Sur les problèmes futurs des mathématiques,

par M. David Hilbert (Göttingen)

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs ? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures ? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence ?

L'histoire enseigne la continuité du développement de la Science. Nous savons que chaque époque a ses problèmes que l'époque suivante résout, ou laisse de côté comme stériles, en les remplaçant par d'autres. Si nous désirons nous figurer le développement présumable de la Science mathématique dans un avenir prochain, nous devons repasser dans notre esprit les questions pendantes et porter notre attention sur les problèmes posés actuellement et dont nous attendons de l'avenir la résolution. Le moment présent, au seuil du vingtième siècle, me semble bien choisi pour passer en revue ces problèmes ; en effet, les grandes divisions du temps non seulement permettent de jeter un regard sur le passé, mais encore attirent notre pensée sur l'avenir inconnu.

Le grand rôle joué par des problèmes déterminés dans le progrès général de la Science mathématique est non moins incontestable que l'influence qu'ont ces problèmes sur le travail particulier du chercheur. Tant qu'une branche de la Science jouit d'une abondance de problèmes, elle est pleine de vie ; le manque de problèmes dénote la mort, ou la cessation du développement propre de cette branche. Et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre.

Il est difficile et souvent impossible de préjuger exactement de la valeur d'un problème ; c'est, en effet, exclusivement le profit que tire la Science de la solution du problème qui permet de porter un jugement sur la valeur de ce dernier. On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas des attributs généraux caractérisant un bon problème mathématique.

Un mathématicien français des temps passés a dit : "Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on puisse la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue." Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée ici d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait ; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute.

Pour avoir de l'attrait, un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les

Traduite par M. L. Laugel : L'original de la traduction a paru en allemand dans les *Göttinger Nachrichten*, 1900. M. Hilbert a fait ici quelques modifications à l'original au § 13 et quelques additions au § 14 et au § 23.
Référence : https://www.hist-math.fr/textes/Hilbert1900_ProblemesFuturs.pdf.
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, avril 2023.

dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution.

Les mathématiciens des siècles précédents s'occupaient avec ardeur de la recherche des solutions de quelques problèmes très difficiles. Ils en appréciaient la valeur à son juste prix. Je me contenterai de citer le *Problème de la brachistochrone* de Jean Bernoulli. L'expérience démontre, c'est ainsi que s'exprime Bernoulli, en proposant ce problème au public, que les nobles esprits ne sont jamais davantage incités au travail pour faire progresser la Science que lorsqu'on leur propose des problèmes difficiles autant qu'utiles ; il espère mériter la reconnaissance du monde mathématique, si, à l'exemple de savants comme Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani et autres, qui l'ont fait avant lui, il pose un problème aux analystes les plus distingués de son temps, afin qu'ils puissent, comme avec la pierre de touche, essayer l'excellence de leurs méthodes et en même temps mesurer leurs forces entre elles. C'est de ce problème de Bernoulli et de problèmes analogues que le calcul des variations tire son origine.

On sait que Fermat annonça que l'équation de Diophante

$$x^n + y^n = z^n$$

(sauf en certains cas qui sautent aux yeux) est impossible à résoudre en nombres entiers, x, y, z. Le *Problème de la démonstration de cette impossibilité* nous offre un exemple frappant de l'influence que peut avoir sur la Science une question très spéciale et en apparence peu importante. C'est, en effet, le problème de Fermat qui conduisit Kummer à l'introduction des nombres idéaux et à la découverte du théorème de la décomposition univoque des nombres d'un corps du cercle[1] en facteurs premiers idéaux, théorème qui, par l'extension qu'en ont faite Dedekind et Kronecker aux domaines algébriques quelconques, est devenu le point central de la théorie moderne des nombres et qui a une importance s'étendant bien au delà des limites de cette théorie, jusque dans les régions de l'Algèbre et de la Théorie des fonctions.

Passant à un tout autre champ d'études, je citerai le *Problème des trois corps*.

