à 50 ans...".

Jacques Dixmier : On s'était promis, donc la règle existait déjà avant.

Jean-Pierre Serre : Oui je pense qu'elle existait avant. Ils avaient dû dire ça avant, les membres fondateurs.

Pierre Cartier : On s'était promis, bon... Et il y avait plutôt de la réserve, effectivement.

Jean-Pierre Serre : Bon alors voyons, vous deux, vous êtes partis à 50 ans, tous les deux ?

Pierre Cartier : Non.

Jean-Pierre Serre : Toi, à quel âge ?

Pierre Cartier : Un peu plus tard.

Jean-Pierre Serre : Ah bon, à combien ?

Pierre Cartier : 53 ou quelque-chose comme ça.

Jean-Pierre Serre : Ouh la la, et pourquoi tu as fait ça, c'est pas bien, ça ? ! Bon alors heureusement, j'ai compensé, parce que moi, je suis parti 2 ou 3 ans avant.

Pierre Cartier : Borel et toi, vous êtes partis avant.

Jean-Pierre Serre : Non, Borel est parti à 50 ans, il serait volontiers resté, tandis que moi, j'en avais un petit peu assez, j'étais rentré à 21 ans ou 22, tu vois, à 50 ça faisait beaucoup, et donc je suis parti. De même que j'ai quitté le Collège 2 ou 3 ans avant. J'aime bien partir avant.

Jacques Dixmier : Il faut dire et c'est quand-même lié à ta question que Bourbaki a pris immédiatement l'habitude d'inviter les gens retraités à un congrès de temps en temps. Et moi, j'ai été invité deux fois à des congrès ultérieurs.

Jean-Pierre Serre : Moi, je crois que je n'ai pas été invité, j'ai été puni parce que j'étais parti avant.

Pierre Cartier : Oui moi aussi, j'ai été invité.

Jacques Dixmier : Tu as jamais été invité, ça m'étonne.

Alain Connes : Mais Jacques m'a raconté l'histoire, comme quoi, quand Weil avait été invité, quelques années plus tard, à un moment-donné, il y avait eu la réunion dans laquelle on assignait les rédactions pour la fois suivante, et apparemment, tu étais intervenu avec Borel, pour lui dire qu'il ne pouvait pas assister à cette réunion. C'est correct ?

Jean-Pierre Serre : Engagements du congrès, ça s'appelait, les engagements du congrès, et en effet, on était un peu sans pitié, tu vois. La notion de pitié était pas dans Bourbaki.

Jacques Dixmier : Euh alors là, je me souviens assez bien de cette scène, personne n'a fait... J'en ai parlé après coup avec Koszul et on avait exactement le même point-de-vue, c'est-à-dire que nous, on aurait bien accepté Weil, on ne pensait pas que ça aurait biaisé la discussion mais que s'il y avait des membres de Bourbaki, par exemple Borel et Serre qui ne voulaient pas, alors ça imposait le refus... Mais que c'était pas très humain si tu veux.

Jean-Pierre Serre : Non, tu vois, sur l'algèbre commutative, il avait un point de vue très différent. Et oui, c'est ça...

Alain Connes : Ah oui, sur l'algèbre commutative, il avait un point de

vue très différent.

Jacques Dixmier : Oui, mais il s'agissait d'une discussion où on faisait les projets d'avenir, on distribuait les rédactions, si Weil se mettait à intervenir, on pouvait lui couper la parole, là, d'accord... Mais lui interdire d'assister à la réunion, là, c'est plus dur, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Moi, je pense que c'est plutôt le contraire, tu vois...

Alain Connes : Je suis d'accord avec Serre.

Jean-Pierre Serre : Lui couper la parole, c'est vraiment pas possible.

Alain Connes : C'est vraiment impoli.

Jean-Pierre Serre : A partir du moment où tu viens à une discussion, tu es sur un pied d'égalité avec les autres.

Alain Connes : Je me souviens vaguement d'une histoire que tu m'avais racontée un jour, qui était que Weil était parti un jour en disant "ça sent le Chevalley, je m'en vais".

Jean-Pierre Serre : En disant quoi ?

Alain Connes : Il a dit ça ?

Jacques Dixmier : Ca sent le Chevalley. Si, si, il l'a dit, je revois la scène.

Jean-Pierre Serre : En quel sens il le disait ?

Jacques Dixmier : Oh ben, il était furieux du tour des discussions. Chevalley l'énervait particulièrement et il est parti en étant un petit peu injurieux pour Chevalley, quoi, voilà.

Alain Connes : Ca, c'est quand-même un trait de Bourbaki qui est que...

Pierre Cartier : C'était la première génération, quand-même, plus que les suivantes.

Jean-Pierre Serre : Tu veux dire qu'on était plus polis les uns avec les autres. Non, avec Borel, écoute : "Borel, tu déconnes, quand-même,...".

Pierre Cartier : Oui, mais bon, ça c'était pas grave !

Jacques Dixmier : C'est vrai que c'est pas la même chose que ça sent le Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Dans d'autres réunions, tu vois, même ça.

Pierre Cartier : Weil pouvait être vraiment mordant, très mordant, plus que chacun de nous.

Alain Connes : Mais si tu veux, sinon, je pense que la liberté justement d'engueuler les gens, dans les discussions mathématiques, je pense, ça, c'est quelque chose qui allait de pair avec la fraternité qui était installée.

Pierre Cartier : En principe, il n'y avait pas de...

Alain Connes : D'animosité ?

Pierre Cartier : Non, il n'y avait pas de hiérarchie...

Jean-Pierre Serre : L'Ecole Normale y est sans doute pour beaucoup. Parce qu'on s'est amusé une fois à deviner ce que serait un congrès Bourbaki fait par des japonais tu vois. A ce moment-là, ils auraient tous fait ça, simplement *(faisant un salut en s'inclinant à la japonaise)* et le lendemain, on aurait trouvé l'un d'eux qui se serait fait harakiri et là, on aurait compris que la rédaction n'était pas bonne *(éclats de rires)*. Et c'est pour ça qu'il n'y a pas eu de Bourbaki japonais.

Pierre Cartier : Il y avait l'esprit normalien, c'est certain.

Alain Connes : Et c'est vrai qu'il y avait une atmosphère directe, bon.

Jacques Dixmier : Bon alors, il y a la phrase "il n'y avait pas de hiérarchie" ; alors c'est vrai et c'est faux. C'est vrai qu'on pouvait..., que j'avais

aucun scrupule à lancer des vannes à Dieudonné qui était à l'Académie, etc.

Jean-Pierre Serre : Plutôt l'Académie, tout le monde s'en foutait alors. L'Académie, c'était plutôt négatif, si tu veux, comme qualité.

Jacques Dixmier : Mais la hiérarchie, elle existait, il est vrai que là, j'ai pas demandé aux autres. C'est un peu si tu veux comme dans une meute, il y en a qui baissent les oreilles, devant le chef de meute.

Jean-Pierre Serre : Weil était le fondateur, quand-même. C'était clair, c'était lui...

Alain Connes : C'était le fondateur, mais quand il y avait une discussion de maths...

Jacques Dixmier : Je ne peux pas dire que j'aie discuté de maths fondamentales avec Weil, quoi, voilà... Eh ben, j'avais peut-être tort. En tout cas, je pense que j'avais raison. Et c'est ça la situation en ce qui me concerne. Mais là j'exagère peut-être en disant qu'il y avait une hiérarchie.

Jean-Pierre Serre : C'est pas une hiérarchie, mais il y avait des gens plus influents que d'autres.

Pierre Cartier : Primus inter pares comme on dit en latin.

Jean-Pierre Serre : C'est normal ça.

Pierre Cartier : Une relation d'ordre.

Jacques Dixmier : C'est mieux une relation d'ordre, parce que ça n'est pas forcément un ordre total.

Alain Connes : Oui vas-y Serre, dis.

Jean-Pierre Serre : Si tu veux Delsarte, par exemple, quand il assistait aux discussions, au début, il a été vite à la retraite, mais, il disait rien, tu vois.

Alain Connes : Il n'intervenait pas.

Jean-Pierre Serre : Sa spécialité, c'était la théorie analytique des nombres, et on n'en faisait absolument pas, on n'en faisait même rien qui soit utile, on aurait pu mais...

Jacques Dixmier : J'ai entendu dire qu'il avait écrit la fin du livre 4.

Alain Connes : De topologie ?

Jacques Dixmier : F.V.R.

Alain Connes : Ah, fonctions d'une variable réelle.

Pierre Cartier : Ca c'était dans son style.

Jean-Pierre Serre : Oui mais ça c'était avant que je n'entre dans Bourbaki, tu vois, je l'ai connu, il ne disait jamais un mot. Et puis, nous avons eu Pisot et Roger qui étaient perdus, également. Ils étaient tout simplement pas à leur place.

Jacques Dixmier : Oui Bourbaki les a mis à la porte.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, et puis ça a été délicat.

Alain Connes : Ah bon, en plus ?!

Jean-Pierre Serre : Ah eh bien oui, tu sais mettre à la porte, c'est pas... Là, on a quand-même essayé que ce soit fait proprement mais je ne sais pas comment les membres fondateurs ont fait.

Pierre Cartier : En tout cas, dans les archives, il n'y a aucune trace.

Jacques Dixmier : Sauf que leur nom n'apparaît plus.

Pierre Cartier : Oui, ils apparaissent jusqu'à une certaine date, et après ils n'apparaissent plus mais il n'y a aucune trace de leur exclusion.

Jean-Pierre Serre : Non mais remarque, il n'y a pas de trace non plus du fait que Leray était aux discussions au début, et qu'il n'y a pas été ensuite.

Jacques Dixmier : Eh bien, on a bien fait de ne pas mettre ça dans La Tribu.

Jean-Pierre Serre : Mais je sais qu'on a eu des discussions entre nous pour savoir comment on arriverait à s'en débarasser.

Jacques Dixmier : Je n'y étais pas moi à ce moment-là, j'ai dû venir un peu après.

Alain Connes : Mais comment vous l'avez fait ?

Jean-Pierre Serre : Je ne m'en rappelle plus, je crois qu'on a inventé un système où ils n'étaient pas obligés de venir et ils ont compris.

Jacques Dixmier : Chaboty a été viré lui aussi.

Jean-Pierre Serre : C'est vrai qu'il a été membre de Bourbaki lui-aussi.

Jacques Dixmier : Et Ehresmann, c'est lui qui est parti.

Jacques Dixmier : Ce qui fait qu'à une certaine époque, je pense que Bourbaki s'est retrouvé devant un boulot énorme et à mon avis, c'est pour ça qu'ils se sont mis à recruter à tout va. N'importe qui pouvait venir à Bourbaki *(rires)* Enfin mais dans ton cas, comme tu dis...

Jean-Pierre Serre : Non, moi j'ai forcé la porte, non moi, c'est pas pareil.

Jacques Dixmier : Mais tu es un cas unique.

Jean-Pierre Serre : Je crois, oui oui oui. Comment ça s'appelle chez les américains, quand il y a une party, tu sais, les gens qui entendent dans un immeuble qu'il y a une party et qui vont à la porte et se glissent dedans, comment ça s'appelle "to crash", en tous cas, moi, j'ai crashé Bourbaki.

Pierre Cartier : Je ne connais pas l'expression argotique.

Jean-Pierre Serre : Alors est-ce que tu as encore des choses dans ta tirelire, là ?

Alain Connes : Pas vraiment non, pas vraiment. Je pense que sinon, après, ce sont des généralités sur Bourbaki, et bon...

Jean-Pierre Serre : On pourrait peut-être dire, un peu, ce que l'on pense de ce que l'on lit sur Bourbaki, parce que...

Pierre Cartier : Tu avais dit qu'on pourrait parler du séminaire.

Alain Connes : Oh, ben, c'est un sujet différent, non.

Jean-Pierre Serre : Ah, je voudrais en dire du bien, de ce séminaire, que c'est un truc extraordinaire, ça justifie à soi tout seul le maintien de Bourbaki, après notre départ, qui bien évidemment *(en charriant un peu PC)* était une catastrophe pour Bourbaki, mais...

Pierre Cartier : Bien sûr, bien sûr.

Alain Connes : C'est important effectivement de s'exprimer sur ce qu'on lit.

Pierre Cartier : Je regardais effectiveme les volumes 40-50 et sur 6 exposés, il y en a 4 par des membres de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Et également ils représentent un complément parfait au texte, parce que c'est des maths intéressantes, au contraire. Elles sont pas bourbachiques du tout.

Jacques Dixmier : Avec une différence énorme qui est qu'il n'y a souvent pas les démonstrations.

Jean-Pierre Serre : Oui mais maintenant, attention maintenant, il y a beaucoup de textes qui ont 40 à 50 pages et qui contiennent pratiquement les démonstrations.

Alain Connes : Mais Serre, tu as mentionné un sujet qui effectivement est très important, qui est qu'on a lu des critiques de Bourbaki, moi, j'ai contacté avant notre réunion, là, justement, quelqu'un que je connais bien, qui était professeur de taupe et qui avait interrogé un certain nombre de ses collègues sur Bourbaki et il s'est aperçu que les gens qui le critiquaient n'avaient lu aucun livre de Bourbaki.

Pierre Cartier : On vit sur la réputation, autrement dit.

Alain Connes : Simplement, comme ça, par ouï dire, etc., qui critiquent sans fondement. Mais je pense que c'est important de s'exprimer par rapport à certaines critiques, tu parlais d'Arnold, par exemple...

Pierre Cartier : Laurent Lafforgue aussi.

Alain Connes : Comment ?

Pierre Cartier : Il prétend qu'il n'a jamais lu un livre de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Bon eh bien, ça, ça n'est pas pareil.

Alain Connes : Non, mais ça n'est pas pareil, parce qu'Arnold...

Jean-Pierre Serre : Arnold, c'est pire que ça. Prenons par exemple dans la littérature, tu as des gens qui dans la même phrase, vont dire "Bourbaki est beaucoup trop abstrait !" et "Pourquoi est-ce que Bourbaki n'a pas fait la théorie des catégories ?". Du point de vue de l'abstraction, c'est bien plus difficile la théorie des catégories, mais ils ne se rendent pas compte de ce qu'ils disent. Ils sont contents de critiquer et voilà.

Alain Connes : Ca c'est parfaitement vrai.

Jean-Pierre Serre : Mais il y a quand-même quelque-chose de Bourbaki qu'il faudrait mentionner, c'est que beaucoup de gens accusent Bourbaki d'avoir essayé d'acquérir un certain pouvoir universitaire. Et ça, c'est sérieux, quand-même.

Alain Connes : Ca c'est sérieux, oui, tu peux en parler, mais je pense que la raison, elle est simple, c'est qu'en fait, les membres de Bourbaki étaient les meilleurs mathématiciens du moment, et donc... je veux dire, c'est pas infiniment étonnant qu'ils se soient retrouvés à la Sorbonne dans un endroit pareil.

Jean-Pierre Serre : Mais enfin, ça fait partie des choses que l'on voit sur Bourbaki et qui me sont désagréables parce que c'était pas le cas quand j'étais débutant, parce qu'ils étaient à Nancy, ils étaient pas...

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Mais après ils sont tous venus à Paris.

Alain Connes : Effectivement si tu veux, la question qu'on peut se poser, c'est "est-ce qu'il y a eu un moment où Bourbaki a joué le rôle d'une coterie, d'une secte, enfin ?". Je veux dire, finalement, les gens se rencontrant quand-même un mois par an, avaient le temps de discuter ensemble, de prendre des décisions...

Jean-Pierre Serre : Extrêmement rarement. Je ne me souviens pas de discussions à table, par exemple, sur les postes, les choses comme ça.

Alain Connes : Sur les postes, non...

Pierre Cartier : Non, ça, c'était interdit.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'était moralement interdit, oui.

Alain Connes : C'est d'autant plus outrageant, ce genre d'accusation, si tu veux, que moi, si j'ai un souvenir de coterie qui n'est pas du tout Bourbaki, c'est que j'ai été le rapporteur pour Grothendieck en 1984, pour le CNRS.

Pierre Cartier : Ah, c'était toi.

Jacques Dixmier : Quand, à quelle date ?

Alain Connes : En 1984. Grothendieck était candidat au CNRS, d'accord, et j'étais son rapporteur. J'ai demandé à Jacques d'écrire une lettre, il fallait

quand-même écrire des lettres de recommandation, il voulait faire des maths.

Jean-Pierre Serre : Et à l'époque, il voulait réellement faire des maths ? Parce qu'il a demandé des postes à une époque où il quittait les maths.

Alain Connes : Il avait son *Esquisse d'un programme*, il avait un programme qui était tout à fait extraordinaire.

Pierre Cartier : Un travail magnifique d'ailleurs.

Alain Connes : Magnifique, et alors si tu veux, ce qui s'est produit, c'est que je suis arrivé à la commission du CNRS donc, je faisais partie de la commission du CNRS et je me suis aperçu, avant qu'on commence, que l'ordre du jour avait été établi de telle sorte qu'on discuterait le cas de Grothendieck au moment où il n'y aurait plus de poste de disponible. Donc j'ai fait un scandale, j'ai mis... et ça, ça avait été fait par les syndicats, c'est-à-dire que ce qui était derrière, en amont, c'était pas Bourbaki, c'étaient les syndicats.

Jean-Pierre Serre : Ah non, mais ça, le pouvoir des syndicats, dans les commissions.

Jacques Dixmier : Ca n'a rien à voir, là.

Alain Connes : Non mais ce que je veux dire, c'est qu'on accuse Bourbaki, alors qu'il y avait à la manœuvre des coteries qui étaient bien pire.

Pierre Cartier : Oh, ben, il y avait Malliavin aussi.

Alain Connes : Il y avait peut-être Malliavin, et alors, Grothendieck a eu un poste, il a eu un poste temporaire, ça a marché, mais je veux dire, c'était une situation absolument intenable à cause justement du...

Jean-Pierre Serre : Oui, j'ai peut-être eu tort de mentionner ce problème-là, mais moi, ça m'est désagréable qu'on mette ça sur le dos de Bourbaki, qui n'était pas du tout comme ça.

Jacques Dixmier : Comme autre chose qu'on met sur le dos de Bourbaki, il y a les maths modernes, l'accusation bateau pendant des années, mainte-

nant il n'y a plus de maths modernes, alors on n'en parle plus mais.

Alain Connes : Non mais ça, il faut s'en défendre, et...

Jacques Dixmier : Pendant 10 ou 20 ans, ça a été la tarte à la crème.

Alain Connes : Il faut s'en défendre, effectivement et Pierre tu disais...

Pierre Cartier : Ben que les plus actifs là-dedans, c'était par exemple Lichnerowicz.

Jean-Pierre Serre : C'était Lichné essentiellement et Choquet.

Pierre Cartier : Et qui n'étaient pas de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Mais qui étaient des sympathisants de Bourbaki, remarque, tous les deux.

Alain Connes : Ah bon ? Lichnerowicz était sympathisant de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, il laissait même entendre plus ou moins, enfin, des gens disaient qu'il était membre de Bourbaki, et il ne démentait pas.

Alain Connes : Il laissait faire.

Jacques Dixmier : Je me demande s'il n'y avait pas un contentieux entre Weil et Lichné, mais bon, j'ai jamais cherché à approfondir...

Jean-Pierre Serre : Weil avait simplement une mauvaise opinion de Lichné, c'est tout. Ah ben, j'ai un souvenir précis, le souvenir précis, c'est que Lichné était censé avoir démontré je ne sais plus quoi sur des espaces Riemanniens symétriques et puis Weil est arrivé au congrès et on lui a dit ça, et il a dit "Ah non ça, sûrement pas, il a sûrement pas démontré ça". Et effectivement quelques jours après, on a su que la démonstration était fausse, tu vois ?

Pierre Cartier : Ah bon !

Jean-Pierre Serre : Non il savait d'avance que, il estimait que... *(grimace)*

Jacques Dixmier : Enfin les bagarres personnelles, ça existe partout, dans tous les milieux, et dans le milieu mathématique, et dans Bourbaki, et en dehors de Bourbaki, oh !

Jean-Pierre Serre : Une chose qui était sympathique dans les dîners, s'il y avait des choses qui étaient moralement interdites qui étaient de parler de postes, mais il y avait aussi de parler de nos propres travaux. Je me souviens de Dieudonné disant quelque-chose, et Weil disant "écoute, tes savants travaux, etc, tes savants travaux..."

Alain Connes : On s'en fout ! Ah ben ça, c'est très bien, ça.

Jacques Dixmier : Enfin, y en avait pas beaucoup qui avaient envie de parler de leurs propres travaux, enfin, la moindre pudeur.