M. Poincaré, en entreprenant de traiter à nouveau ce difficile problème et d'en avancer la solution, a découvert des méthodes fécondes et d'une grande portée en Mécanique céleste, qui sont aujourd'hui admises et appliquées même par l'astronome pratique.

Ces deux problèmes, celui de Fermat et celui des trois corps, nous semblent occuper comme les pôles opposés dans l'ensemble des problèmes ; le premier, libre création de la raison pure, le second, posé par les astronomes et indispensable pour la connaissance des phénomènes fondamentaux les plus simples de la nature.

Il arrive souvent aussi qu'un certain problème particulier se rattache aux branches les plus diverses de la Science mathématique. C'est ainsi que le *Problème des lignes géodésiques* joue un

[1]En allemand *Kreiskörper*. C'est un corps déterminé par les racines de l'unité d'un degré quelconque déterminé. On trouvera les plus récents développements de ces diverses théories dans le compte rendu : *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, par M. Hilbert (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. IV ; 1891-1895. Berlin, Reimer ; 1897, p. 174-542). (L. L.)

rôle des plus importants au point de vue de l'histoire ainsi que des principes, dans les fondements de la Géométrie, dans la théorie des courbes et des surfaces, dans la Mécanique, et enfin dans le Calcul des variations. Dans son livre sur l'Icosaèdre, M. F. Klein a, de même, très bien fait ressortir l'influence du rôle que joue le Problème des polyèdres réguliers dans la Géométrie élémentaire, dans la théorie des groupes et des équations, et dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Pour mettre encore en pleine lumière l'importance de certains problèmes, je rappellerai que Weierstrass regardait comme une bienveillante disposition de la Providence d'avoir, au début de sa carrière, rencontré un problème fondamental auquel il pût s'attaquer, tel que le *Problème d'inversion de Jacobi*.

Ayant exposé l'importance générale des problèmes en Mathématiques, je passe à la question de savoir quelles sont les sources où le mathématicien les puise. Les premiers et les plus anciens problèmes de chaque branche de la Science mathématique tirent certainement leur origine de l'expérience, et c'est le monde de la connaissance extérieure qui les inspire. Les *règles des opérations sur les nombres entiers* ont été certainement découvertes lors d'un état inférieur de culture de l'humanité, absolument comme, aujourd'hui encore, l'enfant apprend à appliquer ces règles par la méthode empirique. Il en est de même des *premiers problèmes de la Géométrie* : problèmes posés dans l'antiquité, la duplication du cube, la quadrature du cercle, et ces problèmes qui se sont présentés les premiers dans les théories de la résolution des équations numériques, des courbes, du Calcul différentiel et intégral, du Calcul des variations, de la série de Fourier et du potentiel ; sans parler de cette abondance et de cette richesse de problèmes proprement dits de la Mécanique, de l'Astronomie et de la Physique.

Mais, dans le développement progressif d'une discipline mathématique, l'esprit humain, encouragé par la découverte des solutions, a conscience de son indépendance ; il crée lui-même des problèmes nouveaux et féconds de la façon la plus heureuse, sans impulsion extérieure apparente et uniquement par combinaison logique, par généralisation et particularisation, par séparation et réunion des idées. C'est alors lui qui, placé au premier plan, pose essentiellement les questions.

C'est ainsi qu'ont pris naissance le *Problème des nombres premiers* et les autres problèmes de l'Arithmétique, la théorie de Galois, des équations, la théorie des invariants algébriques, celle des fonctions abéliennes et automorphes ; c'est enfin là, d'une manière générale, l'origine de presque *toutes les questions les plus délicates des théories modernes des nombres et des fonctions.*

D'ailleurs, tandis que travaille le pouvoir créateur de la raison pure, le monde extérieur fait de nouveau sentir son influence ; il nous conduit, par les faits extérieurs, à de nouvelles questions, il nous ouvre de nouvelles régions de la Science mathématique ; alors, en nous efforçant de faire rentrer ces nouveaux domaines de la Science dans le royaume de la raison pure, nous rencontrons souvent la réponse à d'anciens problèmes non résolus et nous faisons avancer les anciennes théories de la manière la plus avantageuse. Ce sont, ce me semble, sur ces échanges répétés entre la raison et l'expérience que reposent tant d'étonnantes analogies, ainsi que cette harmonie, en apparence préétablie, si souvent remarquée par le mathématicien dans les questions, les méthodes et les conceptions des divers domaines de sa Science.