Jean-Pierre Serre : Ah non, mais en discussion à table, tu vois... avec un voisin, quand-même on pouvait comme ça, non je crois que Dieudonné avait utilisé ça comme argument pour quelque-chose, il avait dit "moi je m'en suis servi dans ça, de..." Et alors Weil lui a dit "tes savants travaux" *(geste de faire signe à l'autre de se taire).*

Alain Connes : Ah ben ça, c'est parfait, c'est parfait. Justement c'est un élément essentiel dans ce que j'essayais de dire au début, c'est justement le fait qu'il y avait une pudeur et les gens mettaient de côté leur ego, et ils contribuaient justement à ça, et ça, c'est fondamental, parce que ça a créé cette fraternité, et ça a créé cet esprit de dévouement d'une certaine manière.

Jean-Pierre Serre : Si tu veux, c'est un peu comme ça que je suis entré dans Bourbaki sans le demander parce que ça ne me venait pas à l'idée qu'il fallait que je demande l'autorisation, c'était des maths, et j'estimais que des maths, j'avais toujours le droit d'y être, c'était spontané pour moi.

Jacques Dixmier : Ca me rappelle que moi, je ne me suis jamais posé la question financière à Bourbaki, ça tournait bien, je ne me suis jamais posé la question de comment ça marchait.

Jean-Pierre Serre : Des finances de Bourbaki, d'où ils recevaient l'argent ?

Pierre Cartier : La vente des bouquins, la vente des bouquins.

Jacques Dixmier : Oui, mais enfin, fallait organiser, fallait payer des impôts, ou ne pas les payer, enfin...

Pierre Cartier : Eh bien, il y avait une association pour ça.

Jacques Dixmier : Elle a été créée assez tardivement, l'association.

Alain Connes : A partir de 52.

Pierre Cartier : En 52, oui avant c'était Delsarte, avant.

Jean-Pierre Serre : Figure-toi qu'ils m'ont pris comme Trésorier, alors que je n'avais pas la moindre idée..., mais c'était Delsarte qui faisait tout, c'était sur le papier, j'étais Trésorier et puis il y avait peut-être un Président qui était peut-être Delsarte, mais je n'ai jamais vu le moindre compte de ma vie.

Pierre Cartier : Dans les 15 premières années, c'est Delsarte qui faisait tout ça.

Jacques Dixmier : Est-ce que comme anecdote, la présence d'acteurs de cinéma à des congrès t'intéresse ?

Alain Connes : Oh oui, bien sûr, toutes les anecdotes m'intéressent, j'avais prévu...

Pierre Cartier : Piccoli est venu nous voir.

Alain Connes : Ah bon ?

Jacques Dixmier : Oui, Piccoli, on était à Saint-Rémy-de-Provence, c'était un copain, c'était le cousin assez éloigné de Douady, c'est ça. Il est venu as-

sister à une ou plusieurs de nos discussions.

Jean-Pierre Serre : Non, pas plusieurs, non.

Pierre Cartier : Il a été parfait, il a été d'une modestie parfaite.

Jacques Dixmier : Il a pas dit un mot, il s'est assis dans un coin.

Alain Connes : Ah bon ? Quand-même, ah ça, c'est pas mal alors comme anecdote.

Jean-Pierre Serre : Assis dans un coin... Il me revient une anecdote, tu vois. C'était à l'abbaye de Royaumont et on discutait des Espaces Vectoriels Topologiques donc c'est il y a vraiment très longtemps. Et on était sur une terrasse avec du soleil, et il y avait des chaises longues, et on s'était installés dans les chaises longues, et Weil était là, et les Espaces Vectoriels Topologiques, ça l'embêtait, tu vois, alors Weil s'était endormi. Alors quand on s'est aperçu qu'il s'était endormi, on est tous partis sans faire le moindre bruit, et on est allés regarder par les fenêtres et on a vu à un moment Weil qui se retournait et il ne pouvait engueuler personne, il n'y avait personne ! *(rires de tous)*.

Pierre Cartier : Ca, je connaissais pas, ça.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est 49, je pense. Je pense, parce que c'est ma première année, c'était sûrement ça. Oh, c'étaient les E.V.T. de dimension finie, tu vois.

Alain Connes : Les E.V.T. de dimension finie, non...

Jean-Pierre Serre : Ecoute, quand le corps n'est pas complet, c'est pas tout à fait trivial et par exemple, il y a des choses qui sont pas forcément fermées l'une dans l'autre, et bon, par contre, si le corps est complet, il ne se passe rien. Oui, tu vois, c'est pas terrible. Mais je revois encore la tête de Weil, il était un peu penaud, tu vois.

Alain Connes : Sûrement *(rires)*.

Jacques Dixmier : Et pour te dire que les discussions étaient parfois informelles, je me souviens d'une séance où, c'était l'été, on était dans une cour, un jardin, et Douady est parti avec une pelle et il est revenu quelques minutes plus tard en nous montrant ce qu'il avait fait, il avait tué une vipère et il nous montrait fièrement la vipère.

Jean-Pierre Serre : Il y a eu une fois, il m'a lancé un serpent, c'était paraît-il une couleuvre, mais c'est assez désagréable quand on vous lance un serpent dans les bras, vivant, lui, alors !

Pierre Cartier : Douady, la chasse aux vipères, c'était une de ses obsessions.

Jean-Pierre Serre : Il les tuait.

Jacques Dixmier : Douady et les contre-exemples.

Jean-Pierre Serre : A l'époque, on tuait les vipères, maintenant elles sont protégées.

Alain Connes : Jacques a Douady et les contre-exemples, c'est justement envoyer des vipères à quelqu'un.

Jacques Dixmier : On discutait ce que Godement appelle le monstre, le chapitre 3 des groupes de Lie.

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est pas un monstre, je te le dis encore une fois, c'est un très beau chapitre.

Jacques Dixmier : Et Douady était là et j'étais là et donc un soir, d'habitude, on allait se coucher assez tôt, vers 10 heures, mais là, je sais pas pourquoi, j'était resté travailler jusque vers minuit et Douady, lui non-plus, n'était pas allé se coucher, il est rentré à l'hôtel, il m'a vu, il était excité, il m'a dit "j'ai trouvé le contre-exemple sur les groupes de Lie, devine ce que c'est !". Alors, j'essaye de lui suggérer "t'as trouvé ceci ?", "non c'est pas ça !"... "non, c'est pas ça !". Et puis alors tout de même, à un moment donné, je me suis dit "est-ce ça ne serait pas", ça me paraissait presque impossible, est-ce que par hasard, il aurait trouvé une algèbre de Lie qui ne correspon-

drait à aucun groupe de Lie ?...

Jean-Pierre Serre : C'est ça, Banachique ou un truc comme ça, mais pas de dimension finie quand-même...

Jacques Dixmier : Alors je lui dis "est-ce que c'est ça ?"... "Oui, c'est ça !". Et puis alors, il s'est mis à hurler, il était minuit, il a dû réveiller la moitié de l'hôtel *(éclats de rire)*. J'ai eu un mal fou à le calmer.

Pierre Cartier : C'était un vrai problème, ça.

Jean-Pierre Serre : J'espère que c'est en exercice dans Bourbaki, ça.

Jacques Dixmier : Ca a passé en exer. bien sûr. Tu parles de l'importance du contre-exemple, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, et puis il y avait aussi, Dixmier, tu avais fait, il me semble, des contre-exemples rigolos, est-ce que tu avais pas fait un exemple où une famille a un paramètre de groupes de Lie et les revêtements universels ne peuvent pas se prolonger *(faisant des gestes avec les bras pour illustrer son propos)*.

Alain Connes : Il n'y a pas de relèvement de l'homotopie, tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Je pense.

Jacques Dixmier : Pas moi, non, je n'ai pas de souvenir de ça.

Jean-Pierre Serre : Ce n'est pas toi ?... Mais celui que tu dis, je crois que c'était un sous-espace non fermé dans un Banach, il y avait un truc comme ça.

Jacques Dixmier : Ah c'était en dimension infinie, naturellement.

Alain Connes : Donc l'aspect créatif est souvent dans les exercices, effectivement.

Jacques Dixmier : Oh non t'exagères.

Jean-Pierre Serre : Il y a beaucoup de choses dans les exercices.

Jacques Dixmier : Des choses que Dieudonné est allé chercher.

Jean-Pierre Serre et Alain Connes : Non non non pas du tout.

Jean-Pierre Serre : J'ai fabriqué quantités de choses que j'ai mises dans des exercices, tu vois, qui n'étaient pas dans la littérature, non, qui n'étaient pas connues, quelquefois.

Jacques Dixmier : Je suis persuadé que tu as mis des tas de choses, mais enfin, c'était pas la majorité des exer. quoi.

Jean-Pierre Serre : *(se levant, et allant vers la table des livres)* A partir de ces livres-là, ça tu vois, Dieudonné n'a contribué à aucun exercice là-dedans : ça, ce sont des exercices entièrement à nous... Tu vois, les Coxeter hyperboliques par exemple, qui sont là, d'ailleurs avec des fautes d'impression. Ben ça a été mal imprimé, bon. Non, des quantités de choses, j'avais mis des invariants de groupes, engendrés par des réflexions en caractéristique p.

Jacques Dixmier : La caractéristique p, Dieudonné connaissait ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Non il connaissait absolument pas. Les invariants peut-être.

Jacques Dixmier : Non, pas les invariants. Enfin, je ne sais pas, son bouquin sur les groupes classiques, je ne l'ai quasiment pas lu.

Jean-Pierre Serre : Ecoute, il y a des exercices, là, ils sont jolis comme tout. C'est pas du tout pareil que les premiers livres de Bourbaki où effectivement, Dieudonné prenait dans des articles, des choses, et il les mettait tandis que là, moi, quand j'en faisais, c'était différent, je me posais des questions, ou bien, alors, quelque-chose que je savais être vrai, j'arrivais à trouver une façon de le rédiger en exercice. Non, il y a énormément de choses.

Alain Connes : Je crois que c'est un moment idéal pour terminer.

Jacques Dixmier et Jean-Pierre Serre : Terminons.

Alain Connes : On pourrait discuter pendant des heures.

Jean-Pierre Serre : On pourrait "*s'engueuler*" pendant des heures, pour donner une idée de ce que c'était ! *(rires)*

Alain Connes : Je pense que ça donne quand-même une bonne idée de ce que c'était.

Transcription [1] de l'entretien entre
Jean-Pierre Serre
et
Alain Connes
au sujet de la correspondance
Serre-Grothendieck

Alain Connes : Alors ce que je propose, c'est que notre discussion commence justement en l'année 1955, je lis ce que dit Grothendieck, il dit : "l'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique, celui du passage de l'analyse à la géométrie". Et il dit : "je me rappelle encore de cette impression saisissante, toute subjective certes, comme si je quittais des steppes arides et revêches".

Jean-Pierre Serre : Oui, et c'est pas gentil pour ce qu'il faisait avant...

Alain Connes : Non ! Non, non !

Jean-Pierre Serre : Parce que, il faut vous expliquer que Grothendieck avait été à Nancy et que là, sur un certain sujet qui était assez à la mode mais un peu restreint quand-même...

Alain Connes : Oui, c'étaient les espaces vectoriels topologiques...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, il avait presque résolu tous les problèmes du coin.

Alain Connes : C'est-à-dire qu'on lui avait donné 14 problèmes, c'était Dieudonné je crois, qui les lui avait donnés, ou Schwartz.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas si c'est 8, ou...

Alain Connes : Ils lui avaient donné 14 problèmes à résoudre...

1. Transcription : Denise Vella-Chemla, 26.1.2019.

Jean-Pierre Serre : qu'ils ne savaient pas faire...

Alain Connes : qu'eux ne savaient pas faire... et Grothendieck et je pense que c'était la première fois que Grothendieck appliquait sa méthode que Serre a décrite comme étant : "pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales".

(Rires)

Jean-Pierre Serre : C'était un sujet qui était un peu bouché, quand-même.

Alain Connes : Oui, c'est ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : On a eu l'impression qu'il avait résolu à peu près toutes les questions. En fait, c'est pas tout à fait vrai. Il y avait des contre-exemples à trouver.

Alain Connes : Oui, des contre-exemples à trouver...

Jean-Pierre Serre : Il y avait les Banach, il y avait des jolis contre-exemples à trouver, mais il ne les a pas trouvés. Mais, il en avait assez, quand-même.

Alain Connes : Mais il en avait assez et alors la question que je me suis posée, parce que j'ai regardé la thèse de Grothendieck, quand il a passé sa thèse, j'ai regardé la deuxième thèse. Et alors la deuxième thèse de Grothendieck, ça c'était, ça, c'est très intéressant, la deuxième thèse de Grothendieck, c'était : "Théorie des faisceaux"

Jean-Pierre Serre : Ah ? ! *(étonné et intéressé)*

Alain Connes : donc ça veut dire, enfin, c'est ma conjecture, que le moment où il a... il a bifurqué des espaces de l'analyse fonctionnelle...

Jean-Pierre Serre : Et il avait envie sûrement.

Alain Connes : Et il avait sûrement envie de bifurquer, c'est au moment

de sa deuxième thèse, on lui a demandé d'exposer la théorie des faisceaux...

Jean-Pierre Serre : Alors il faut vous expliquer ce que c'est que la deuxième thèse parce que ça n'existe plus. A l'époque quand on passait sa thèse, on avait la thèse principale, ce qu'on avait fait, et puis le jury vous donnait un autre sujet. C'était un sujet que l'on donnait à l'intéressé avec son accord en général, ça se passait assez en famille, ça, souvent, pas toujours, pas toujours. Et alors, la personne en question parlait une demi-heure ou 20 minutes de ça et c'était très bien. Et je pense que Grothendieck avait dû plus ou moins choisir son sujet. En plus, tu vois, le lien avec les faisceaux, c'est que, déjà à l'époque, on se rendait compte que sa théorie des espaces nucléaires était si bonne que tu pouvais faire des produits tensoriels...

Alain Connes : C'est ça, qui étaient uniques bien sûr.

Jean-Pierre Serre : où, par exemple, Kunneth, que la formule de Kunneth marchait et par exemple, j'ai vendu la théorie de Grothendieck à Bott...

Alain Connes : Oui, bien sûr, à cause de ça...

Jean-Pierre Serre : ...un an ou deux ans après pour quelque chose, je lui ai dit : "tu sais, tu as un produit de variétés, eh ben, tu dois faire comme si c'était un produit tensoriel et puis voilà, tout marche !".

Alain Connes : et puis, non seulement ça, absolument, mais l'idée philosophique en fait qui est derrière les espaces nucléaires, c'est que ce sont des espaces de dimension finie. C'est-à-dire en fait, on les traite...

Jean-Pierre Serre : Oui, ils se comportent...

Alain Connes : ... , ils se comportent comme des espaces de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Bon, ça, c'est un peu technique.

Alain Connes : C'est un peu technique. Ah, mais, on va rentrer dans la technique.

Jean-Pierre Serre : Il est passé très naturellement...

Alain Connes : à la théorie des faisceaux. Enfin, à la géométrie algébrique.

Jean-Pierre Serre : Enfin, d'abord à la topologie...

Alain Connes : Absolument. Alors, la question que je voulais te poser, là-dessus, justement, c'est "quand est-ce que Grothendieck est rentré dans le groupe Bourbaki ?", tu te souviens ?

Jean-Pierre Serre : Oh, ça a été un petit peu, oh, je ne sais pas. Je n'ai pas de souvenir du tout de date. C'est nettement après ça.

Alain Connes : C'est nettement après ça, bon, ben d'accord. C'est ce que je voulais savoir, que c'est nettement après ça.

Jean-Pierre Serre : Nettement.

Alain Connes : Nettement, d'accord, parce qu'en fait...

Jean-Pierre Serre : Nettement, bon attends... Là, tu parles de 55. Est-ce qu'en 55... Quelle est l'année où il est parti au Kansas ?

Alain Connes : Bon, eh bien, ça, je ne pourrais pas te le dire.

Jean-Pierre Serre : Parce qu'il m'a écrit une lettre du Kansas, alors.

Alain Connes : La lettre sur...

Jean-Pierre Serre feuillette son exemplaire de la correspondance qu'il prend sur la table.

Jean-Pierre Serre : Elle est de 55.

Alain Connes : La lettre sur le diplodocus... homologicus. Et il parle d'une emmerdante rédaction pour Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est donc en 55, je pense, le Kansas. Et je dirais qu'il a dû entrer à Bourbaki, il a dû y être pris vers 57, peut-être.

Alain Connes : Ah bon, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, un truc comme ça.

Alain Connes : D'accord, d'accord, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas : il s'est mis à faire des rapports pour Bourbaki, d'énormes rapports bien sûr.

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Nous parlons de Bourbaki ensemble en 59. En 59, il y était, certainement.

Alain Connes : Non, sûrement, mais il me semble...

Jean-Pierre Serre : Donc, c'est par là.

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre continue de feuilleter son exemplaire à la recherche de l'information précise.

Jean-Pierre Serre : Je lui dis... Moi, je lui parle de Bourbaki en 58 déjà donc visiblement...

Alain Connes : Non, je pense que... il y était avant.

Jean-Pierre Serre : Non, en 58, je lui dis "le congrès Bourbaki a été très agréable.". Donc, c'est que, il aurait pu y être. C'est 57, je pense, Bourbaki.

Alain Connes : 57 , d'accord, 57. Ce qui m'a beaucoup frappé, moi, en lisant la correspondance, c'est euh, vraiment euh, au moins au début, puis après je parlerai d'autres choses, mais à quel point Grothendieck justement, arrive à gagner ta confiance d'une certaine manière, et je pense qu'il y a un point qui m'a beaucoup frappé, c'est le moment où il comprend ta dualité à

travers les *Ext*, c'est-à-dire, là, tu lui dis : "c'est vraiment rupinant, etc..."

Jean-Pierre Serre : Oui, mais la confiance entre nous, elle était venue au moins 2 ans avant, tu vois : j'étais allé à Nancy...

Alain Connes : Ah bon ? Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Eh oui ! *(en éclatant de rire)* J'enseignais la mécanique rationnelle à Nancy...

Alain Connes : Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Je l'avais en horreur, mais je faisais aussi un séminaire de topologie, je discutais avec Grothendieck, donc j'ai vu de près ses espaces nucléaires, tu vois, et ça m'a beaucoup frappé parce que c'était très bon comme idée, ces produits tensoriels, et donc on était en confiance, depuis longtemps.

Alain Connes : Vous étiez déjà en confiance depuis longtemps, mais bon au niveau mathématiques, il y a déjà dès le début de la correspondance, il y a plusieurs points qui frappent assez et qui sont par exemple tout son traité sur l'algèbre homologique, c'est-à-dire ce qu'on appelle le Tohoku.

Jean-Pierre Serre : Oui ça m'intéressait pas spécialement.

Alain Connes : Ca t'intéressait pas spécialement ?

Jean-Pierre Serre : Non, je considérais ça comme plus ou moins évident, tu vois ? !

Alain Connes : C'est-à-dire, il y avait le Cartan-Eilenberg.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, c'était de la rédaction. D'ailleurs pour lui aussi, c'était pareil.

Alain Connes : C'était de la rédaction.

Jean-Pierre Serre : Il le dit : “Pour comprendre quelque chose, j’ai besoin de l’écrire.”.

Alain Connes : Oui, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et du coup, il le rédigeait mais pour moi il y avait rien d’original dedans.

Alain Connes : Ah ? ! Moi, il y a quand-même quelque-chose qui m’a beaucoup frappé là-dedans.

Jean-Pierre Serre : Bon, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes.

Alain Connes : Voilà. Non, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes, mais pas seulement. Il y avait au niveau des exemples. C’est-à-dire au niveau des exemples, c’est-à-dire bon, bien sûr, l’exemple principal, c’était les faisceaux de groupes abéliens sur...

Jean-Pierre Serre : Alors ça n’a pas vraiment été fait mais bon, c’était connu que c’était faisable, bon...

Alain Connes : Bien sûr, que ça marchait, d’accord ?. Mais bon il y avait la nuance entre l’aspect Cech, enfin l’aspect si tu veux pour calculer la cohomologie, mais, en fait, moi, ce qui m’a beaucoup plus frappé quand j’ai lu cet article en détail, c’était un autre exemple, qui a l’air de rien, mais j’y reviendrai après, et c’est l’exemple de ce qu’il appelait les catégories de diagrammes.

Jean-Pierre Serre : Catégories de ?

Alain Connes : de diagrammes. Alors ça, ça passe inaperçu dans l’article...

Jean-Pierre Serre : Alors, oui effectivement parce que je ne m’en souviens pas du tout.

Alain Connes : Tu ne t’en souviens pas ? Voilà !

Jean-Pierre Serre : Eh bien, même maintenant.

Alain Connes : Alors, je vais t'expliquer ce que c'est. Et le rôle que ça a joué je pense après, mais c'est aussi une conjecture. Donc en fait, qu'est-ce qu'il fait ? Il a tout un chapitre enfin, sur cet exemple-là et qu'est-ce qu'il dit ? Eh bien, il dit...

Jean-Pierre Serre : Tiens, c'est curieux, je ne me souviens pas du tout de ça !

Alain Connes : Il dit : on prend une petite catégorie et on prend les foncteurs de cette petite catégorie vers les groupes abéliens.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, c'est une catégorie de diagramme.

Alain Connes : Voilà, c'est ça une catégorie de diagrammes, pour lui. Et après, il vérifie bien-sûr que bon, c'est une catégorie abélienne, tout marche, etc.

Jean-Pierre Serre : Oui, effectivement, c'est une idée qui était certainement pas dans l'air, ça, non.

Alain Connes : Voilà. Donc, si tu veux, moi, c'est cette partie-là qui m'a beaucoup intéressé, comme partie novatrice, et j'y reviendrai après.

Jean-Pierre Serre : Mais moi, elle ne m'intéressait pas parce que ça ne représentait rien de concret pour moi. Il ne calculait pas des groupes d'homotopie, il ne calculait rien avec, tu comprends ?

Alain Connes : Oui, je suis bien d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, j'ai tendance à être comme ça.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, bien évidemment, bien évidemment, mais j'y reviendrai après... Alors, en fait, donc, j'ai entendu dans une des interviews que tu as données que, je veux dire, ça te fait réagir lorsque les gens, et je pense qu'ils ont tort, parlent d'une révolution à propos de la théorie des schémas. Ca, je pense qu'on est bien d'accord, c'était dans l'air et en fait, tu

fais remonter ça à Krull ?

Jean-Pierre Serre : Parce que Krull, bon, c'était un algébriste, Krull. Mais on avait le sentiment qu'il devinait la géométrie qui était derrière. Et en tout cas, il construisait les anneaux locaux, la localisation...

Alain Connes : Il construisait la localisation qui est l'essentiel, oui.

Jean-Pierre Serre : ...mais il n'avait pas fait le pas d'aller au projectif, tu vois, il était affine, et ça, la géométrie quand elle reste affine, elle est pas collée.

Alain Connes : Ah d'accord...

Jean-Pierre Serre : La géométrie, quand elle est affine, ça marche pas...

Alain Connes : Il faut la recoller, non, bien sûr, sinon, ça ne marche pas, c'est sûr, la cohomologie...

Jean-Pierre Serre : C'est pas assez intéressant.

Alain Connes : Et alors, ce qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est à quel point, justement, Grothendieck est arrivé dans un monde idéal. Pourquoi ? Parce que Serre et plusieurs autres personnes faisaient un séminaire à Princeton sur les schémas, au moment où ils les écrivaient. Dieudonné l'aidait à rédiger.

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est un petit peu après quand-même.

Alain Connes : C'est un petit peu après.

Jean-Pierre Serre : Au début, ça a été purement, la correspondance avec moi, quand il était à Kansas, tu vois ?

Alain Connes : C'est ça, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ca a été pour lui, ça, le changement net, c'était Kansas, et il m'écrivait,

Alain Connes : C'est ça. Ca a donné lieu au développement. D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et puis après, il a été recruté par Motchane. Alors je sais pas comment ça marche au point de vue des années...

Alain Connes : C'est 58, le recrutement par Motchane, c'est 58.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, tandis que Kansas, c'est 55. Il y a eu une période intermédiaire. Il était au CNRS, alors, peut-être ?...

Alain Connes : Je ne sais pas, alors ça, je ne sais pas.

Jean-Pierre Serre : Il était apatride, alors, c'était pas si simple.

Alain Connes : C'était assez difficile pour lui sur ce plan-là. Donc au niveau des... au niveau des schémas, bon, c'est clair. Aussi, pareil, je veux dire la correspondance est idéale au niveau des motifs, ça c'est formidable, parce qu'on voit en 64, votre correspondance, toi, tu parles de la métaphysique des motifs, etc.

Jean-Pierre Serre : Et alors, ce que la correspondance ne montre pas, c'est que c'est en fait une conséquence de tas de remarques que je lui faisais : je lui disais "tu sais, entre variétés, si on admet les conjectures de Weil, ça suggère que la cohomologie se coupe en morceaux et des choses comme ça."

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et ça, ça a mijoté dans son crâne. Mais alors, il a fait quelque chose que moi, je n'aurais jamais fait, il a eu l'idée de définir ça, avec un courage !!!

Alain Connes : qui le caractérise !

Jean-Pierre Serre : intellectuel extraordinaire parce que j'aurais jamais pensé que les cycles algébriques, c'était assez fort pour faire...

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre : ça, mais il a eu le courage de le faire. C'est peut-être faux d'ailleurs, c'est peut-être faux, mais en tout cas, c'était un bon départ.

Alain Connes : C'est la conjecture de Hodge. C'était un bon départ. Mais alors il y a une autre partie pour moi absolument essentielle, et je vais te raconter ce que je sais, et tu vas me corriger, d'accord ? C'est pour la cohomologie étale. Alors ce que j'ai entendu dire, mais je ne sais pas si c'est vrai, tu me corriges, ce que j'ai entendu dire c'est que c'est toi qui as donné un séminaire, non, au séminaire Chevalley, en 58...

Jean-Pierre Serre : oui bien sûr, tout cela est correct, oui, c'était en 58.

Alain Connes : ...dans lequel tu as expliqué que pour avoir des fibrés localement triviaux en terme de groupes algébriques, il fallait prendre des revêtement étales...

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : alors, et que, à la sortie de ton séminaire...

Jean-Pierre Serre : C'est absolument correct. Et j'ai fait mon exposé, je me vois encore, au tableau...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : ...parlant à Poincaré de ça...

Alain Connes : C'était à Poincaré, d'accord.

Jean-Pierre Serre : et à la fin de l'exposé, Grothendieck me disant : "ça va faire la cohomologie de Weil". Parce que ça s'appelait cohomologie de Weil, c'était la cohomologie que nous voulions en tout cas.

Alain Connes : Mais alors...

Jean-Pierre Serre : Instantanément.

Alain Connes : Instantanément ?

Jean-Pierre Serre : Instantanément : moi, j'avais présenté, effectivement et systématiquement, je fais un H^0, bon le H^0, c'est trivial. Je fais le H^1.

Alain Connes : Toi, c'était le H^1 ?

Jean-Pierre Serre : Oui, mais j'ai pas eu le courage intellectuel de me dire "ça pourrait faire un H^2". Tandis que lui, il a dit, tout de suite, instantanément, et c'est parfaitement correct. Cette légende, pour une fois, elle est juste.

Alain Connes : C'est le courant, qui est passé...

Jean-Pierre Serre : Ca a déclenché. Et... en un sens... tu regarderas le texte que j'ai écrit, je l'avais vraiment rédigé comme ça, c'était avec, j'avais écrit H^1, tu vois ?

Alain Connes : Oui, oui ! Ah ? Tu avais déjà écrit la suite cohomologique, tu avais noté H^1, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, j'avais écrit H^1. J'avais la bonne cohomologie en dimension 1, c'était ça mon idée. J'étais partie de l'idée que le H^1, de Zariski, pour les revêtements, est ridicule puisqu'on trouve rien. Alors tu les mets de force, dans la machine.

Alain Connes : Tu les mets de force ? Ah, d'accord...

Jean-Pierre Serre : Et j'avais constaté que ça faisait un bon machin. Mais j'avais pas eu l'idée que ça pourrait... On m'aurait posé la question, j'aurais dit qu'il fallait peut-être des idées nouvelles en dimension plus grande, tu vois.

Alain Connes : Oui, c'est ça, c'est ça.

Jean-Pierre Serre : Tandis que lui, était...

Alain Connes : ...était convaincu que ça marchait pour les dimensions plus grandes.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, il était d'un optimisme extraordinaire.

Alain Connes : Et toi, souvent, on voit bien dans ta correspondance à quel point, tu lui donnes des contre-exemples *(éclats de rires)*.

Jean-Pierre Serre : *(souriant franchement)* Un peu moins optimiste.

Alain Connes : De manière régulière...

Jean-Pierre Serre : Un peu moins optimiste. Oh, eh bien, tu sais, Weil m'a dit un jour, ça m'avait frappé : "ce sont les optimistes qui démontrent les théorèmes".

Alain Connes : Oh, un petit peu, bon, il ne faut pas être trop optimiste non plus. Il faut une certaine dose d'optimisme.

Jean-Pierre Serre : Bon, en tout cas, cette légende, elle est absolument correcte, donc, ça, c'est bien.

Alain Connes : D'accord, ça, c'est bien, alors il y a une notion que je voudrais aborder, Je pense savoir quelle sera ta réaction mais je vais...

Jean-Pierre Serre : Eh bien, dis toujours.

Alain Connes : Mais j'y vais toujours. Voilà, pour moi, une des grandes découvertes de Grothendieck, c'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : C'est la notion de... ?

Alain Connes : C'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : Alors, je ne sais même pas ce que c'est. Je n'ai même jamais fait l'effort de comprendre exactement parce que... dès qu'il y avait

des catégories dedans, en abondance, je m'arrêtais d'écouter.

Alain Connes : D'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : C'est, c'est, mon crâne s'est un peu bloqué sur ces choses-là.

Alain Connes : Alors, j'avoue que j'avais exactement la même attitude jusqu'à quelques années... et que finalement je pense que c'est une notion qu'on ne peut apprécier que quand on la rencontre indépendamment.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est sûr.

Alain Connes : Tu es d'accord, hein ?

Jean-Pierre Serre : Mais je n'en ai jamais eu besoin.

Alain Connes : Tu n'en as jamais eu besoin, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Donc en fait, si je te pose la question "à quel moment Grothendieck a inventé les topos ?"...

Alain Connes : Je ne sais pas et je m'en fiche.

Jean-Pierre Serre : Tu ne saurais pas, tu t'en fiches.

Alain Connes : Bon, je ne m'en fiche pas vraiment.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, c'est sûr.

Alain Connes : Ca ne me dit rien.

Jean-Pierre Serre : Ca ne te dit rien, OK, d'accord...

Alain Connes : Non alors là, vraiment.

Jean-Pierre Serre : Je sais qu'on en fait beaucoup de... qu'on en parle énormément, que c'est très à la mode et tout ça, mais...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : Mais c'est pas quelque chose qui te... Et c'est exactement ce que je pensais, hein, je pensais que...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : ...quand j'avais bossé dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca ne me dit rien... du tout.

Alain Connes : Voilà. Il y a une autre, comment dire, il y a une autre distinction, que tu fais, dans plusieurs interviews, et qui ressemble un peu à la distinction entre justement, que faisait Grothendieck entre l'analyse fonctionnelle et la géométrie algébrique, c'est..., tu fais une distinction un peu entre la géométrie algébrique et la théorie des formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Ah, ça a beaucoup plus de charme dans ma tête, eh bien, c'est-à-dire que... Non, là, nous allons dans une direction vraiment différente, ce sont des directions différentes et que, Grothendieck quand-même ne s'intéressait qu'aux théories qui se développaient logiquement par elles-mêmes, tu vois ?

Alain Connes : Eh bien, la *marée montante de théories générales*.

Jean-Pierre Serre : La *marée montante*, c'est ça. Or, l'un des charmes justement des formes modulaires et du programme de Langlands, c'est que, et ça n'est absolument pas logique du tout, c'est que, c'est une brillante idée qui dit "deux choses sont essentiellement presque identiques, enfin, elles *se correspondent*, or il n'y a aucune raison, a priori, du tout pour que ça soit vrai.

Alain Connes : Pour que ça soit vrai, d'accord. Et ça, c'est d'un charme extraordinaire.

Jean-Pierre Serre : Ca, pour moi, c'est d'un charme absolument incomparable par rapport à...

Alain Connes : à quelque chose qui se développe comme ça.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, ce sont les choses qui se développent petit à petit, comme ça.

Alain Connes : Oui, ça je comprends très bien.

Jean-Pierre Serre : Alors ça pour moi, ça s'incarnait dans des choses précises avec les formes modulaires. Ma conjecture par exemple...

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...sur les extensions Galoisiennes.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : La conjecture sur les courbes elliptiques. Tout ça pour moi a pris forme... vers 67. 67 est une grande année pour moi. Pour la théorie des nombres, parce que c'est l'année où il y a eu les motifs, j'ai vu tout de suite que les motifs étaient, étaient liés, tu vois ?

Alain Connes : En 64, c'étaient les motifs, déjà, dans la correspondance, c'est en 64.

Jean-Pierre Serre : Non, mais pour moi, c'est en 67 seulement que je... que je vois que ça doit être lié.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui parce que c'est à ce moment-là qu'il y a eu l'article de Weil sur les courbes elliptiques...

Alain Connes : Ah oui, ce qu'on appelle la conjecture de Taniyama-Weil.

Jean-Pierre Serre : ...qui confirmait que les courbes elliptiques devaient correspondre à des formes modulaires. Jusque là, c'était une espèce d'espoir vague, mais...

Alain Connes : Je comprends.

Jean-Pierre Serre : C'était pas concret, tandis que... Weil n'avait pas tout à fait la notion de conducteur mais presque. En tout cas, moi, je l'avais la notion de conducteur, et donc je pouvais, je pouvais énoncer beaucoup plus précisément la conjecture, et alors du coup, elle devenait absolument convaincante. C'était incroyable ! Je l'ai raconté quelque part, après discussion avec Weil, je crois, je suis rentré chez moi, j'ai regardé : "Ah ! !" (je savais qu'il n'y avait pas de courbes elliptiques de conducteur 1), "Ah ben oui, mais il n'y a pas de forme modulaire correspondant, tu vois ?"

(Rires partagés)

Jean-Pierre Serre : Ah et puis, il n'y en a pas non plus avec 8, oh ben, c'était pareil, et par contre, il y en a... Ah ! ! ! C'était lumineux, tu vois ? C'était lumineux. Et ça, c'est le genre de chose par exemple, qui n'est absolument pas Grothendieckien.

Alain Connes : C'est totalement orthogonal à... Mais ça, ça transparaît très clairement dans votre correspondance, complètement.

Jean-Pierre Serre : Ca, évidemment, ça me fait beaucoup plus d'effet, tu vois ? Alors à des niveaux plus élémentaires, à chaque fois qu'il y a des correspondances qui sont un peu surprenantes, ça me touche.

Alain Connes : Ca t'excite, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que au contraire, Grothendieck, ça...

Alain Connes : (*s'exclamant*) : il n'aimait pas !

Jean-Pierre Serre : Il n'aime pas, il n'aime pas ça.

Alain Connes : Et tout ça ressort parfaitement de la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Ce sont des points de vue un peu... : c'est bien plus romantique, quand il n'y a pas de relation évidente, et que les trucs sont les mêmes, enfin, c'est *(chuchotant presque)* un mariage fut au ciel, tu vois,

enfin, c'est le... le coup de foudre, tu vois...

(Rires)

Alain Connes : Justement, on se rapproche d'une période, de 68, enfin cette période un peu trouble par rapport à Grothendieck, donc on va moins parler de mathématiques.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'est... Il commence à quitter les maths, en 68.

Alain Connes : Il commence à quitter les maths.

Jean-Pierre Serre : Enfin, c'est pas loin, c'est en 70 à peu près, c'est vers 70 qu'il quitte à peu près.

Alain Connes : Voilà. C'est en 70 qu'il quitte l'IHES ?...

Jean-Pierre Serre : Je ne me rappelle pas des dates.

Alain Connes : Bon, je ne sais pas. Mais en tout cas, il passe 2 ans au Collège de France, c'est toi qui l'invites au Collège de France, sur 2 ans.

Jean-Pierre Serre : Alors c'était une chaire de savant étranger.

Alain Connes : C'était une chaire de savant étranger, qui durait 2 ans.

Jean-Pierre Serre : qui était pour un an. Qui était pour un an, et puis on l'a renouvelée, pour la seconde année. Mais on n'a pas voulu le renouveler pour la troisième fois.

Alain Connes : Pourquoi, il s'était fait des ennemis ? Tu veux dire ? Il s'était...

Jean-Pierre Serre : Comment ?

Alain Connes : Il s'était mal comporté, qu'est-ce qui s'était passé ?

Jean-Pierre Serre : Bah, *(soupir)*, c'était pas sa place parce que, écoute, il passait son temps à ce moment-là à dire qu'il fallait plus faire de sciences. Tu vois, il fallait plus faire de maths, il fallait plus faire de sciences, que c'était l'écologie. Bon ben s'il ne voulait plus en faire, qu'il aille ailleurs quoi, c'était... Non non, et j'étais pas content même que le CNRS le prenne. Je trouvais que c'était... que c'était pas bien...

Alain Connes : Que c'était une erreur... Mais ça, c'était longtemps après, ça, le CNRS.

Jean-Pierre Serre : Pas très longtemps, non.

Alain Connes : C'était en 84 qu'il a été pris au CNRS.

Jean-Pierre Serre : Non mais à ce moment-là. Non, c'était, il jouait un assez vilain jeu parce que il ne voulait plus faire de maths, tout ça, mais il voulait bien être payé, il voulait bien avoir un poste, tu vois, c'était quand-même, pour quelqu'un qui était en principe si... rigoureux.

Alain Connes : Mais il faisait pas ses cours, ou il faisait ses cours ?

Jean-Pierre Serre : Ah, eh bien, tu connais bien l'histoire des cours au Collège, non ?

Alain Connes : Non. Absolument pas.

Jean-Pierre Serre : Alors, la première année, il n'y a pas eu de problème. La première année, il a fait un cours. Il a fait un cours, je sais pas sur quoi.

Alain Connes : Si, c'était sur les groupes de Barsotti-Tate ou un truc comme ça.

Jean-Pierre Serre : Non, je crois que ça, c'est la seconde. La seconde année, il nous a donné comme sujet de cours, tu sais bien, les sujets que nous proposons au mois de juin...

Alain Connes : Oui, au mois de juin.

Jean-Pierre Serre : Il nous a donné un truc d'écologie.

Alain Connes : Ouh la !

Jean-Pierre Serre : Alors euh...

Alain Connes : Ah c'était à ce point-là alors... Je croyais qu'il avait donné deux sujets.

Jean-Pierre Serre : Non, non, pas du tout. Un sujet d'écologie. Alors l'administrateur a disjoint cette proposition-là du reste, nous avons voté sur tout le reste, on a voté oui pour tous les copains et puis ensuite, on a voté séparément sur le truc de Grothendieck, on a voté non à une large majorité. Moi j'ai voté non bien-sûr, sur l'écologie ! Alors Grothendieck a accepté, ça, il n'avait pas le choix. Et il a fait un cours sur Barsotti-Tate ou un truc comme ça, mais dans lequel il a commencé par "je ne peux pas vous parler de Barsotti-Tate sans vous expliquer que..." et puis, 4 heures d'écologie, tu vois, et...

Alain Connes : Mon Dieu !... D'accord !

(Eclats de rires)

Jean-Pierre Serre : Je crois que le pauvre Illusie a assisté. Je crois qu'il a pas dû y avoir grand monde à ce cours.

Alain Connes : Ah c'était un cours d'écologie alors...

Jean-Pierre Serre : De Survivre [2], enfin... Des bons sentiments quoi, des bons sentiments de Grothendieck, ça.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et alors, tu imagines, on n'avait pas du tout envie de le renouveler, tu comprends, avec un truc pareil.

2. Mouvement écologiste fondé par Grothendieck et ses amis.

Alain Connes : Mais ça me rappelle, d'ailleurs, dans la correspondance, une dissenssion que vous aviez eue, qui était au moment où Grothendieck avait voulu, enfin, je crois qu'il l'avait écrit, il avait écrit une lettre à Cartan

Jean-Pierre Serre : Ca c'est différent, il avait écrit une lettre à Cartan sur la guerre d'Algérie...

Alain Connes : sur la guerre d'Algérie, il voulait dispenser les normaliens de service militaire ou un truc comme ça, oui.

Jean-Pierre Serre : oui, dispenser les mathématiciens de service militaire.

Alain Connes : Ca t'avait un peu...

Jean-Pierre Serre : Je lui avais répondu que c'étaient quand-même délicat quand la peau des gens était en jeu de... oui, c'est ce que je lui avais dit, que certains ne se fassent pas tuer alors que d'autres peuvent... se font tuer. Alors il est exact que certains pays, effectivement, protégeaient leurs scientifiques, je crois que l'URSS par exemple...

Alain Connes : protégeait les scientifiques...

Jean-Pierre Serre : *(riant :)* Ils les tuaient pour des raisons politiques éventuellement, mais ils ne les envoyaient pas se faire tuer à la guerre.

Alain Connes : D'accord, lui parlait des Etats-Unis, c'est sûr, oui.