Examinons encore rapidement les exigences et les conditions générales auxquelles doit répondre la solution d'un problème mathématique. Avant tout, je placerai l'exactitude de la solution qui doit être obtenue au moyen d'un nombre fini de conclusions et qui doit reposer sur un nombre fini d'hypothèses fournies par le problème même et formulées dans chaque cas avec précision. Or, cette condition de la déduction logique au moyen d'un nombre fini de conclusions n'est pas autre chose que celle de la rigueur dans les démonstrations. En effet, la rigueur dans la démonstration, condition aujourd'hui en Mathématiques d'une importance proverbiale, correspond à un besoin philosophique général de notre entendement ; d'autre part, c'est seulement en satisfaisant à cette exigence que les problèmes manifestent complètement leur fécondité et leur portée. Un nouveau problème, lorsqu'il tire son origine du monde extérieur, est comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte des fruits que lorsqu'il a été greffé avec tous les soins de l'art du jardinier sur la souche mère, c'est-à-dire sur les connaissances mathématiques que nous possédons complètement.

Ce serait, du reste, une erreur de croire que la rigueur dans la démonstration est ennemie de la simplicité. De nombreux exemples, au contraire, montrent que la méthode la plus rigoureuse est aussi la plus simple et la plus facile à saisir. La recherche de la rigueur nous conduit toujours à découvrir des raisonnements plus simples, elle nous ouvre aussi la voie à des méthodes plus fécondes que les anciennes qui étaient moins rigoureuses. Ainsi la Théorie des courbes algébriques a éprouvé des simplifications incontestables et a beaucoup gagné en unité depuis l'emploi des méthodes rigoureuses de la théorie des fonctions et depuis l'introduction des considérations transcendantes auxiliaires. De même la démonstration que les séries de puissances admettent l'application des quatre opérations élémentaires de l'Arithmétique et peuvent être différentiées ou intégrées terme par terme, a simplifié l'Analyse tout entière. Il en est ainsi tout particulièrement des théories de l'élimination et des équations différentielles, ainsi que des démonstrations d'existence exigées dans la dernière de ces théories. Mais, à mon avis, l'exemple le plus frappant dans cet ordre d'idées est celui du Calcul des variations. Le traitement de la variation première et de la variation seconde des intégrales définies exigeait certains calculs extrêmement compliqués et les développements des anciens mathématiciens manquaient sur ce sujet de la rigueur nécessaire. C'est Weierstrass qui, le premier, nous a montré un chemin conduisant à une nouvelle fondation bien assurée du Calcul des variations. À la fin de la Conférence actuelle, j'indiquerai rapidement, en prenant comme exemple l'intégrale simple et l'intégrale double, comment, en suivant la voie ouverte par Weierstrass, on simplifie d'une manière étonnante le Calcul des variations ; je ferai voir que, dans la démonstration des critères nécessaires et suffisants pour l'existence d'un maximum ou minimum, le calcul de la variation seconde et une partie des fatigants raisonnements relatifs à la variation première sont absolument superflus, sans parler du progrès considérable apporté par la disparition de la restriction à des variations telles que les dérivées des fonctions ne varient que de peu.

Mais si je place avant tout la rigueur dans le raisonnement comme condition nécessaire à la solution complète d'un problème, je n'en élèverai pas moins la voix contre cette opinion que ce ne sont que les questions de l'Analyse ou même de l'Arithmétique qui soient seules susceptibles d'un traitement parfaitement rigoureux. Cette opinion émise de temps à autre par des autorités scientifiques, je la regarde comme absolument erronée.