Jean-Pierre Serre : Et Grothendieck, lui, anarchiste d'origine, lui, son point-de-vue était "Si n'importe quelle raison peut marcher pour ne pas aller dans l'armée, alors on la prend, c'était ça son... Mais ça n'a pas été une discussion sérieuse. Il a écrit ça à Cartan et on n'en a plus parlé après.

Alain Connes : Il y a un certain nombre de lettres, effectivement, qui sont un peu restées sans réponse.

Jean-Pierre Serre : Et puis c'est la guerre d'Algérie, ça, oui, c'est la guerre d'Algérie.

Alain Connes : Oui, c'était en 61. Un certain nombre de lettres dont on voit qu'il n'a pas répondu et il y avait une lettre sur laquelle j'étais très très curieux de savoir si tu l'avais vue après ou quoi ?... Et c'est quand Dwork a démontré la rationalité des fonctions ζ. Ca, je suis très curieux de savoir comment il a réagi.

Jean-Pierre Serre : Oh ben, il s'en foutait.

Alain Connes : Ah il s'en foutait ? Alors que...

Jean-Pierre Serre : C'était en dehors de son truc.

Alain Connes : En dehors de son schéma, il s'en foutait, c'est incroyable, parce que la démonstration de Dwork est magnifique.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, je l'avais exposée à Bourbaki, je m'étais régalé.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Elle était magnifique mais, euh, par exemple, j'avais essayé de regarder ce que ça donnait pour la cohomologie avec des coefficients, et je ne me rappelle plus mais il y avait des difficultés quand-même, avec un groupe qui opère... Non mais de toute façon, il avait raison de son point de vue : il la voulait d'une certaine façon,...

Alain Connes : Il la voulait d'une certaine façon, il ne voulait pas se détourner de son objectif.

Jean-Pierre Serre : Non, c'était un accident, un accident, quoi, on avait démontré ça, quoi, un peu plus tôt qu'on aurait dû.

Alain Connes : Bon, mais est-ce qu'il n'y a pas là-dedans, plus ou moins, ...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)* : Tu vois, j'ai eu quand-même, je te raconte, vers euh... Quand est-ce que j'ai réfléchi à Riemann-Roch, moi ?... C'est vers...

Alain Connes : Ah oui, mais tu le dis ça, dans l'interview de Colliot-Thélène, c'est toi le premier qui as eu l'idée que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'était... *(petit rire modeste)*

Alain Connes : Et ça, c'est très important en fait. C'est très important, mais tu l'as jamais publié !

Jean-Pierre Serre : Non, c'était pas la peine parce que, quand j'ai correspondu avec Kodaira-Spencer, j'ai vu qu'ils avaient eu la même idée mais ils n'avaient pas mon théorème de dualité. Alors ils ont publié leur truc et moi, j'ai publié le théorème de dualité.

Alain Connes : Bon, donc ça va, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, c'était... Mais alors, quand j'ai réfléchi à ça, à Riemann-Roch, ce qui m'a amusé, c'était que j'ai essayé de le démontrer pour les courbes, tu vois...

Alain Connes : Oui, ben là, c'était juste H^1 et H^0 donc...

Jean-Pierre Serre : Eh, tu parles, oui ! Oui, oui, d'accord, mais alors, j'essayais là de démontrer quelque chose, qui était connu depuis environ 100 ans, quoi, c'est ça. Mais j'avais une idée des démonstrations qu'on pouvait faire, mais je les voulais pas.

Alain Connes : Non, mais excuse-moi, mais excuse-moi, c'est-à-dire quand tu dis que tu faisais ça, tu faisais ça avec des faisceaux Zariski, etc., ou... ?

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : C'est ça, c'est ça, hein, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Euh... Non, à l'époque, attends, à l'époque, est-ce que j'étais Zariski ou est-ce que j'étais, non, j'étais analytique-complexe à l'époque.

Alain Connes : Ah, tu étais analytique-complexe, c'était avant, euh...

Jean-Pierre Serre : C'était avant GAGA. J'ai fait FAC et GAGA en même temps. Non c'était analytique-complexe et, simplement, je voulais pas les démonstrations existantes. Je les voulais pas parce que, quand j'ai trouvé celle que je voulais, celle que je voulais, tu dois la connaître, c'est... tu as un diviseur d et ce que tu montres, c'est que si tu le sais pour d, alors tu le sais pour $d + p$ où p est un point. Or comme tu peux te balader, comme ça, et puis, quand $d = 0$, c'est...

Alain Connes : Une espèce de récurrence, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, je me vois encore à ma table de travail, quand j'ai trouvé ça, je l'ai écrit quelque part, je sais que 3 minutes après, j'avais la dimension 2, la théorie des surfaces.

Alain Connes : Paf ! Donc tu savais déjà que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Ah, oui, oui, oui, oui, oui. Je savais qu'avec ce style-là...

(Claquement de langue d'admiration d'Alain Connes)

Alain Connes : D'accord, d'accord, parce que comment il fallait l'énoncer ?...

Jean-Pierre Serre : Et tu vois bien comment il fallait faire ? ! Il fallait que je montre que si j'ai un diviseur sur la surface, et si je lui ajoute quelque-chose, et si je l'avais pour le diviseur, je l'ai encore pour...

Alain Connes : Ca continue à être vrai...

Jean-Pierre Serre : Et grâce au Riemann-Roch précédent, un p'tit peu plus, non non, ça m'a pris 3 minutes, je crois. Dimension 3, je pouvais pas parce qu'il y avait des choses à démontrer que...

Alain Connes : Oui, bien sûr...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : Mais typiquement, ça nous arrive souvent ça, on n'est pas content d'une démonstration parce qu'on en veut une qui fasse autre chose.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et celle-là, c'était formidable.

Alain Connes : Et ça, c'était en quelle année, que tu as fait ça, en gros ? 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est en gros 53.

Alain Connes : 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh à peu près, oui. Ma thèse est de 51. Je me suis arrêté de faire des groupes d'homotopie à peu près tout de suite. En 52, c'était le séminaire Cartan des variétés de Stein, et très rapidement, j'ai été élevé en taupe, comme toi d'ailleurs, avec l'idée que c'est la géométrie projective qui est bonne. La géométrie affine, c'est de la blague.

Alain Connes : C'est sûr.

Jean-Pierre Serre : Or Cartan, c'est de la géométrie affine, tu vois. Les variétés de Stein, ce sont des machins ouverts, c'est pas... Et les trucs compacts ont quand-même un charme...

Alain Connes : D'ailleurs, votre correspondance commence par une grosse bêtise de Grothendieck qui dit que le quotient d'une variété de Stein par un groupe...

Jean-Pierre Serre : Oui, non, mais je pense que ça, c'est une faute de frappe de Grothendieck, il a oublié de mettre fini.

Alain Connes : Fini, bien sûr, oui, je suis d'accord.

Jean-Pierre Serre : Après coup, je m'en suis rendu compte, c'était sûrement ça qu'il voulait dire. Mais il ne le corrige pas dans ça. Peut-être qu'il le croyait... Mais en tout cas, c'est pour ça que j'ai quitté le point de vue Cartan. C'est parce que pour moi, c'est la taupe qui m'a fait.

Alain Connes : Mais il y a un point essentiel dans ce que tu as fait, c'est l'utilisation de la topologie de Zariski, des faisceaux pour la topologie de Zariski.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est juste après, et ça, c'est... *(se reprenant)* Bon mais ça, c'est parler de moi, c'est pas parler de Grothendieck.

Alain Connes : Mais ça ne fait rien parce que, si tu veux, c'est complètement clair, en fait, quand on regarde avec une certaine distance, moi en tant que non spécialiste du tout, c'est, si tu veux, l'influence en fait, de Leray...

Jean-Pierre Serre : Oh oui, sur les premières années de Grothendieck, oui, oui, j'ai... oui, je l'ai influencé énormément, ça c'est clair.

Alain Connes : Tu l'as influencé énormément, donc...

Jean-Pierre Serre : Non, ce qui s'est passé, c'est que... sur l'espace projectif, sur les faisceaux sur l'espace projectif complexe, tu vois, j'ai pu voir qu'il y avait des modules, parce que j'ai pris les sections.

Alain Connes : Non mais, j'ai bien vu la preuve de ton article sur GAGA, justement.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'était dans un séminaire Cartan, c'était dans un séminaire je ne sais plus, en tout cas, j'ai fabriqué dans ce cas-là, et j'ai vu un dictionnaire avec les modules, alors je me suis dit "bon après, c'est pas possible, ça va marcher sur un corps quelconque." Et alors, c'est comme ça que je suis passé à FAC[3] qui s'est écrit alors, incroyable...

3. Faisceaux algébriques cohérents

Alain Connes : Oui, ça tu le dis plusieurs fois, que tu n'as pas eu à réfléchir.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : *(faisant le geste d'un papier interminable sortant d'une machine à écrire)* La machine a tapé, comme ça, un article de 100 pages, comme s'il existait déjà.

Alain Connes : Oui, alors donc là, justement, on va aborder une période qui est beaucoup plus délicate si tu veux, et qui est la fin de la correspondance, c'est-à-dire qu'il y a une très grande interruption dans la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Oh, ben y en a plus, au fond, de correspondance.

Alain Connes : Ah il n'y en a plus. Quand-même, il y a la lettre que tu lui as écrite, et que je trouve très très pertinente si tu veux, quand tu as reçu *Récoltes et Semailles. (On entend un gros soupir de Jean-Pierre Serre.)*. Donc quand tu as reçu *Récoltes et Semailles*, c'était en 86, je pense, hein ? Là, tu lui as écrit, et si tu veux, je m'en voudrais de mal te citer mais c'est très important...

Jean-Pierre Serre : Tu as fait des photocopies !

Alain Connes : Ah oui, bien sûr. Alors, je te lis, hein, pour être sûr, donc : *"J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées."*

Jean-Pierre Serre : *(riant)* il manque quelques centaines de pages, c'est tout !

Alain Connes : Oui, c'est ça. *"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"."*

Jean-Pierre Serre : Bien sûr, c'est évident comme question, et il passe 600 pages à ne pas y répondre.

Alain Connes : A ne pas y répondre, *(s'exclamant)* mais, ce qui est le plus intéressant, c'est que tu as une idée...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oh oui, j'ai une idée, je la connais, je suis encore d'accord avec cette idée.

Alain Connes : Alors, tu dis : *"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue..."* Alors c'est vrai que...

Jean-Pierre Serre : Oui, l'énergie, alors ça c'est vrai, il aurait fallu le connaître : physiquement et intellectuellement, c'était pareil, c'était phénom..., il pouvait travailler presque 24 heures, c'était extraordinaire. Il était une force, je connais personne qui avait autant de force que lui... Même, il y a des gens, je connais des gens qui sont intellectuellement très forts comme Thompson par exemple, Bombieri, sont très forts, mais Grothendieck, c'était une force, euh... animale !

Alain Connes : Tu dis, alors : *"Tu étais tout simplement fatigué (rires), quand-même, de l'énorme travail que tu avais entrepris. D'autant plus, qu'il y avait aussi les SGA."* Alors je rappelle que les SGA, bon, SGA3, je crois que c'est les groupes algébriques, y avait SGA4, c'étaient les topos, bon et alors tu dis : *"Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5"*.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, parce que alors, il était vraiment désastreux tu vois, il avait été ronéotypé par l'IHES mais il y avait trop de commutativité à vérifier, et Illusie qui était pourtant, Illusie qui était sérieux, sur un théorème vraiment décisif, avait écrit : "j'ai été incapable de vérifier"...

Alain Connes : Ouah, oui donc ça, c'était terrible.

Jean-Pierre Serre : Oui, "j'ai été incapable de vérifier..."

Alain Connes : Tu dis : *"Ils en étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes, et ces commutativités étaient essentielles pour la suite."*

Jean-Pierre Serre : *(s'exclamant)* Mais oui, c'était... Alors, évidemment, vu les résultats auxquels elle est appliquée, le signe, y avait pas de problème parce que... ils auraient trouvé des nombres négatifs pour les nombres de points, ben tu vois, alors évidemment !

(Eclats de rire)

Alain Connes : Fallait forcément que...

Jean-Pierre Serre : Non mais alors c'est précieux d'avoir des trucs comme ça, c'est précieux.

Alain Connes : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur.

Jean-Pierre Serre : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur, mais ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Alain Connes : Non, ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Jean-Pierre Serre : Non, Illusie avait écrit carrément dans le texte : "le rédacteur s'excuse de n'avoir pas été capable de vérifier la commutativité du diagramme".

Alain Connes : Alors mais alors là, ce que tu dis et qui est vraiment, vraiment très très intéressant, tu dis quelque chose, je pense que je devrais lire la suite parce que c'est, je vais m'arrêter au milieu, tu dis : *"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde...*

Jean-Pierre Serre : Oui.

Alain Connes : *"...que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout*

dans une marée montante de théorie générale. Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement pour les EVT[4] *et la géométrie algébrique."* Et après tu dis, et je vais te laisser parler : *"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres".*

Jean-Pierre Serre : Oui, je pensais à par exemple, je ne sais pas si j'y pensais à ce moment-là, mais justement à la théorie de Langlands, à ce genre de choses.

Alain Connes : Tu pensais aux formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Aux formes modulaires, il n'y avait rien compris aux formes modulaires. Et il avait... Il était extraordinaire d'incompréhension quelquefois, parce que quand ça ne rentrait pas dans son cadre...

Alain Connes : D'accord, je comprends.

Jean-Pierre Serre : Je lui racontais des formes modulaires, et il disait : "Mais tes formes modulaires, ça n'a aucun sens !", parce que tu vois la variété des modules, elle est affine et donc, à l'infini, tu mets des conditions artificielles, alors...

Alain Connes : Alors que c'est une variété algébrique, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que moi, j'avais 100 ans ou 150 ans de formes modulaires derrière moi, où je savais que c'était bon, cette théorie, quand on la voit, on résiste pas quoi. Eh bien lui, si, alors là ! "Aucun sens... Des formules !..." Il pouvait pas supporter les formules.

Alain Connes : Donc ce que tu dis là, en fait, tu dis plus loin qu'en fait en théorie des nombres justement, toutes les mathématiques peuvent rentrer et...

Jean-Pierre Serre : Et qu'on ne sait pas... Et qu'on ne sait pas comment ça marche.

Alain Connes : On ne sait pas comment ça va marcher, on ne sait pas du

4. Espaces vectoriels topologiques

tout où...

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est passionnant en théorie des nombres.

Alain Connes : Exactement, exactement. Mais alors maintenant, ce que je voulais avoir, c'était... Donc là, on voit ta réaction, j'ai lu la...

Jean-Pierre Serre : En tout cas, tu peux constater que je suis d'accord avec tout ce que tu cites. Autrement dit, je n'ai pas changé d'avis depuis.

Alain Connes : Non, non, tu n'as pas changé d'avis, tu n'as pas changé d'avis. C'est important. Il y a la réponse de Grothendieck, elle est dans la correspondance, je ne vais pas la lire.

Jean-Pierre Serre : Non il y a peut-être des choses où j'ai dit peut-être des bêtises dans la correspondance, c'est possible mais...

Alain Connes : Non.

Jean-Pierre Serre : Mais probablement je les ai corrigées dans les notes, parce qu'il y a des notes. Donc si j'ai dit quelque chose que je trouvais idiot, je...

Alain Connes : Non, non, je ne pense pas. Je pense si tu veux, je pense que, moi, ce que j'ai essayé de faire, c'est de me glisser dans la peau de Grothendieck pour comprendre, essayer de comprendre comment il avait pu, comment dire, euh, *(soupir)*, si tu veux... Je ne dis pas qu'il est devenu paranoïaque, parce que je n'aime pas le mot du tout, je pense qu'il y a un mot pour ça, c'est un mot à la mode, c'est obsidional mais si tu veux...

Jean-Pierre Serre : Pour te donner ma comparaison à moi...

Alain Connes : Oui, vas-y.

Jean-Pierre Serre : Grothendieck me faisait penser à une centrale nucléaire. *(Rire d'Alain Connes)*. Et les centrales nucléaires, il faut les refroidir, il faut les protéger, etc. Et tant qu'il a été dans le monde mathématique normal, nous lui servions au fond de protection. Dès qu'il a été seul, la centrale

a explosé. Bon c'est... C'est pas très gentil comme comparaison mais...

Alain Connes : Peu importe, peu importe. Ce qu'il y a, c'est, le texte qu'il a écrit.

Jean-Pierre Serre : *Les* textes, il a écrit des milliers de textes, des dizaines de milliers de pages.

Alain Connes : Il a écrit des dizaines de milliers de pages. Si tu veux en fait...

Jean-Pierre Serre : Tu parles de quel texte, alors ?

Alain Connes : Je parle de plusieurs textes, en fait, j'ai compris en... J'avais dû faire un exposé au Collège de France sur... on m'avait demandé de faire un exposé sur les réfugiés, bon. Il y avait un colloque sur les réfugiés, un colloque de rentrée.

Jean-Pierre Serre : *(étonné)* : Sur les réfugiés ?

Alain Connes : Sur les réfugiés. Attends, c'était un truc général, donc, évidemment, bon, j'avais dit d'accord, et puis tu sais comment c'est quand c'est un mois avant, tu commences à te dire "sur quoi je vais parler..."

Jean-Pierre Serre : T'as quelque chose à dire sur les réfugiés, toi ?

Alain Connes : Et puis, bon, j'étais dans des circonstances très spéciales, parce que je m'occupais de ma mère qui était très malade, et la nuit, je lisais, et je lisais la Clef des songes, qui est un des textes de Grothendieck.

Jean-Pierre Serre : Ah celui-là, je ne connais pas la Clef des songes.

Alain Connes : Tu ne connais pas la Clef des songes. Et je suis tombé...

Jean-Pierre Serre : Ah si, j'ai dû regarder quand-même, si.

Alain Connes : Tu as peut-être regardé quoi...

Jean-Pierre Serre : Parce que j'étais impressionné par certains rêves de Grothendieck qui sont d'un détail de description, je me rappelle, il y a eu une princesse, quelque chose comme ça, avec des décorations...

Alain Connes : Des détails absolument incroyables.

Jean-Pierre Serre : Je sais que je n'ai jamais de rêve avec des précisions, mon crâne ne fabrique pas, c'est une question de puissance du crâne, tu vois...

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : De fabriquer mentalement avec tes petits neurones, que tu fabriques des décorations d'une dame. Et la puissance de son crâne se voyait même dans ses rêves.

Alain Connes : Absolument. Et alors je suis tombé par hasard en lisant ce texte sur un passage qui est absolument magnifique et qui est le passage sur son père, ce qui est arrivé à son père, donc, qui était un anarchiste, quand il était en prison, parce qu'il est resté, je crois, plus de 10 ans en prison en Russie et ce qui lui est arrivé à un moment donné, et qui a été transmis à Grothendieck par sa mère. Et Grothendieck le décrit d'une manière incroyablement précise comme tu dis.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était dans un rêve alors...

Alain Connes : Non ! Non, non, c'était dans la réalité. Ca, c'est dans la réalité. Il décrit ce qui est arrivé à son père, qui était : on avait promis à son père qu'il serait libéré, je crois, au bout de 10 ans, bon, il comptait les jours, en fait, etc. Et au moment où la date est arrivée, il n'a pas été libéré. Il a commencé une grève de la faim. Et au bout de je sais pas, peut-être 3 semaines ou un mois de grève de la faim, là, il a eu une illumination... mystique.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est pas surprenant, ça.

Alain Connes : C'est pas très surprenant, mais, si tu veux, la manière dont... et dans cette illumination, il pardonnait à ses geôliers enfin, etc. Et la manière dont c'est écrit, donc, si tu veux que ça a fait que, la première fois que je l'ai lu à ma femme, avant d'en parler au Collège, j'ai été obligé

de m'arrêter dans la lecture tellement c'était émouvant. Donc en fait, bon, je l'ai lu au Collège, mais c'est à cette occasion-là si tu veux que je me suis aperçu du fait qu'au milieu de 36 choses différentes, il y avait dans ses textes, de temps en temps, des choses extraordinaires.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, je pense qu'effectivement, c'est vrai qu'il y a, je suis un peu... je ne trouve pas d'adjectif, j'ai commencé par penser méprisant mais c'est pas tout à fait le cas, sceptique en tout cas, sur les choses de Grothendieck des 30 dernières années, mais quand-même, c'est clair qu'il y a des choses dedans.

Alain Connes : Il y a des choses.

Jean-Pierre Serre : *(soupirant)* Son crâne n'a jamais dégénéré. Non, c'est pas comparable à ceux de nos amis dont...

Alain Connes : ...dont nous ne parlerons pas.

Jean-Pierre Serre : ...dont nous ne parlerons pas, et qui n'ayant même pas 90 ans...

Alain Connes : Non, on n'en parle pas.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : N'en parlons pas, son crâne n'a jamais dégénéré, non, il a plutôt explosé qu'autre chose.

Alain Connes : Tout à fait, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et toujours intelligemment.

Alain Connes : Toujours intelligemment et, si tu veux, ce que ce texte m'a appris, ce texte que j'avais découvert, ce qu'il m'a appris, c'est qu'en fait, son père n'avait jamais réussi à faire ce qu'il voulait faire. Son père voulait être écrivain.

Jean-Pierre Serre : Ah bon.

Alain Connes : Son père voulait écrire, et il n'avait jamais réussi à le faire, parce qu'il était tout le temps par monts et par vaux, quoi, etc.

Jean-Pierre Serre : Faut pas être anarchiste et écrire à la fois, c'est un peu...

Alain Connes : C'est vrai. Mais donc en fait, Grothendieck apparemment, au bout d'un moment, a décidé d'écrire.

Jean-Pierre Serre : Ah ça, pour écrire, il a écrit.

Alain Connes : Pour écrire, il a écrit, et ce que personne ne sait, qu'on a trouvé dans sa demeure quand il est mort, on a trouvé un nombre incroyable de pages, qui sont pour le moment inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Enfin, non, elles ne sont pas inaccessibles.

Alain Connes : Si, si, elles sont gardées par un avocat parce que les enfants ne sont pas d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, mais ça sera accessible, un jour, ça sera accessible. Ils ne les ont pas perdues quoi, elles ne sont pas perdues.

Alain Connes : Exactement mais apparemment, et alors ça, je trouve ça tout à fait incroyable, apparemment, le sujet principal, tu sais que bon, Grothendieck a quand-même une évolution mystique, hein, je veux dire, hein, c'est clair.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est un peu bizarre, oui.

Alain Connes : Un peu bizarre, mystique, mais apparemment, le sujet principal de ces milliers de pages, c'est, euh, en fait, c'est le problème du Mal. C'est à dire que, en fait, il s'est aperçu en étant mystique, en étant religieux d'une certaine manière, hein bon, qu'en fait, il y avait un problème fondamental, et il s'est attaqué à ce problème-là. On ne sait pas ce qu'il y a dedans.

Jean-Pierre Serre : J'appelle pas ça des problèmes, ces choses-là. Les littéraires ont tendance à appeler ça Le problème, avec l'idée que surtout, on n'essaye pas de les résoudre, mais on en parle...

(Rires)

Alain Connes : Oui, mais lui, alors lui, il a essayé justement. Donc moi je suis vraiment quand-même très curieux de... alors, je ne sais pas si ce sera possible de, bien sûr, apparemment, c'est au moins 30000 pages...

Jean-Pierre Serre : 30000 ?

Alain Connes : 30000 pages. Si ce n'est plus.

Jean-Pierre Serre : 30000, oh c'est possible avec Grothendieck...

Alain Connes : Bien classées.

Jean-Pierre Serre : ...parce qu'il écrivait à une allure, vraiment incroyable. Et... elles sont tapées à la machine ou elles sont écrites, tu ne sais pas ?

Alain Connes : Ca, je ne sais pas, mais maintenant avec l'intelligence artificielle, on pourra.

Jean-Pierre Serre : En même temps, il tapait très très vite.

Alain Connes : Oui, on pourra maintenant, non, je crois que c'est manuscrit.

Jean-Pierre Serre : Parce que son écriture n'était pas terrible, hein ?

Alain Connes : Mais on mettra au point un petit logiciel qui transformera ça en Latex, donc ça c'est pas un problème. Ca, c'est pas un problème, non, c'est pas un problème.

Jean-Pierre Serre : On va pas s'occuper de ça.

Alain Connes : Non, on va pas s'occuper de ça mais alors maintenant, je voulais te signaler un autre fait, dont je ne sais pas si tu le connais. Bien sûr, tu as connu sûrement Paulo Ribenboim.

Jean-Pierre Serre : Ribenboim. Ah oui, oui, charmant, charmant !

Alain Connes : Tu vois qui c'est ?! Charmant, charmante personne.

Jean-Pierre Serre : Attends, il est d'Afrique du Sud ou il est...

Alain Connes : Non, il est du Brésil.

Jean-Pierre Serre : Ah du Brésil.

Alain Connes : Du Brésil, et puis il alterne entre Kingston, le Brésil, et puis Paris aussi.

Jean-Pierre Serre : Il fait de la théorie des nombres.

Alain Connes : Oui, et il fait de la théorie des nombres. Alors, je l'ai vu récemment, je l'ai vu récemment, et il m'a appris quelque chose.

Jean-Pierre Serre : Il est presque aveugle, je crois ?...

Alain Connes : Oui, malheureusement, il est presque aveugle, mais si tu veux, il utilise les moyens informatiques pour y voir, c'est-à-dire que bien qu'étant presque aveugle, il a une machine qui amplifie considérablement les caractères,

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : Et donc en fait il est encore capable de...

Jean-Pierre Serre : De taper à la machine ?

Alain Connes : Non, pas de voir, mais de lire ce qu'on lui envoie, etc. Et alors, j'ai discuté avec lui, et il m'a appris quelque chose de très intéressant. Il m'a appris qu'en fait, Grothendieck était venu dans les années 2000 secrètement à Paris, tu n'étais pas au courant ?

Jean-Pierre Serre : Ah bon ?

Alain Connes : Tu ne le savais pas, ça ?

Jean-Pierre Serre : Mais, euh, faire quoi ?

(Rires)

Alain Connes : Et alors, il était venu parce qu'il voulait absolument encore faire une tentative pour faire publier *Récoltes et Semailles*. Donc apparemment, il est venu, il est resté dans l'appartement de Paulo Ribenboim, qui a un appartement à Paris.

Jean-Pierre Serre : Ah.

Alain Connes : Et il a voulu...

Jean-Pierre Serre : Avec Odile Jacob, peut-être ?

Alain Connes : Non, je ne pense pas. Non, elle me l'aurait dit.

Jean-Pierre Serre : Parce que initialement, il avait été question d'Odile Jacob.

Alain Connes : Bien sûr, mais Odile m'a raconté ce qui s'était passé, si tu veux.

Jean-Pierre Serre : J'avais été, on m'avait contacté, mais il y a longtemps de ça, bien avant 2000, sur la publication de ça, et finalement, j'avais hésité, puis j'avais donné un avis défavorable parce que, il dit vraiment des choses méchantes sur Deligne, Illusie, et vraiment, pour ces gens-là, qui sont des gens bien, de voir ça écrit, publié, et auquel ils ne peuvent pas répondre, tu vois, c'est, c'était vraiment désagréable.

Alain Connes : De ce point de vue-là, c'est très désagréable.

Jean-Pierre Serre : Pour Deligne, en particulier.

Alain Connes : C'est sûr. Non, non, ça, c'est évident que...

Jean-Pierre Serre : Je crois que c'est peut-être bien la SMF aussi qui voulait...

Alain Connes : Ah bon ? !

Jean-Pierre Serre : ...qui s'était posé la question. Peut-être que c'était la SMF qui m'avait contacté.

Alain Connes : D'accord, d'accord, oui.

Jean-Pierre Serre : Il avait dû... Mais j'avais hésité parce que c'est intéressant, il n'y a pas de doute.

Alain Connes : Il y a quand-même beaucoup de choses intéressantes. C'est-à-dire tout le côté polémique, bon, ben, si on pouvait le laisser de côté, le reste est intéressant...

Jean-Pierre Serre : Quelle longueur ça a, je ne me souviens plus...

Alain Connes : C'est pas si long que ça, une fois que c'est tapé, une fois que c'est tapé, ça fait à peu près...

Jean-Pierre Serre : 600 pages ?

Alain Connes : Oui, c'est ça, ça fait à peu près entre 500 et 600 pages. Donc, c'est pas...

Jean-Pierre Serre : Oui, ça fait un livre.

Alain Connes : Oui, c'est publiable. La question, et ça, il le dit très bien au début, c'est qu'il a essayé d'écrire quelque-chose qui appâte le lecteur, etc,

ça, il n'a pas réussi, je veux dire le lecteur non mathématicien.

Jean-Pierre Serre : Non, en tout cas, un jour, ce sera publié.

Alain Connes : Oui, je crois que ça va même être publié, il me semble que... Je sais pas si c'est pas Hermann qui va... En tout cas, j'ai entendu ça.

Jean-Pierre Serre : Bon.

Alain Connes : J'ai entendu ça, j'ai entendu ça récemment.

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, on ne m'a pas demandé.

Alain Connes : Non, non, bon, mais enfin, bon, je veux dire, il vaut mieux se tenir à l'écart de ça. Mais si tu veux, c'est vrai que moi, j'ai quand-même, j'ai quand-même regretté que les passages vraiment intéressants, parce qu'il y a des passages intéressants, soient inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Alors, c'est quand-même difficile d'extraire, alors, ça m'est arrivé, j'ai extrait 3 pages, sur les motifs, tu sais, j'ai écrit quelque chose sur les motifs, et j'ai recopié les 3 à 4 pages de lui, splendides !

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Splendides, et où il n'engueule personne, il ne dit pas de mal de quelqu'un, et j'ai eu son autorisation.

Alain Connes : Tu as eu son autorisation ?

Jean-Pierre Serre : A l'époque.

Alain Connes : C'était pas trivial d'avoir son autorisation. Et tu sais ce qui s'est produit, personne ne le sait ça, je ne sais pas si je devrais en parler mais bon.

Jean-Pierre Serre : Si, tu peux en parler.

Alain Connes : Ce qui s'est produit, au 50ème anniversaire de l'IHES, c'était un peu avant, c'était au mois de septembre.

Jean-Pierre Serre : C'était quand, ça, le cinquantième anniversaire de l'IHES ?

Alain Connes : ben, c'était il y a 10 ans, donc, c'était en 2008, l'année de la mort de Cartan, il y a 10 ans. Et au mois de septembre, Grothendieck a écrit à la bibliothécaire de l'IHES pour lui demander des livres.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, j'avais entendu parler de ça.

Alain Connes : Tu es au courant de ça ?

Jean-Pierre Serre : Non, je ne suis pas au courant, mais j'avais entendu parler de quelque chose comme ça. Et alors, on lui a envoyé ces livres, ou pas ?

Alain Connes : Non non, il s'est fait, malheureusement, ça a été malencontreux, que la bibliothécaire était en vacances à ce moment-là. Donc, la lettre de Grothendieck n'a pas eu de réponse, bon, n'a pas eu de réponse immédiate.

Jean-Pierre Serre : Mais enfin, elle va rentrer de vacances au bout d'un certain temps quand-même.

Alain Connes : Oui, bon, mais il s'est un peu impatienté et donc il a écrit au directeur.

Jean-Pierre Serre : Oui, d'accord, en effet, pourquoi pas ?

Alain Connes : Pourquoi pas ? Il se fait que le directeur était absent à ce moment-là...

Jean-Pierre Serre : Aïe !

Alain Connes : Et qu'à ce moment-là, la personne qui a répondu à Grothendieck n'était pas le directeur, enfin, si tu veux, c'était... Alors là, il a commencé à y avoir un embrouillaminis parce que finalement la réponse était un peu une réponse un peu générique, si tu veux, en disant que bon, etc. Et

là, le ton est monté.

Jean-Pierre Serre : En disant que c'était pas possible, quoi.

Alain Connes : Pas en disant que c'était pas possible, mais en disant que, pfff, peut-être y aurait des délais, enfin, etc. Enfin...

Jean-Pierre Serre : Bon, enfin, c'était pas ce qu'il voulait, quoi.

Alain Connes : Enfin, c'était pas ce qu'il voulait, donc le ton est monté. Et Grothendieck a écrit une lettre beaucoup plus virulente comme il était capable de le faire...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, plus énergique, oui, déjà qu'il est énergique par nature.

Alain Connes : Après, bon, le directeur était rentré et le directeur a essayé de répondre.

Jean-Pierre Serre : Qui c'était le directeur à l'époque ?

Alain Connes : C'était Jean-Pierre Bourguignon, qui était un excellent directeur.

Jean-Pierre Serre : Bourguignon, qui sait arranger les choses.

Alain Connes : Oui, oui, bien sûr, alors il a essayé d'arranger les choses, en expliquant que bon, il était absent, etc. Mais le ton est monté. Et Grothendieck a en fait téléphoné à Lafforgue, à Laurent Lafforgue, chez lui. Alors Lafforgue est un admirateur de Grothendieck absolument inconditionnel comme tu sais, il a sa photo sur son bureau, etc. Et un jour, Laurent Lafforgue était rentré chez lui, le téléphone sonne et il entend une voix !

Jean-Pierre Serre : Mais, qu'il ne connaissait pas... !

Alain Connes : Mais bien sûr que non ! Et alors là...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Ah, il a cru que c'était un canular ?

Alain Connes : Non, non, non, non, non, il était absolument abasourdi parce qu'il entend, au téléphone : "C'est Alexandre Grothendieck." Donc évidemment, et alors là...

(Rires)

Alain Connes : ... ce que Grothendieck lui a demandé, il lui a demandé de transmettre à tous les membres du Conseil Scientifique, à l'époque, je faisais partie du Conseil Scientifique, une copie de ses lettres, et de l'échange qui avait eu lieu. Et c'est là que j'ai appris que Grothendieck était réfugié, je savais pas où il était, je n'avais aucune idée d'où il était...

Jean-Pierre Serre : Il était déjà dans les Pyrénées, à ce moment-là, oui ?

Alain Connes : Bien sûr, il était dans les Pyrénées depuis 90, donc là, on était en 2008, hein, on était en 2008 déjà. Depuis, je pense 91 ou 92, il était déjà dans les Pyrénées.

Jean-Pierre Serre : Il était déjà à Lasserre, ou un endroit comme ça ?

Alain Connes : Peut-être, écoute, tu vas rigoler : moi, j'ai pensé que c'était pas un hasard...

(Rires)

Alain Connes : Si l'endroit où Grothendieck s'était réfugié...

Jean-Pierre Serre : Peut-être, en tout cas, c'est joli...

Alain Connes : L'endroit s'appelait Lasserre. Parce que, je veux dire dans *Récoltes et Semailles*, il y a tout un développement, sur le yin et le yang, etc., et sur l'idée que Grothendieck, justement, a un côté féminin dans son

approche des mathématiques, qui est pas complètement dénuée de sens, hein, je veux dire, et alors, le fait qu'il soit réfugié...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça qui est curieux, effectivement, ça peut intéresser qu'il considérait qu'il avait un esprit féminin en maths, et que moi, j'avais un esprit masculin. Alors que moi, j'ai jamais connu quelqu'un d'aussi masculin que lui, quoi, c'était...

Alain Connes : D'aussi, tu veux dire...

Jean-Pierre Serre : D'aussi, ah, c'était incroyable !

Alain Connes : Ah ! Et dans la correspondance, c'est clair, aussi, quand-même, germanique !

Jean-Pierre Serre : Il se considérait lui comme à caractère féminin, et moi comme au contraire, à caractère masculin.

Alain Connes : Tout à fait. Pour lui, toi, tu étais le prototype du caractère masculin.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui.

Alain Connes : Bon mais tout ça, c'est expliqué en grand détail dans *Récoltes et Semailles*, moi, ça m'a beaucoup amusé.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est rigolo quand même, mais non, mais ça, il le prenait au sérieux, ça.

Alain Connes : Ah, il le prenait au sérieux.

Jean-Pierre Serre : Au contraire, il le prenait au sérieux. D'ailleurs, c'est une caractéristique de Grothendieck, il prenait *tout* au sérieux.

Alain Connes : Et d'ailleurs, c'est une question que je voulais te poser : que finalement, ce qui ressort beaucoup de ses écrits, c'est qu'on n'a pas l'impression qu'il a un sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Non ! Non, non, non, il a un sens de... un espèce de devoir intellectuel, de pousser les idées jusqu'au maximum, de les approfondir, c'était une grande honnêteté intellectuelle de Grothendieck.

Alain Connes : Oui, mais pas de sens de l'humour, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Ah non, c'est pas compatible.

Alain Connes : C'est pas compatible, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : J'imagine pas, je ne me souviens pas de l'avoir entendu rigoler, ou peut-être pour d'autres choses, mais...

Alain Connes : Tu dis c'est pas compatible mais, en voyant l'interview de Cartan, on ne peut pas ne pas être frappé par le fait que Cartan avait un sens de l'humour incroyable, tout en étant très sérieux.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais Cartan n'aurait pas pu faire l'œuvre de Grothendieck, c'est évident, avec un caractère comme ça, moi non plus d'ailleurs.

Alain Connes : Oui, oui, je comprends ce que tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Il y a une certaine, je ne sais pas comment dire, il y a une force, ça demande une force énorme. Et ça n'est pas compatible avec rigoler.

(Rires d'Alain Connes)

Entre deux, temps et vérité
Alain Connes et Daniel Sibony
Un dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
2019

Alain Connes : Bonjour, Daniel Sibony.

Daniel Sibony : Bonjour.

Alain Connes : Donc, ça me fait vraiment très très plaisir de pouvoir discuter avec toi. Alors je vais commencer par te présenter parce que tu as une carrière assez atypique vraiment, c'est-à-dire que tu es mathématicien, tu as une thèse de mathématiques.

Daniel Sibony : Au départ.

Alain Connes : Au départ, avec Gustave Choquet. Tu es philosophe, tu as une thèse de philosophie, je disais avec Desanti, mais bon, plus précisément. Et puis, tu as une pratique de psychanalyste. Alors la manière que j'ai choisie pour pouvoir te présenter, c'est en fait de lire une page d'un de tes ouvrages, que j'ai trouvée très touchante, parce que finalement, ça en dit plus sur toi que beaucoup de titres ronflants, etc.

Daniel Sibony : Je suis curieux.

Alain Connes : Donc tu me permets de la lire, voilà. C'est un livre qui s'appelle "Entre deux, et l'origine en partage". Là, ça va être vraiment l'origine en partage, et après, ça va être entre deux, c'est-à-dire que tous les deux, on va discuter entre 2 extrêmes. Tu dis : "J'en ai connu l'impasse autrefois, étant élève à Marakkech dans une école juive qui avait pour mission d'occidentaliser les petits marocains que nous fûmes. Ma connaissance de l'arabe, ma langue maternelle, m'y joua de mauvais tours, en m'apprenant beaucoup sur cette peur que l'autre peut avoir de lui-même, de son origine réveillée. J'avais les pires notes en français, souvent des 0, alors que j'aimais écrire, et que mes textes étaient assez pittoresques. Mais c'est que le professeur était révulsé d'y trouver de fortes traces de ma culture indigène, culture et langue dont il

était averti mais qu'il semblait gêné de connaître et dont il supportait mal les mélanges avec l'écriture française qu'il nous donnait pour idéal, idéalement plate. Mes rédactions étaient souvent lues, à la remise des copies, et toute la classe se tordait de rire, y compris moi. L'expression correcte cachait mal et même montrait complaisamment les gestes grotesques de nos modes d'être qui semblaient un peu honteux, au regard des petits Classiques Larousse qui indiquaient la vraie culture. Une fois lues, mes copies recevaient leur juste sanction : 0. Après quoi était lue la copie modèle où tout le monde, mine allongée, s'ennuyait ferme. Phrases convenues, tournures sans vie. Voilà qui s'appelle "Bien écrit" martelait le professeur : "ce n'est pas farcesque, c'est élégant.". J'en ai gardé un fort dégoût pour les textes bien écrits et creux. Je n'avais pas alors, à 12-13 ans, les moyens de comprendre que je froissais dans ses troubles démêlées avec l'origine, avec ce qu'il en refoulait. Je croyais naïvement qu'écrire, c'était articuler des blocs de sens et de mémoire, de sensations et de rappels, avec les mots qui s'offrent, d'où qu'ils viennent pourvu que ce soit juste, c'est-à-dire authentifié par la vie d'au moins un être, qui en l'occurrence était moi. J'acceptais donc, sans trop y croire, mon étiquette : nul en français. Et je tremblais lorsqu'arrivant en France, à 14 ans, je fus placé dans un internat où tous parlaient français naturellement. Pourtant, le jour où le professeur remit la première copie, il déclara, péremptoire : "Ici, il y en a un qui sait écrire.". Et il avait pointé du doigt dans ma direction. Je me retournais pour voir ce type à qui l'écriture souriait. Derrière, il n'y avait personne. J'appris vite, après, que ce professeur aimait par-dessus tout les textes originaux. C'était sa façon heureuse de transmuer les rapports avec l'origine.". Je veux dire, quand j'ai lu ça, j'ai dit : "C'est vraiment Daniel". Et c'est vrai que...

Daniel Sibony : Je suis très touché que tu sois tombé sur ce texte, comme ça.