Une notion si étroite de la condition de rigueur conduirait rapidement à ignorer toutes les conceptions tirées de la Géométrie, de la Mécanique et de la Physique ; elle barrerait le cours de tout ce qui découle du monde extérieur ct, comme dernière conséquence, elle mènerait enfin au rejet des concepts du continu et du nombre irrationnel. Aussi quelle source de vie verrions-nous alors extirpée des Mathématiques par la suppression de la Géométrie et de la Physique mathématique ! Tout au contraire, je pense que partout où se présentent des idées mathématiques, soit en Philosophie (théorie de l'entendement), soit en Géométrie, soit en Physique, le problème se pose de la discussion des principes fondamentaux, bases de ces idées, et de l'établissement d'un système simple et complet d'axiomes ; et cela doit se faire de telle façon que la rigueur des nouvelles définitions et leur applicabilité ne le cèdent en rien aux anciennes définitions arithmétiques.

À de nouvelles idées correspondent nécessairement de nouveaux symboles ; nous devons choisir ces derniers de manière qu'ils nous rappellent les phénomènes qui ont été l'origine des nouvelles idées. Ainsi les figures de la Géométrie sont des symboles qui nous rappellent l'intuition de l'espace, et c'est ainsi que tout mathématicien les emploie. En même temps que de la double inégalité $a > b > c$, entre trois quantités a, b, c, qui ne se sert du dessin de trois points situés l'un à la suite de l'autre sur une droite comme symbole géométrique traduisant le mot entre ? Lorsqu'il s'agit de démontrer rigoureusement un théorème difficile sur la continuité des fonctions ou sur l'existence de points de condensation, qui de nous ne fait usage du dessin des segments de droites et de rectangles compris les uns dans les autres ? Comment se passerait-on de la figure du triangle, du cercle avec son centre, ou de la figure formée par trois axes rectangulaires ? Et qui donc renoncerait à la représentation des vecteurs, aux dessins de familles de courbes et de surfaces avec leurs enveloppes, images qui jouent un rôle d'une si grande importance dans la Géométrie infinitésimale, dans la fondation du Calcul des variations, ainsi que dans d'autres branches des Mathématiques pures ?

Les signes et symboles de l'Arithmétique sont des figures écrites, et les formules géométriques sont des formules dessinées ; aucun mathématicien ne pourrait se passer de ces formules dessinées, pas plus qu'il ne pourrait, dans les calculs, se passer de parenthèses ou crochets ou autres signes analytiques.

L'application des symboles géométriques comme méthode rigoureuse de démonstration présuppose la connaissance exacte des axiomes qui sont la base de ces figures, et la possession complète de ces axiomes ; pour que ces figures géométriques puissent être incorporées dans le trésor général des symboles mathématiques, une discussion axiomatique rigoureuse de leur contenu intuitif est de toute nécessité. De même que dans l'addition de deux nombres on ne doit pas poser les chiffres les uns sous les autres d'une façon inexacte, mais au contraire appliquer exactement les règles de calcul, c'est-à-dire les axiomes de l'Arithmétique, de même les opérations sur les symboles géométriques doivent être déterminées au moyen des axiomes de la Géométrie et de leur association.

La coïncidence entre la pensée géométrique et la pensée arithmétique se révèle encore en ceci : dans les recherches arithmétiques, de même que dans les considérations géométriques, nous ne remontons pas à chaque instant la chaîne des déductions jusqu'aux axiomes ; au contraire, lorsque pour la première fois nous attaquons un problème en Arithmétique, exactement comme en Géométrie, nous employons d'abord une combinaison de raisonnements, rapide, inconsciente, non encore définitive, avec une confiance absolue en un certain sentiment arithmétique et en l'efficacité des symboles arithmétiques ; sans cette confiance nous ne pourrions pas plus progresser en Arithmétique que nous ne le pourrions en Géométrie sans la faculté de voir dans l'espace. Comme modèle d'une théorie arithmétique, opérant d'une manière rigoureuse avec les concepts et les symboles de la Géométrie, je citerai l'ouvrage de M. Minkowski : *Geometrie der Zahlen*[2].