Alain Connes : Absolument. Parce que, qu'est-ce que tu veux, ça veut dire qu'en fait, dans un individu, ce qui m'intéresse, justement, c'est ce qui sort de l'ordinaire, ce qui est original, ce qui n'est pas du tout typique, etc., qui n'est pas du tout comme l'écriture telle qu'on la veut, etc. Et c'est comme ça que je te perçois. Et si tu veux donc en fait dans ton parcours, il y a quelque chose qui est très marquant, c'est que donc, tu étais mathématicien avec Gustave Choquet, et un jour, tu as décidé que... Je sais pas, tu as décidé de changer un peu de trajectoire. Comment est-ce que ça t'est venu ?...

Daniel Sibony : Il y a beaucoup de raisons, c'est ce qu'on appelle un acte surdéterminé, ça veut dire beaucoup de vecteurs convergent là, mais c'est vrai que, je me rendais compte que j'étais travaillé par toutes sortes de pensées, qui *devaient* s'exprimer, et qui ne trouvaient pas une expression mathématique.

Alain Connes : Bien sûr.

Daniel Sibony : Et que le travail mathématique, ne suffisait pas, chez moi, à combler ce désir. Et donc, j'ai fait de la philosophie, et puis j'ai fait de la psychanalyse.

Alain Connes : Tu as fait une psychanalyse avant de devenir psychanalyste.

Daniel Sibony : Ah oui, j'ai fait un long contrôle, à l'époque, c'était avec Lacan. Et comme je le fréquentais aussi de près parce qu'il aimait les maths et qu'il voulait que je lui explique des choses alors ça m'a évité d'être Lacanien, et même d'entre anti-Lacanien. Donc je suis très libre, par rapport à cette pensée. Et donc, c'est comme ça que, petit à petit... Mais par rapport à ce dont on va sûrement discuter, c'est-à-dire le temps, la physique, les maths,...

Alain Connes : Oui, c'est comme ça que tu m'avais contacté, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : Je me suis rendu compte que bizarrement, mon travail en maths avait porté, on y reviendra tout à l'heure, avait porté sur une idée qui toi t'est familière, et que tu as génialement appliquée dans d'autres domaines, partait de l'idée d'un paquet de fonctions qui devraient avoir certaines propriétés intrinsèques pour qu'il en sorte du temps. Et ça, c'était l'idée sur le temps, le souci du temps a même marqué mon travail mathématique et quelques années plus tard, quand j'ai écrit un de mes livres comme ça, qui s'appelle "Psychanalyse et écriture", le titre est plus bizarre, c'est "L'autre incastrable", j'avais écrit un gros texte sur le temps, où j'ai mis vraiment toutes mes questions et tout ce que je ressentais, et donc j'ai été travaillé par le temps, tout le temps.

Alain Connes : D'accord, alors en fait, si tu veux, ce que je pense, c'est que justement, nous allons avoir un dialogue et qu'en fait, ce dialogue, ça va être un entre-deux, mais pas entre nous deux, ça va être entre deux extrêmes. Et ces deux extrêmes, si tu veux, justement, tu as parlé de Lacan, il y a eu une période où on pourrait dire qu'il y avait un grand danger dans le post-modernisme, qui était d'utiliser des concepts scientifiques qui n'étaient pas vraiment digérés, pour finalement essayer d'avoir un ascendant psychologique, essayer d'acquérir un ascendant psychologique, sur des gens qui, eux, n'étaient pas capables de comprendre ce langage. Donc ça, c'est un extrême, c'est un extrême qui a été mis en évidence dans le livre de Sokal, sur Impostures intellectuelles.

Daniel Sibony : J'ai dénoncé cet aspect-là, tout au long...

Alain Connes : Tu l'as dénoncé, bien sûr, je te fais entièrement confiance. Et il y a un autre extrême, sur lequel il faut que nous soyons très vigilants, c'est l'extrême consistant à parler de notions techniques, qui pour être correctes, mathématiquement ou physiquement, vont quand-même être difficile à comprendre par notre auditoire. Donc il faut qu'on arrive à naviguer entre ces 2 extrêmes et il faut qu'on arrive à rester compréhensible.

Daniel Sibony : J'ai confiance.

Alain Connes : Si tu veux, je pense qu'on pourrait commencer, j'avais comme idée qu'on pourrait commencer par aborder le temps, comme tu l'as proposé, et ensuite, d'aller sur un autre sujet, qui est très relié, d'une certaine manière, et qui est la notion de vérité. Donc, c'est vraiment deux sujets fondamentaux, deux sujets fondamentaux sur lesquels je pense que nous avons tous les deux des choses à dire et en fait, moi je m'en tiendrai aux seules choses que j'ai à dire dont je suis certain mais dont je ne conçois pas du tout la portée philosophique ou autre, parce que je ne suis pas philosophe, parce que je suis simplement scientifique, si tu veux, mais ça sera pareil sur la notion de vérité puisque là, vraiment, il y a beaucoup de choses à dire. Donc sur le temps, en fait, j'ai eu une trajectoire mathématique sur laquelle ça a joué un rôle absolument essentiel, mais, en fait, la principale observation, la chose essentielle à laquelle je suis arrivé, c'est qu'en fait, il y a quelque-chose qui est beaucoup plus fondamental que cette ligne du temps à un paramètre...

Daniel Sibony : que la variation du temps.

Alain Connes : ... que la variation du temps, voilà, exactement. Je me souviens, j'avais un professeur de maths spé, qui m'avait interrogé, et qui avait fait ça *(geste d'un index suivant une courbe dessinée sur un tableau imaginaire)* et il avait dit "M. Connes, quelle est la variable ?". Alors on faisait de la cinématique, etc., j'avais pas mal réfléchi, j'avais pensé "c'est x ou y ?", et puis j'avais fini par lui dire "c'est le temps". Effectivement, ce dont on s'aperçoit mais là, ça demanderait des explications techniques, et je m'abstiendrai de les donner, c'est que la vraie notion, c'est moins le passage du temps, que ce que j'appellerai la variabilité. Et là, on s'aperçoit d'un phénomène qui est absolument fondamental, qui est absolument crucial, qui est l'une des plus grandes découvertes du XX$^{\text{ième}}$ siècle donc ça n'existait pas avant, c'est que quand on fait des expériences, dans le domaine microscopique, c'est-à-dire dans ce qu'on appelle le quantique, c'est simplement au niveau expérimental, il n'y a pas besoin d'avoir une théorie pour ça, donc il se fait qu'il y a certaines expériences, par exemple, le fait de faire passer un photon à travers une toute petite ouverture, et puis de le faire atterrir sur une cible à l'arrivée, alors ça, ça peut se faire dans un iphone, eh bien, l'expérience qui consiste à dire que le photon va arriver à tel endroit n'est pas reproductible. Et c'est à cause de ce phénomène que des ingénieurs suisses ont fabriqué un appareil, qu'on peut mettre dans un iphone, qui fabrique des nombres aléatoires, mais contrairement aux ordinateurs qui peuvent fabriquer des nombres aléatoires, même si l'on connaissait tous les tenants et les aboutissants du système, on serait incapable de reproduire les nombres aléatoires en question.

Daniel Sibony : Alors, si tu permets, c'est bien parce qu'il y a des phénomènes comme ça, et qui m'ont touché, que j'étais content à l'idée qu'on se rencontre, et qu'on discute, mais vraiment librement, et à fond. Je reprends l'exemple de ton prof, qui m'a touché, j'y ai réfléchi, et figure-toi, bien sûr, tu as répondu "la variable, c'est le temps, parce que voilà..."

Alain Connes : C'est ce qu'il attendait.

Daniel Sibony : Et puis, ça va de soi, ça *semble* aller de soi. En réalité, tu n'avais pas le point de vue quantique, et spectral, que tu as eu plus tard, mais tu aurais pu lui dire que la variable, c'est les mouvements de son doigt, et ça, c'est , non seulement c'est logique, mais c'est non-commutatif, c'est-à-dire

que s'il fait ça *(esquissant la fin du mouvement)*, il ne peut pas le faire s'il n'a pas fait ça avant *(esquissant le début du mouvement)*. C'était la danse de son corps si tu veux.

Alain Connes : Je comprends ce que tu dis.

Daniel Sibony : Et ça, ça rejoindrait, je ne sais pas, je pense à une phrase d'Héraclite et qui est "le temps est un enfant qui joue.". C'est-à-dire un enfant qui permute des gestes, des mouvements, et c'est pas eux qui sont le temps, le temps, c'est la possibilité de faire tout ça. Et ça, ça rejoint, de loin, la variabilité qui t'est chère.

Alain Connes : Tout à fait. Maintenant si tu veux, ce qui s'est produit au niveau mathématique, on s'aperçoit si on réfléchit vraiment mathématiquement, posément, à ce qu'est une variable réelle, alors les mathématiciens croient qu'ils savent ce qu'est une variable réelle en disant qu'ils ont un ensemble X et qu'ils ont une application qui va de l'ensemble X dans $\mathbb{R}$, dans les réels. Et en fait, on s'aperçoit assez vite, si on réfléchit, mais de manière naïve, mais c'est ce qu'il faut faire, on s'aperçoit que cette notion, aussi standard soit-elle, de variable réelle, en fait, elle ne permet pas de faire vivre en même temps, le continu et le discret. Bon, alors je ne vais pas rentrer dans les détails techniques mais alors ce qui est extraordinaire, c'est que le quantique, par définition, presque par définition, au départ, c'était l'irruption du discret dans ce qui aurait dû être le continu, c'est-à-dire ce que Planck a fait à la main : en gros, je peux raconter un peu l'histoire quand-même, c'est que Planck a trouvé, de manière presque empirique, une formule mathématique, qui décrivait très bien les hautes températures, et les basses températures, il était dans un institut où on faisait des expériences de corps noir, à basse et haute température, et il a trouvé une formule mathématique. Dans cette formule mathématique, il était obligé de prendre une fonction vraiment non triviale d'une quantité qui avait des dimensions, les dimensions d'une action. Alors c'est impossible parce qu'en physique, normalement, quand on fait des calculs, on ne peut pas rajouter une longueur et le carré d'une longueur. Donc, cette fonction, il a été obligé... et cette fonction, c'était une fonction exponentielle, il ne pouvait pas, il pouvait... Et la seule chose qu'il pouvait faire, c'était de définir une constante d'action, arbitraire, la constante de Planck, et lorsqu'il divisait la quantité qu'il devait mettre par cette constante d'action, elle devenait sans dimension, et donc on

pouvait lui appliquer n'importe quelle fonction. C'est ce qu'il a fait. Et bon, après, eh bien on a compris, lui l'a dit mais il ne comprenait pas vraiment ce qui se passait, que ça signifiait que l'énergie était discrète, c'est-à-dire que c'étaient des multiples entiers, c'est-à-dire que l'énergie d'un photon, c'est des multiples entiers de cette constante fois la fréquence. Alors donc en fait, ce qui est absolument extraordinaire, c'est que l'impossibilité mathématique de représenter ce qu'on appelle des variables, par quelque-chose de simple, comme des applications d'un ensemble dans la droite réelle, elle a été complètement résolue par la mécanique quantique, et le formalisme de la mécanique quantique, qui a été trouvé par Heisenberg et puis par Von Neumann, a permis de comprendre qu'en fait, une variable réelle, il ne fallait pas y penser comme à une fonction, mais il fallait y penser comme à un opérateur d'un espace de Hilbert, et à ce moment-là, on s'aperçoit que les variables discrètes coexistent magnifiquement avec les variables continues, sauf qu'elles ne peuvent pas commuter. C'est-à-dire qu'il est impossible, pour une variable continue, de commuter avec une variable discrète. Et c'est cela qui fait tout le début du miracle quantique. Alors dans mon cas, ce qui s'est produit, c'est que ce que j'ai compris dans ma thèse c'est que lorsqu'on regarde un système quantique, mais on ne connaît que partiellement ce système, ça veut dire qu'on s'intéresse à des sous-systèmes, le sous-système admet, son propre temps émerge. Le propre temps du sous-sytème émerge du fait qu'on ne connaît pas tout, du fait qu'on a une connaissance limitée des choses, le temps apparaît, alors, ça, j'ai trouvé ça absolument miraculeux et pendant des années et des années, c'était très intéressant mathématiquement, parce que ça donnait toute une série d'invariants que j'ai trouvés dans ma thèse sur ce qu'on appelle les facteurs, les algèbres de Von Neumann mais pendant de très nombreuses années, j'avais essayé, un peu bêtement, de réconcilier cela avec la physique et je n'y étais pas arrivé, ça me paraissait évident que ce temps qui apparaissait de manière naturelle à partir du quantique, devait être lié à la physique, jusqu'au jour où, à l'occasion d'une rencontre que j'ai racontée trop souvent déjà, celle de Carlo Rovelli, j'ai rencontré quelqu'un qui était un philosophe, un physicien mais qui en fait est plus philosophe que physicien, et qui en réfléchissant abstraitement sur la gravitation, avait trouvé que, à un état thermodynamique, donc un état d'équilibre thermodynamique, devait être associée une évolution, un temps, dans ce sens-là, et c'est exactement ce qu'on avait dans le cadre mathématique. Donc, à ce moment-là, qu'est-ce qu'on éprouve en tant que non-philosophe, mathématicien, physicien, etc., on se dit "Bon, il y a quelque-chose, là". Bon alors on

n'est pas capable de poursuivre suffisamment, mais, on ne peut s'empêcher de se questionner, on ne peut s'empêcher de se poser toutes sortes de questions, et de se questionner vraiment sur... Quelle est la question à laquelle j'ai abouti, quelle est la question fondamentale, c'est "ne comettons-nous pas une erreur fondamentale en disant que toute la physique est basée sur l'évolution dans le temps, c'est-à-dire en disant qu'en fait, les équations de la physique sont des équations de la forme $\frac{d}{dt}$ égale quelque-chose d'autre, voilà.

Daniel Sibony : Alors tu veux que je te dise mon sentiment : mon sentiment, c'est que d'abord j'adore les phénomènes quantiques justement parce qu'ils sont d'un tout autre ordre, notamment cette variabilité d'un simple électron qui traverse un trou, qui te donne quelque-chose d'absolument non répétable, et en même temps universel. J'avais autrefois construit un concept que j'appelle singulièrement universel, ça veut dire que c'est absolument singulier...

Alain Connes : Ca reste singulier, c'est ça qui est extraordinaire, ça n'est pas un nuage.

Daniel Sibony : C'est singulier et c'est universel.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : Donc, déjà, ça subvertit une opposition factice. Autre chose que j'ai beaucoup aimé, c'est que finalement, j'expliquais ça à quelqu'un qui ne connaissait rien à la physique qui me demandait "le quantique, c'est quoi ?". Je lui disais : "voilà, vous prenez ce verre, il contient un nombre incalculable de particules, des milliards de particules,

Alain Connes : Des milliards de milliards, oui.

Daniel Sibony : Des milliards de particules, et ça se passe dedans. Mais si on va dedans, on n'y comprendra rien. Pour comprendre quelque-chose, pour aborder la vérité de ce phénomène, il faut se placer dans un espace de dimension infinie, dans un espace de Hilbert, avec des observables, qui sont des opérateurs, et là, on comprend, on a une vision claire ; autrement dit, et ça c'est très beau, et c'est très beau à la fois philosophiquement et poétiquement, et je dirais même, au point de vue thérapeutique, qui est le mien,

psychanalytique, parce que souvent, on veut attaquer directement, au niveau du comportement : là, cette personne a ce comportement tordu, on va le lui réguler, on va le redresser, comme l'autre voulait redresser mon style, et on va le redresser directement. Et c'est pas vrai, il faut passer par un espace totalement abstrait, qui peut être la dimension inconsciente , ou même plus concrètement la dimension du symptôme et là, on voit les choses, et je t'en donnerai des exemples, qui permettent de débloquer ce comportement. Puisqu'on parle de temps, je pense à un exemple : une fois, il y a une personne qui est venue me voir, qui n'était même pas ma patiente, et qui m'a exposé son drame, c'est qu'elle avait tout le temps de la fièvre, mais pas n'importe quelle fièvre, elle avait toujours 38.

Alain Connes : C'est pas ordinaire oui.

Daniel Sibony : Tout le temps. J'étais un peu perplexe. Naturellement, voilà, qu'est-ce que j'ai de mieux à faire, lui faire raconter un peu son histoire, non pas que l'histoire soit totalement fiable, mais ça donne des éléments. Et elle raconte, elle raconte, et soudain, il sort de ma bouche cette question : "Mais vous n'avez quand-même pas 39 ?". Et elle me dit "Eh bien justement, en 39, ma mère a dénoncé mon père aux nazis", c'était une allemande, "et donc, je n'ai plus eu de père.". Et la disgrâce du père avait commencé en 38, parce qu'en 38, elle a commencé à le menacer. Et donc, il s'est écrasé, il se cachait, dès 38. Et là, je me suis dit, le temps, par la température, a fait un petit passage et s'est inscrit comme une espèce de pierre brûlante, dans le corps de cette femme ; évidemment, quand on a déployé ça, c'est-à-dire quand on a pris ce marquage 38 dans une histoire, dans 1938, la femme a perdu sa fièvre.
Alain Connes : *(estomaqué)* Mais attends, attends, alors là, parce qu'on a un exemple, je vais me faire l'avocat du diable, parce que je suis rationnel, mais pourquoi n'est-elle pas allé voir un docteur avant d'aller te voir ?

Daniel Sibony : Elle est allée voir des docteurs...

Alain Connes : Et ils n'ont rien fait.

Daniel Sibony : Eh bien, si. Ils la soignaient de sa fièvre et quand elle arrêtait les traitements anti-fière, elle avait toujours cette fièvre.

Alain Connes : Mais ils arrivaient à la soigner en lui donnant, je sais pas, de l'aspirine.

Daniel Sibony : Mais elle-même. Aujourd'hui, quelqu'un qui a 38, il prend 3 dolipranes, il a pas 38. Et puis un jour il arrête, et puis hop, c'était 38.

Alain Connes : Mais alors là, on touche aussi un autre point singulier, si tu veux, qui est la coïncidence numérique : c'est vrai que 38 et 39 avaient une signification pour elle, elle est quand-même jamais descendue en-dessous de 36.

Daniel Sibony : Mais si tu veux, le problème n'est pas là, ça aurait pu être un autre signe. Simplement, c'était pour te dire que quelquefois, il faut passer par des choses qui n'ont rien à voir, pour... Et à partir de là, le point qui moi m'a beaucoup intéressé, m'a passionné dans tes conférences, c'est justement que tu pars de cette donnée, de cette variabilité. Tu dis "on commet une erreur en associant cette variabilité au temps". Moi, je plaiderais pour une certaine indulgence pour le commun des mortels qui utilise la droite comme repérage du temps. Mais personne ne vit le temps comme un point qui se déplace sur la droite. Du coup, en réalité, je me suis aperçu que le temps qui est repéré comme un point de $\mathbb{R}$, c'est je dirais le minimum vital dont on a eu besoin, pour noter des choses qui concernent le temps, sachant que dans la vie, c'est tout autre chose. Regarde là, nous sommes en train de vivre un moment, ce moment est présent.

Alain Connes : Oui.

Daniel Sibony : Il implique nos présences et on n'a pas l'impression que c'est un instant t qui déjà est passé, donc il y a une certaine stabilité du présent. Et il y a aussi d'autres phénomènes, c'est-à-dire que si tu prends deux instants, tu te dis t_1 il est avant t_2, et quand on est dans t_2 c'est foutu, c'est fini, on ne parle plus de t_1 c'est terminé et les gens ont écrit des poèmes sur Nevermore, etc. Et en réalité, c'est pas ça, parce que les points t_1 et t_2, c'est comme s'ils portaient des fibres, ou des espaces fibrés, qui font qu'avec ces dimensions de plus, les fibres s'entremêlent, et l'instant ultérieur t_2 peut se retrouver avant t_1 dans... c'est pas le temps qui est inversé, c'est le rapport au temps.

Alain Connes : Je vais rebondir sur ce que tu as dit parce qu'il m'est

arrivé de faire un exposé sur un séminaire d'Antoine Compagnon, qui parlait de Proust, et à ce moment-là, effectivement, j'ai donné une image qui est très proche de celle que tu donnes et qui est en gros la suivante : nous sommes habitués effectivement à voir le temps comme cette droite rectiligne et très justement, tu dis que c'est une image qui ne correspond pas en fait vraiment à la meilleure description et je pense... la description que j'avais donnée, en gros, était la suivante : ce que je disais c'est qu'en fait, dans la vie quotidienne, dans les écrits de Proust, etc., ce qui se produit, ce n'est pas du tout une droite, comme ça, indéfinie, mais c'est une droite qui s'enroule. Elle s'enroule sur elle-même, et finalement, j'avais donné une image géométrique, j'avais donné le tore, et elle s'enroule comme un feuilletage, pas comme un fibré, c'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, c'est que dans notre expérience quotidienne, nous avons un certain nombre de périodicités, la périodicité diurne, celle de l'année, un tas d'habitudes, et ce sont ces habitudes qui donnent des repères sur ce tore et non pas sur cette droite indéfinie, et qui font qu'il y a un espèce d'éternel retour, et qui est parfaitement décrit dans Proust, en fait. J'avais repéré dans Proust un certain nombre d'énoncés, qui montraient précisément que la structure de son temps, il avait réussi à le structurer en écrivant *A la recherche du temps perdu* et qu'on arrivait à voir cet objet global sur lequel s'enroulait le temps naïf, qui est cette droite indéfinie, etc., mais qu'en fait, la vraie construction mentale à laquelle il arrivait, et à laquelle peuvent arriver des gens qui se retournent sur leur passé, c'était une structure beaucoup plus intéressante géométriquement que la droite indéfinie. Je pense que ça correspond à ce que tu disais.

Daniel Sibony : L'intéressant dans l'exemple que tu donnes pour moi, par rapport à Proust, le temps auquel arrive Proust, ce temps global...

Alain Connes : multidimensionnel, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : C'est les 3 volumes de la recherche du temps perdu.

Alain Connes : C'est son bouquin.

Daniel Sibony : C'est son bouquin et le mot feuilletage est très bienvenu...

Alain Connes : Très approprié.

Daniel Sibony : Parce que avec le feuilletage du tore que tu décris, c'est-à-dire avec une droite qui s'enroule de façon irrationnelle et qui donc va tout couvrir, les feuillets, tu peux avoir des feuillets antérieurs qui viennent se synchroniser sur des feuillets ultérieurs. C'est-à-dire qu'en fait, tu donnes, avec cet exemple d'enroulement, tu donnes comme des fibres parce que les feuilles sont comme des fibres

Alain Connes : C'est ce que tu entends par fibres, localement, c'est une fibration.

Daniel Sibony : C'est une fibration locale mais ça te donne, ça te permet d'aborder ce phénomène qui tourne beaucoup de têtes, que j'ai appelé, qu'on appelle la synchronicité qui est que, c'est pas grave, c'est pas extraordinaire, que des trajets ultérieurs viennent chercher à se synchroniser sur un point donné, sachant qu'en plus, ils sont porteurs de sens, imagine-les comme des petits véhicules qui portent un paquet de signification et qui viennent amener la signification là où elle n'était pas. C'est magnifique et ça permet vraiment de démystifier et ça permet de garder cette droite, en l'occurrence enroulée...

Alain Connes : Elle reste là ?

Daniel Sibony : parcourue de fibrés.

Alain Connes : Elle reste là, oui.

Daniel Sibony : Simplement, je te comprends quand tu dis "pour le quantique, c'est pas la variable réelle qui va donner la vraie variation, c'est les opérateurs avec leur spectre, c'est-à-dire, justement, d'ailleurs le spectre, c'est pas malvenu non plus comme mot, parce que finalement, le spectre d'un opérateur, c'est quand-même quelque-chose qui à un facteur près, te donne une variation de l'identité.

Alain Connes : Surtout si tu veux, ça j'insiste beaucoup sur le fait que justement dans le quantique, ce qui se produit, donc, une variable réelle est remplacée par un opérateur auto-adjoint, et les *valeurs* de la variable réelle qui peuvent être soit discrètes soit continues sont remplacées par le spectre de l'opérateur. Donc en fait, le spectre de l'opérateur, ça veut dire sa propre variabilité, ça veut dire l'espace dans lequel il peut varier lui-même.

Daniel Sibony : Alors ce que j'ai beaucoup aimé, c'est que, avec ce montage, ce dispositif, tu arrives à extraire du seul fait que l'algèbre des opérateurs est non-commutative, tu arrives à extraire...

Alain Connes : du temps

Daniel Sibony : ...à extraire un groupe à un paramètre, c'est-à-dire du temps, c'est-à-dire tu arrives à montrer que l'algèbre évolue...

Alain Connes : Voilà, donc elle génère son propre temps, si tu veux.

Daniel Sibony : Et ça, un phénomène qui génère le temps dans lequel il se déroule, ça, je trouve ça super.

Alain Connes : Absolument. Je suis entièrement d'accord avec toi, en fait...

Daniel Sibony : Attends, je trouve ça très beau parce que, justement, ce qui m'a beaucoup travaillé tout au long des années, c'est ce que j'ai appelé déjà, dès ce livre de 78 *L'autre incastrable*, où j'introduis la notion d'objet-temps. Tu permets, j'en dis un mot ?

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, je t'en prie.

Daniel Sibony : Et ce que j'appelle objet-temps, c'est un objet *porteur de temps* et dont tu peux extraire quelques filons temporels, exactement, ce que nous venons de dire, c'est que le dispositif d'une situation quantique, avec l'algèbre des opérateurs et le spectre, c'est un objet-temps. Mon dispositif, j'avais étudié autrefois la théorie du potentiel, où je partais d'un cône de fonctions et c'est ça qui m'avait plu et qui m'avait stimulé. Tu pars d'un ensemble de fonctions dont tu exiges qu'elles vérifient certaines propriétés qui n'ont rien à voir avec le temps, et tu en extrais le temps.

Alain Connes : Là tu vois, je trouve qu'on touche un point si tu veux crucial, je vais te dire pourquoi. Parce que justement, je crois que... j'avais lu par exemple dans Desanti, il a parlé d'objet-temps.

Daniel Sibony : Il a parlé d'objet-temps ?

Alain Connes : Il a parlé d'objet-temps, mais pas du tout dans ton sens. Et ce sur quoi je veux insister justement, c'est cette espèce de fil du rasoir sur lequel nous devons si tu veux nous promener et rester avec le plus grand soin possible qui fait que nous restons dans le vrai scientifique, mais qu'en même temps, nous arrivons à toucher, si tu veux, des notions qui sont acceptables, compréhensibles, mais nous restons dans le vrai, tu comprends ce que je veux dire.

Daniel Sibony : C'est mon souci majeur. Je ne connais pas ces textes de Desanti. Desanti était un ami mais ses réflexions sur les mathématiques, c'étaient pas tout à fait les miennes, c'était pas ma tasse de thé. Non, j'essaye d'avoir une réflexion intrinsèque, c'est-à-dire que quand il y a une situation, qu'elle soit philosophique, analytique, physique, les situations que tu as apportées, moi, je trouve ça merveilleux, non pas tant pour illustrer ma notion d'objet-temps, ça, on s'en fout, mais pour montrer que, finalement, chaque chose en son temps, dans son temps. C'est pas, on range des programmes, c'est que l'important dans une situation vivante, voir comment elle produit le temps dans lequel elle peut se dérouler. Et ç, c'est formidable, et il y a un autre phénomène que j'ai trouvé très beau, dont tu avais parlé aussi, c'était l'intrication quantique.

Alain Connes : Alors on va y venir. On va y venir, pourquoi ? Parce que si tu veux, une des idées qui se dégage de cette relativisation du temps disant que justement, on devrait peut-être s'intéresser à la variabilité avant de s'intéresser au temps, donc en fait, on a trouvé dans notre premier livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a trouvé une formule, bon, c'est toujours plaisant d'avoir des formules. Donc on a dit "L'alea du quantique est le tic-tac de l'horloge divine."

Daniel Sibony : Eh bien justement, je te dirai ce que j'en pense.

Alain Connes : Mais alors attends. Laisse-moi rebondir là-dessus pour dire la chose suivante, par rapport à l'intrication. Quand on discute l'intrication quantique, d'abord qu'est-ce que c'est. Donc, je rappelle en deux mots ce que c'est. Il y a eu au début de la mécanique quantique, c'est normal, un nombre incalculable de discussions philosophiques. Les discussions philosophiques, par exemple, étaient plus importantes, entre Einstein et Hei-

senberg, etc., que les équations elles-même. Les discussions philosophiques étaient absolument fondamentales. Alors il y a eu cet épisode bien connu de Bohr, Einstein pensait avoir trouvé une réfutation du principe d'incertitude...

Daniel Sibony : ... qui était fausse...

Alain Connes : Et Bohr a trouvé, grâce à Einstein, grâce à sa théorie de la relativité générale, que... Mais Einstein ne s'est pas découragé. Ca c'était au début des années 30. Mais Einstein ne s'est pas découragé. Et quelques années plus tard, il a produit avec Podelski et Rosen un paradoxe, auquel au début, personne n'a fait attention. Bohr l'avait réfuté en utilisant une méthode complètement cafouilleuse mais quand maintenant on regarde la courbe du nombre de citations de cet article, de Einstein, ça croît toujours de manière exponentielle. Donc, c'était une contribution absolument majeure. Et quelle était leur idée, quelle était l'idée qu'ils ont mis en avant, l'idée qu'ils ont mis en avant, c'est que... Bon alors, c'est vrai que...

Daniel Sibony : Comme par hasard, c'est 2 particules.

Alain Connes : Oui, c'est 2 particules. Ce qui est possible, c'est de créer deux particules, dont les moments sont exactement opposés. Et, comme elles sont créées au même endroit, leur position doivent être aussi reliées. Bon alors qu'est-ce qu'on fait maintenant ? C'est ça qu'on appelle l'intrication quantique, que dit la description de l'expérience ? Ce qu'on sait, enfin, ce que disaient Einstein, Podelski et Rosen, c'est qu'après tout, on va pouvoir mesurer la position de l'une et le moment de l'autre, et si on le fait de façon à ce qu'elles soient causalement séparées, eh bien, à ce moment-là, on aura, comme on sait l'égalité entre les moments, etc, on aura les 2 informations. Alors, en fait, la situation est bien plus intéressante que ça, et on a fait l'expérience et on s'est aperçu qu'il y avait effectivement cette intrication quantique, qu'elle existe, et en particulier, il y a Alain Aspect et toutes les expériences qui ont été faites, ont montré qu'il y avait effectivement l'intrication quantique mais ça paraissait alors extrêmement bizarre et ça paraît toujours extrêmement bizarre, qu'au moment où on fait une expérience sur l'une, ça signifie que quelque-chose va se passer sur l'autre, alors qu'elles sont causalement séparées, ça c'est ce qu'Einstein a appelé Spooky action at a distance.

Daniel Sibony : Bien sûr il n'y a pas une action à distance. C'est très

clair, parce que si la distance est énorme, ça fait trop, mais, ce que j'aime là-dedans, c'est qu'il y a l'idée d'unité. C'est comme si ça forme une unité.

Alain Connes : C'est exactement le cas.

Daniel Sibony : Et si ça forme une unité, ce que tu dis de ce point est déjà répercuté sur l'autre.

Alain Connes : Voilà mon interprétation philosophique de ce genre de situation. Alors il se fait que l'homme essaie toujours d'écrire une histoire, du passé. Et dans ce cas, lorsqu'on essaie d'écrire une histoire impliquant le temps, on se plante, ça ne marche pas. Pourquoi ? Parce que les deux points sont spatialement séparés, causalement séparés, donc en fait, on ne peut pas écrire une véritable histoire. Quelle est mon interprétation ? Mon interprétation, c'est que dans cette situation, l'alea du quantique au point qui est ici et l'alea du quantique à cet autre point ne sont pas indépendants. Ils forment une unité.

Daniel Sibony : Voilà, ils sont connectés, ça veut dire que la variabilité a beau être absolue en chaque point, elle est surmontée par une connexion.

Alain Connes : Et qu'est-ce que cela devrait signifier ? Cela devrait signifier que exactement comme Einstein avait fait l'analyse du temps, à partir de l'expérience dans le train, il faudrait être suffisamment intelligent, pour faire ici l'analyse de la variabilité et comprendre qu'au lieu que l'alea du quantique soit complètement aléatoire, en fait, à cause de l'intrication quantique, il a une structure, et que c'est de cette structure que doit émerger, non pas le temps, parce que ça, je sais le faire émerger des équations, et de la non-commutativité, mais que doit émerger la structure générale. Donc ça, c'est un problème, je ne prétends pas que ce problème soit résolu, mais je prétends que la question devient brûlante, parce qu'on ne peut pas écrire d'histoire cohérente d'autant plus que le passé comme tu le sais n'est pas déterminé, à cause des expériences de Wheeler.

Daniel Sibony : Mais justement, peut-être pour relever, pour mettre en relief cet aspect de l'intrication quantique, il faudrait parler de l'expérience des 2 trous et de deux photons qui entourent une galaxie.

Alain Connes : Oui, bien sûr, surtout l'expérience de Wheeler. En fait, on peut le faire soit avec les 2 trous, soit avec des miroirs et les photons qui entourent une galaxie. Bon on ne va pas entrer dans les détails techniques, mais en gros, on va quand-même expliquer quel est le paradoxe. Le paradoxe, c'est qu'à un moment-donné, lorsqu'on fait une telle expérience où on a un photon qui se divise en 2, a priori, lorsqu'on le pense comme une onde, etc., et il peut faire des interférences à l'arrivée, eh bien en mettant à l'arrivée soit ce qu'il faut pour qu'il y ait une interférence, soit ce qu'il faut pour qu'on sache quel trajet le photon a pris, eh bien, ça va déterminer en fait ce qui s'est passé dans le passé. Et alors Wheeler a imaginé une expérience avec une galaxie intermédiaire, qui fait que les 2 trajectoires du photon vont se rejoindre à un instant bien bien ultérieur peut-être un milliard d'années plus tard, eh bien, qu'est-ce que ça signifierait ? Ca signifierait que selon ce que nous faisons maintenant, nous allons déterminer ce que le photon a fait il y a un milliard d'années. Donc qu'est-ce que ça signifie ? Ca signifie qu'en fait, le passé n'est pas écrit une fois pour toutes, ce qui est quand-même absolument fascinant.

Daniel Sibony : Et c'est ça qui est... Enfin, inutile de te dire que ça, ça m'enthousiasme parce que, si tu veux, d'abord, il y a un phénomène courant, qu'on trouve en psychanalyse mais que chacun connaît et qu'on appelle l'après-coup. Ca veut dire l'après-coup, il s'est passé un événement pour toi, à 4-5 ans, qui a été un peu marquant mais pas trop, et puis 30-40 ans plus tard, très longtemps après, se passe un autre événement, qui n'est pas identique, qui a une petite variabilité avec le premier, mais suffisamment proche, pour faire une espèce de résonance et là, le sujet s'aperçoit au second événement, que le premier était traumatique. C'est-à-dire la nature de l'événement passé n'apparaît que lorsqu'il questionne le passé, avec un grand écart, et aussi avec un certain intérêt pour la vérité, c'est-à-dire que s'est-il passé, *vraiment* ? On ne le saura peut-être pas mais ce qu'on sait, c'est qu'il s'est passé autre chose que ce qu'on croyait. Autrement dit, si on reprend maintenant en termes physiques, je trouve formidable que le passé soit instable,

Alain Connes : ne soit pas fixé,

Daniel Sibony : et dépende par surcouches qu'on ne connaît pas dépende de notre manière de l'interroger.

Alain Connes : Tout à fait, au temps présent ?

Daniel Sibony : Au temps présent. Si on réfléchit, c'est peut-être le montage-même de l'écriture. Tu parlais de Proust. Quelqu'un qui écrit un roman, qui écrit un article un peu créatif, etc., il écrit ce qui se présente mais il se laisse aborder par des choses qui vont reconvoquer autrement le passé, autrement dit qui vont transformer le passé. Il y a une forme caricaturale de ça, aujourd'hui, mais qui a dû exister, c'est les gens qui veulent réécrire l'histoire.

Alain Connes : Evidemment, c'est une évidence.

Daniel Sibony : Mais l'idée par elle-même est d'une grande beauté, ça veut dire aussi que la vérité, elle ne peut être qu'une dispersion, une distribution discrète, toujours partielle, et que c'est dans la récurrence des requestionnements qu'on arrive à se rapprocher plus de l'effet de vérité, qu'en inscrivant, de façon définitive, ce que la vérité doit être.

Alain Connes : Oui alors ça, c'est très intéressant, parce que ça nous conduit vers ce que c'est que la vérité et là, si tu veux, je pense qu'il faut qu'on soit assez organisés, pour la raison suivante : quand tu prends le travail du mathématicien, au premier abord, le travail du mathématicien est qu'il cherche à faire des démonstrations, il cherche à savoir si quelque chose est vrai. A la limite, il peut tester avec son ordinateur tester si quelque-chose est vrai etc. et au premier abord, même le mathématicien va avoir l'impression que soit quelque-chose est vrai, soit quelque-chose est faux, et puis qu'il va donc naviguer dans un univers qui est tout à fait simple, c'est à dire qu'il va simplement naviguer de l'un à l'autre. En fait, on s'aperçoit que cette idée-là, même en mathématiques, j'y reviendrai pour le reste après, même en mathématiques, est une idée fausse et la raison est la suivante, la raison est que ce que je viens de dire s'applique parfaitement à des propositions décidables ; par exemple, si je veux savoir si un nombre, par exemple 31 est un nombre premier ou pas, c'est ce qu'on appelle quelque-chose de décidable, c'est-à-dire soit c'est vrai, soit c'est faux, et on pourra le faire en un temps fini. Alors, maintenant, quand on discute justement des vérités en mathématiques, il faut faire très très attention, parce qu'il faut arriver à qualifier les énoncés, et il faut bien voir qu'il y a des énoncés qu'on appelle existentiels ou des énoncés universels. Alors ce que j'appelle par exemple un énoncé universel, c'est par exemple, quelque soit x, je ne sais pas, quelque soit un nombre pair,

il existe... Bon d'accord. Mais ce qui va se produire, c'est que donc, ce que j'appelle un énoncé universel, c'est quelque soit x, mais quelque soit x, on va énoncer une propriété décidable, par exemple, on va demander que x s'il est pair soit la somme de deux nombres premiers. C'est un énoncé qu'on peut décider. Alors ce qui est absolument incroyable, c'est que, si on ne prend que les entiers, tout le monde sait ce que sont les entiers, ce qui est absolument incroyable, c'est qu'on sait, si on travaille avec les entiers, etc., on sait que si un énoncé est démontrable, il est vrai. On a toutes sortes de nuances entre ce qui est démontrable et ce qui est vrai et en fait, ce que l'on sait aussi, c'est qu'en fait, si on regarde la plupart des énoncés qui sont vrais sur les entiers, la plupart des énoncés vrais sont non démontrables. Donc, ça, c'est quelque-chose d'absolument incroyable, si on regarde la proportion, parmi les énoncés vrais, de ceux qui sont démontrables, on sait qu'il y a une quantité incroyable d'énoncés vrais qui ne sont pas démontrables. Et alors un exemple typique d'un énoncé qui est vrai mais qui n'est pas démontrable dans les axiomes de Peano, c'est un exemple que j'aime bien donner, je ne vais pas le donner techniquement mais je vais le dire comme ça, et le dire, j'espère, de manière coorecte : c'est qu'on prend un nombre, comme par exemple, le nombre 5, on l'écrit en base 2, on écrit que 5 est égal à 4 plus 1 mais on écrit que 4, c'est 2 puissance 2, on écrit tout en base 2, d'accord, et ensuite, on fait une opération que j'appelle le lièvre, parce qu'elle va augmenter considérablement la taille du nombre. On remplace tous les 2 par des 3, d'accord ?! Après, la tortue arrive et la tortue soustrait 1. On prend le résultat, on l'écrit à nouveau en base 3, etc. et on remplace tous les 3 par des 4, ça c'est le lièvre, puis la tortue arrive et elle soustrait 1, on réécrit le résultat en base 4, et on remplace tous les 4 par des 5, etc. L'énoncé qui est incroyable mais qui est vrai, et je vais te dire pourquoi mais qui n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano, c'est que c'est la tortue qui gagne. C'est l'histoire du lièvre et de la tortue bien sûr que je veux illustrer, c'est que bien que le lièvre fasse des pas absolument immenses, la tortue qui ne fait presque rien. Qu'est-ce qui va se produire ? Il va se produire des situations dans lesquelles quand on soustrait 1, on ne peut plus l'écrire de la même manière, il faut avoir changé d'écriture, etc. et alors, ce qui est incroyable, c'est que cet énoncé, on sait qu'on ne peut pas le démontrer dans l'arithmétique de Peano. Comment est-ce qu'on sait ça ? On sait ça parce qu'on sait que la fonction qui donne le nombre de pas qu'il faut pour que la tortue gagne est une fonction qui croît plus rapidement que toute fonction qu'on peut écrire. Or si on savait le démontrer, on aurait une borne pour cette fonction. Donc on sait que ce n'est pas démontrable

dans l'arithmétique de Peano. Pourquoi est-ce qu'on sait que c'est vrai ? Tu vas comprendre puisque tu étais élève de Choquet donc tu vas comprendre tout de suite : qu'est-ce qu'on fait ? On fait quelque-chose qui est magnifique, on remplace la base, qui était 2 puis 3 puis 4 par le plus petit ordinal infini, par ω et on s'aperçoit que quand on met ω, le lièvre ne change rien, et la tortue décroît de 1. Comme on a un ordinal, ça va finir par arriver vers 0. La démonstration est d'une simplicité incroyable, mais elle échappe à l'arithmétique de Peano, donc on a là un exemple qui montre à quel point la notion de vérité en mathématique est une notion incroyablement subtile et c'est une notion qui, bon, en pratique, le mathématicien qui travaille n'a pas à faire ces choses-là. Mais en fait, il se pourrait très bien qu'il y ait des situations assez communes, dans lesquelles ce genre de choses a un rôle. En tous les cas, l'image qui s'en dégage a été merveilleusement décrite dans un petit livre qui est le livre de Jean-Yves Girard, sur le théorème de Gödel, ce qu'il explique dessus, l'image qui s'en dégage, si tu veux, c'est qu'il faut voir le mathématicien comme quelqu'un qui est dans un tribunal et qui va essayer d'analyser la vérité. Il va avoir certains moyens, mais certainement pas celui de savoir si quelque-chose est vrai ou pas, si tu veux, sauf dans des cas très simples, bien entendu.

Daniel Sibony : Ce problème se pose, bien sûr, en mathématiques, mais dans bien d'autres domaines. Puisque tu parles de tribunal, il y a des causes qui sont vraiment justes, irréfutables, etc., et qui sont perdues au tribunal, parce que le langage dans lequel il faudrait les formules pour qu'elles soient même entendables, n'est pas là.

Alain Connes : N'existe pas.

Daniel Sibony : Donc l'intéressant, ça veut dire que la vérité, ça n'est pas une entité, ce n'est même pas une émergence ou un effet, c'est une corrélation entre deux langages, c'est-à-dire entre le langage qui porte l'objet, et puis le langage qui doit recevoir, qui doit authentifier.

Alain Connes : Oui, mais alors attends, alors là, il faut qu'on fasse très attention parce que si tu veux, par exemple dans ce livre, là, de Bricmont et Sokal, que j'ai lu attentivement pourquoi, parce qu'en fait, j'ai des choses à dire là-dessus, alors, quelle était leur idée ? Leur idée, l'idée d'*Impostures intellectuelles*, c'était que, et là, on est tous les deux d'accord là-dessus, il y

a eu des abus, au moment du post-modernisme, c'est-à-dire qu'il y a eu des abus qui consistaient à utiliser un langage mathématique, qui n'était en fait, pas soutenu par la rigueur, et qui n'est surtout pas la connaissance.

Daniel Sibony : Si tu permets, même aujourd'hui, ça n'est pas que post-moderne. Il m'arrive d'écouter des conférences de vulgarisation de la physique et d'entendre des choses stupéfiantes, par exemple, d'entendre que du fait de la relativité, du temps, il n'y en a plus, le temps n'existe plus. Et ça, je trouve que...

Alain Connes : ...que c'est difficile à avaler, oui.

Daniel Sibony : Les gens qui ne connaissent pas la relativité, heureusement qu'ils résistent et qu'ils savent qu'il y a le temps, que le temps ici, n'est pas le même que là-bas, sur l'autre galaxie, c'est très bien, c'est-à-dire qu'on confond le temps et la mesure du temps, et on confond le temps avec le rapport au temps, donc il y a beaucoup de confusion, même chez des scientifiques.

Alain Connes : Bien sûr. Le fait d'être scientifique n'exclut absolument pas ce genre de confusion. Mais alors, ce qui m'a beaucoup frappé, en lisant ce livre, justement, de Sokal, leur but était louable d'une certaine manière, mais ce qui m'a énormément frappé, c'est que les gens qu'ils critiquent, il y a Bruno Latour, il y a Lacan, Lacan est en première ligne...

Daniel Sibony : J'espère.

Alain Connes : mais, ce qui m'a énormément frappé et là, je suis sûr que je vais me faire attaquer mais ça n'est pas grave, il y a quelque-chose que ces personnes ont ressenti mais qu'ils n'avaient pas le langage pour le dire, et je pense que ça va correspondre à ce que tu disais tout à l'heure.

Daniel Sibony : Dis-moi.

Alain Connes : Les gens disent que j'ai une marotte, c'est les topos de Grothendieck. Mais je vais en parler. Je vais en parler pourquoi, parce que cette marotte, en fait, Grothendieck l'a considérée comme sa plus grande découverte, et quand on la comprend vraiment, ce qui en fait, ce qui m'a amusé aussi, c'est de voir que les gens qui critiquent cette chose-là, en général, ne

savent pas ce que c'est, et le critiquent en disant "oui, ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques" mais justement, si ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques, c'est parce que justement, les gens n'ont pas compris le sens que ça a. Et ça a un sens extraordinaire. Je vais t'expliquer ce que c'est, et t'expliquer en quel sens justement, ça permettrait à ces gens-là, qui ont essayé de s'exprimer, s'ils avaient eu ce concept, ils auraient pu s'exprimer.

Daniel Sibony : Ces gens-là, c'est-à-dire ?

Alain Connes : Bruno Latour, etc.

Daniel Sibony : Ah oui, des gens qui ont bricolé avec des choses, comme ils ont pu.

Alain Connes : Avec le langage commun.

Daniel Sibony : Oui bon.

Alain Connes : Avec le langage commun mais ils n'avaient pas les mots pour le dire. Alors je vais essayer d'expliquer, d'abord quel est le concept, et en quel sens ça change complètement la notion de vérité parce que c'est ça qui est fondamental. L'intérêt de ce concept, c'est que ça change la notion de vérité, ce qui est absolument fabuleux. Alors si tu veux, bon, c'est un concept mathématique abstrait. Quelle était la grande découverte qu'a fait Grothendieck ? Il s'est aperçu d'abord de la chose suivante. Je vais employer des mots techniques, mais si je n'emploie pas des mots techniques, on va m'accuser de... bon.

Daniel Sibony : Il faut.

Alain Connes : Ce qu'a trouvé Grothendieck, c'est qu'à un moment-donné, il a eu à écrire un article pour, c'était un article un peu de... tout le monde aurait dit c'était facile, c'étaient des choses qu'il devait compiler etc., c'était sur l'algèbre homologique, et en gros, il a écrit les axiomes des catégories abéliennes, mais les gens les connaissaient plus ou moins à l'époque, c'était pas ça qui était important, et par une élaboration de ces idées, en prenant des exemples, des exemples très intéressants, qu'il appelait les catégories de diagrammes si tu veux, il s'est aperçu de la chose suivante, il s'est aperçu

qu'en fait, alors que lorsqu'on fait la théorie des faisceaux d'habitude, on prenait des faisceaux de groupes abéliens, et puis on regardait la cohomologie, etc., et il a eu l'idée de regarder non plus des faisceaux de groupes abéliens, mais des faisceaux d'ensembles, et à ce moment-là, il a fait deux observations qui sont géniales, la première observation qu'il a faite, c'est que, si on donne la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, on peut reconstruire l'espace topologique, avec sa topologie, donc, c'est assez extraordinaire, parce que tu donnes une observation abstraite... Deuxième observation, quand on travaille dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, c'est comme si on travaillait dans la catégorie des ensembles. Toutes les propriétés qu'on utilise d'habitude sont vraies, sauf le principe du tiers-exclus. C'est-à-dire qu'on a plus le droit de raisonner par l'absurde, sinon, tout marche impeccable. C'est-à-dire si tu travailles dans la catégorie des faisceaux d'ensembles, dans un espace topologique, tu peux parler d'un groupe, tu peux parler d'un anneau. Et ça reviendra à parler d'un faisceau de groupes, d'un faisceau d'anneaux, etc. Mais troisième observation vraiment géniale, c'est qu'il n'y a pas que les catégories de faisceaux d'ensembles sur un espace topologique qui vérifient ces propriétés, il y en a d'autres. Et cela signifie qu'il y a de nouveaux espaces. Et parmi ces nouveaux espaces, qui ne sont plus des espaces topologiques, ce sont en gros des espaces avec un mouvement intérieur, d'accord, avec des relations si tu veux. Et alors ce qui arrive maintenant et qui est vraiment merveilleux, je trouve. Moi j'ai rencontré ça, si tu veux, ce qui m'a convaincu, c'est qu'avant, je bêlais comme le troupeau, c'est-à-dire je disais "Oh, le topos, c'est pas intéressant, c'est une généralisation de la notion d'espace, on s'en fiche, etc", c'est ce que je faisais jusqu'à il y a un certain nombre d'années, il y a peut-être 5 ou 6 ans, et il y a 5 ou 6 ans, je me suis rendu compte dans mes travaux avec Katia Consani qu'en fait, il y avait un topos sous-jacent à l'espace qu'on avait trouvé, et dont l'espace des points était l'espace non-commutatif qu'on avait trouvé, à ce moment-là, j'ai été émerveillé, j'ai été complètement emballé par cette notion, et après coup, je me suis rendu compte de la profondeur qu'elle avait, et en fait, ce qui est vraiment profond dans cette notion, c'est que, quand tu travailles dans un topos, où tu ne peux plus utiliser le tiers-exclus, le principe de contradiction eh bien, on a un remplacement pour le vrai et le faux, je vais t'expliquer ce que c'est, un peu techniquement, on a quelque-chose qui remplace le vrai et le faux, mais qui est plus subtil. Et j'ai fait récemment une conférence l'an dernier à l'école normale, dans laquelle je voulais donner un exemple de ça. Et alors je voulais donner un exemple, et

cet exemple, c'était dire qu'on est à 3 pas de la vérité, à 4 pas de la vérité, à 10 pas de la vérité. Alors je vais te donner un topos que je vais te nommer, d'accord, donc techniquement ce sera correct, et qui permettra de dire qu'on est à 10 pas de la vérité. Qu'est-ce que c'est que ce topos ? Eh bien au lieu de parler d'un ensemble, comme on en parlerait normalement, eh bien, on va parler d'un ensemble avec une transformation, sans propriété spéciale, c'est une transformation. Tu as un ensemble et une transformation. Théorème : ça, c'est un topos, c'est-à-dire que si tu travailles avec ces choses-là, tu peux travailler exactement comme si tu étais en train de travailler avec les ensembles. Tout marche bien, sauf que tu n'as plus le tiers-exclus. Alors d'où ça vient que tu n'aies plus le tiers-exclus ? Eh bien, ça vient du fait que normalement, quand on travaille dans le topos des ensembles, quand on a un sous-ensemble, on peut le dire, on peut dire le sous-ensemble par la fonction qui vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, disons vrai si on est dans le sous-ensemble et faux si on n'est pas dedans. D'accord ? Bon ! Parce que évidemment, tu as l'ensemble, et tu as son complémentaire, donc ça marche bien. Alors maintenant, prenons ce topos dont je t'ai parlé, qui est formé d'un ensemble et d'une transformation. Alors on va essayer de classifier les sous-ensembles. Qu'est-ce que c'est qu'un sous-ensemble, c'est un sous-ensemble qui est stable par la transformation, bien sûr, c'est un sous-objet, si tu veux. Alors est-il possible de prendre la fonction qui vaut 1 sur ce sous-ensemble, et 0 sur le complémentaire ? Non, pourquoi ? Parce que tu peux arriver à être dans le complémentaire, mais qu'au bout d'un certain nombre de pas, tu te retrouves dans l'ensemble de départ, donc en fait, c'est pas cette 0-1 qui va classifier les sous-objets, non, c'est le nombre de pas qu'il faut pour arriver dans le vrai.

Daniel Sibony : C'est la proximité

Alain Connes : C'est la proximité au vrai. Et à ce moment-là, qu'est-ce que tu as ? Tu as une théorie qui marche exactement comme la théorie des ensembles, mais dans laquelle le vrai et le faux, qui étaient simplement le vrai et le faux dans le sens ordinaire sont remplacés par les nuances sur le vrai, c'est-à-dire tu as le vrai, tu as le "à 1 pas du vrai", tu as le "à 2 pas du vrai", "à 3 pas du vrai" *(rires)* et tu as le faux. Et ça c'est merveilleux je veux dire, à partir de là, on peut faire des variations, on peut faire toutes sortes de variations et mon idée, maintenant, mon idée c'est la suivante : en lisant attentivement les écrits de ces gens-là, je me suis aperçu que ce qu'ils

essayaient de dire en fait, c'était que, non pas dans le domaine des mathématiques, mais dans le domaine des sciences sociales, où par exemple, lorsqu'on assiste à une discussion à la télévision, où on va dire "celui-là a raison"... "Est-ce que Martine Aubry a raison de dire que les 35 heures ont été une réussite ?" Si tu veux. Des choses comme ça, dès qu'on est dans une situation comme ça, dire "untel a raison, untel a tort", c'est une hérésie, parce que c'est un point de vue incroyablement simpliste, par rapport à la complexité du problème auquel on s'attaque, et en règle générale, le seul outil que les gens ont pour essayer de pallier à leur défaut de concepts, c'est de dire "celui-là a 50% raison, etc." mais c'est ridicule. Alors ce que je dis, simplement, ma conclusion, si tu veux, c'est que dans tous ces cas-là, je pense qu'il y a un topos difficile à déterminer, mais qui permettrait, si tu veux, de... justement, de nommer toutes ces nuances sur la notion de vrai et de faux, et permettrait d'être infiniment plus efficace justement dans ce genre de situation. Et je pense que ces gens-là l'avaient compris, intuitivement.

Daniel Sibony : Alors, je pense que c'est une très bonne chose, évidemment, que ça s'élabore en mathématiques, et en langage mathématique, et sur des objets mathématiques, de façon précise et radicale. En même temps, tout ce qui s'élabore, dans l'art, dans une science, dans un domaine pratique, c'est que, ça existe dans la vie. Et dans la vie, moi, devant un débat, je me suis rendu compte que ma question, c'était pas "qui a raison ?" et "qui a tort ?", ma question, c'est que chacun est "entre deux", c'est-à-dire entre "ne pas menacer la vérité qui lui sert de support et s'approcher un peu de l'autre vérité, dont il est question, il est "entre deux". Et c'est très amusant d'observer que certains voient bien l'approximation de la vérité commune ou de la vérité qui est en question, mais ne trouvent pas la force de risquer la place, la leur, qu'ils identifient évidemment à la vérité, parce que c'est ce qu'en termes psy, on appelle ça un investissement narcissique, c'est à dire il y a un minimum d'amour de soi *(Il rit.)*.

Alain Connes : Laisse-moi rebondir sur ce que tu dis, laisse-moi t'interrompre. C'est que les topos ont des points, et quand tu es dans un point du topos, là, tu as le vrai ou le faux, c'est-à-dire que tu n'as pas de nuances. Et ça, c'est très important.

Daniel Sibony : C'est évident que c'est une théorie de la nuance, mais qui, ponctuellement n'est pas nuancée.

Alain Connes : Ponctuellement par définition du point, le point n'est pas nuancé. C'est à dire que le point, c'est la théorie des ensembles ordinaires, par définition.

Daniel Sibony : Et donc, pour revenir à ça, et par les temps qui courent, avec toutes sortes de tensions et de violences même, sous-jacentes, on sent que la dimension de la vérité en a pris un coup.

Alain Connes : Ah, terriblement, terriblement, bien sûr.

Daniel Sibony : Parce que quelqu'un que tu respectes, qui est quelqu'un de bien, il n'y a pas à en discuter, le voir en train de ne pas voir la vérité qui pourrait menacer la position qu'il est chargé de tenir, et qui souvent, s'identifie avec son poste, c'est-à-dire que s'il prend des risques avec cette vérité-là, il est sur siège ejectable.

Alain Connes : Il saute, oui.

Daniel Sibony : Voir ça, je t'assure que pour quelqu'un... s'il y a quelque-chose à quoi je suis sensible plus que tout, c'est la vérité, la justice, qui est un peu de vérité dans le partage, et le désir, qui est aussi un peu de vérité dans notre existence. Eh bien, j'ai eu des moments de souffrance, quand j'ai dû encaisser cette nouvelle parure de la vérité, qui est une espèce de parade, et qui ne me fait pas du tout juger les gens ou les mépriser, mais qui me dit que les places sont chères, pour défendre... Alors maintenant, je voudrais, avant qu'on termine, ce qui moi, m'a toujours passionné dans ce domaine du quantique, à travers ce que tu en dis. Tu as dit à un moment, "L'émergence du temps, elle tient au fait qu'on ne sait pas tout".

Alain Connes : Exactement, ça, c'est exactement la vérité.

Daniel Sibony : Il y a une chose, cette chose-là, et je voudrais rebondir sur l'autre, qui est "L'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge divine.". D'abord, l'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge, même s'il n'y a pas d'horloge, et le Divin, on ne sait pas trop où il est, mais cette phrase me plaît beaucoup, et je suis profondément d'accord avec elle, au sens suivant : au sens où ça veut dire que, et on est bien d'accord qu'il n'y a pas de temps

universel, mais cette phrase, elle dit que le temps se prélève dans ce que j'appelle "l'infini des possibles".

Alain Connes : Tout à fait, c'est exactement ça, bien sûr.

Daniel Sibony : Et pour moi, l'infini des possibles, c'est ça le Divin, et le Divin, à la fois au sens religieux, et au sens non religieux. Les religieux font des prières au Divin pour qu'Il leur donne un petit possible de plus, et les non religieux cherchent du possible, et se disent "si je pouvais avoir un coup de chance !", etc. Donc cette phrase, elle dit très exactement que le temps a beau ne pas être le même ici et ailleurs, il a beau émerger, et ne pas être déjà donné, etc., entre nous, d'ailleurs, s'il émerge d'une situation, c'est qu'il y était déjà.

Alain Connes : Oui, d'une certaine manière, bien sûr.

Daniel Sibony : Le temps se prélève dans l'infini des possibles, ça veut dire, ce que j'appelle l'être, c'est-à-dire qu'il y a un temps de l'être, qui est insituable, qui est inabordable, mais qu'on prend, là où on peut. Et c'est ça le rôle des objets-temps, le sens que j'y donne, des objets porteurs de temps, des oeuvres d'art, une théorie, qu'elle soit du potentiel ou quantique, ou autre chose, c'est que l'important, ce sont des objets où on peut prendre du temps, et l'important, c'est la manière de le prendre. Alors maintenant, ça nous mène à la question de l'inconscient, du non-savoir. Toi tu dis "Le temps émerge du fait qu'on ne sait pas tout.". Et moi, je me pose une question, et peut-être qu'on terminera là-dessus, je me pose une question, en un sens, j'avais écrit dans ce texte il y a plus de 50 ans "le temps se lève avec le refoulement", ça veut dire quand le refoulement est levé, il y a une source de temps qui apparaît.

Alain Connes : Et là, tu identifies temps et liberté, d'une certaine manière, oui.

Daniel Sibony : Peut-être ça veut dire qu'en réalité, on prend une scène de ton deuxième roman, où l'héroïne est totalement inconsciente, et là, elle a une connaissance totale, mais elle n'est pas consciente d'avoir cette connaissance totale.

Alain Connes : Non pas du tout.

Daniel Sibony : Donc elle est totalement inconsciente.

Alain Connes : Puisque la conscience est reliée au temps, par définition.

Daniel Sibony : Et c'est en sortant de cet état d'inconscience vers le conscient...

Alain Connes : Qu'elle réalise ce qu'elle a vécu.

Daniel Sibony : Qu'il y a un flux de temps qui apparaît. Et ça, ça me fait penser à une petite histoire talmudique que j'ai connue autrefois qui dit que le nourrisson, euh, le foetus, dans le ventre de sa mère, jusqu'au moment de sa naissance, il connaissait tout.

Alain Connes : On est d'accord *(Il rit)*.

Daniel Sibony : Il avait la connaissance totale, et puis un ange passe, il fait une coupure, et, au passage, quand il entre dans le temps, il perd tout, et on s'aperçoit, en revenant cette fois au modèle quantique ou à ton roman, on s'aperçoit qu'il perd toutes les connaissances et que l'équivalent de ces connaissances qui étaient inconscientes, c'est le temps qu'il va mettre à les acquérir.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : C'est-à-dire qu'il y a un équilibrage...

Alain Connes : Entre temps et connaissance.

Daniel Sibony : Entre temps et inconscient, ou temps et connaissance, c'est-à-dire que d'une certaine façon, le temps entre dans le monde en franchissant le seuil...

Alain Connes : Le seuil maternel.

Daniel Sibony : Le seuil entre l'inconscient et le conscient, ou entre le réel

et le praticable.

Alain Connes : Eh bien écoute, je crois que c'est une très belle conclusion.