Ici se placent tout naturellement quelques remarques sur les difficultés que peuvent présenter les problèmes mathématiques et sur la manière de les surmonter.

Si nous ne pouvons parvenir à résoudre un problème mathématique, la raison en est souvent que nous n'avons pas encore atteint le point de vue plus général d'où ce problème ne semble plus qu'un anneau d'une chaîne de problèmes de même nature. Mais une fois que nous avons atteint ce point de vue, non seulement le problème devient plus abordable, mais encore nous sommes mis en possession d'une méthode applicable aux problèmes de même espèce. Je citerai comme exemple, dans la théorie des intégrales définies, l'introduction par Cauchy des chemins complexes d'intégration et, dans la théorie des nombres, l'introduction par Kummer de la notion des nombres idéaux. Cette façon d'arriver aux méthodes les plus générales est sans aucun doute la plus accessible et la plus sûre. En effet, celui qui chercherait des méthodes sans avoir devant les yeux un problème déterminé, chercherait le plus souvent en vain.

D'autre part, à mon avis du moins, la particularisation joue, dans les problèmes mathématiques, un rôle plus important que la généralisation. Quand nous cherchons en vain la réponse à une question, l'insuccès, la plupart du temps, tient peut-être à ce que nous n'avons pas encore résolu ou à ce que nous avons résolu seulement d'une manière incomplète des problèmes plus simples que celui en question. Tout revient alors à trouver ces problèmes plus simples et à en obtenir la solution, à l'aide de moyens auxiliaires aussi complets que possible et à l'aide de concepts susceptibles de généralisation. Cette manière de procéder est comme un levier des plus puissants propre à lever les difficultés mathématiques, et c'est de ce levier, ce me semble, que l'on se sert, même inconsciemment, la plupart du temps.

Il se peut aussi que l'on s'efforce d'obtenir une solution en se basant sur des hypothèses insuffisantes ou mal comprises et que, par suite, on ne puisse atteindre le but. Il s'agit alors de démontrer l'impossibilité de résoudre le problème en se servant d'hypothèses telles qu'elles ont été données ou interprétées. Les anciens nous ont donné les premiers exemples de pareilles démonstrations d'impossibilité ; ils ont démontré ainsi que dans un triangle rectangle isocèle l'hypoténuse et le côté de l'angle droit sont dans un rapport irrationnel. Dans la Mathématique moderne, la question de l'impossibilité de certaines solutions joue un rôle prépondérant ; c'est à ce point de vue de la démonstration de l'impossibilité que d'anciens et difficiles problèmes, tels que ceux de la démonstration de l'axiome des parallèles, de la quadrature du cercle et de la résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré, ont reçu une solution parfaitement satisfaisante et rigoureuse, bien qu'en un sens tout différent de celui qu'on cherchait primitivement.

Le fait remarquable dont nous venons de parler et certains raisonnements philosophiques ont fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je, que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la

[2]Leipzig, Teubner, 1 fasc. ; 1896.

nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution. Proposons-nous un problème déterminé non encore résolu par exemple, posons-nous la question de l'irrationnalité de la constante C d'Euler ou de Mascheroni, ou encore la question de savoir s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $2^n + 1$. Quelque inabordables que semblent ces problèmes, et quelque désarmés que nous soyons encore vis-à-vis d'eux aujourd'hui, nous n'en avons pas moins la conviction intime que l'on doit pouvoir les résoudre au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.

Cet axiome de la possibilité de résoudre tout problème, est-ce une propriété caractéristique et distinctive de la pensée mathématique, ou serait-ce peut-être une loi générale du mode d'existence de notre entendement, à savoir que toutes les questions que se pose notre entendement soient susceptibles d'être résolues par lui ? On rencontre d'ailleurs aussi dans d'autres sciences d'antiques problèmes qui ont été, de la manière la plus satisfaisante, finalement résolus par la démonstration de leur impossibilité et qui n'en ont pas moins été de la plus haute utilité pour le développement de la Science. Je rappellerai le problème du mouvement perpétuel. Après tant d'essais infructueux pour construire un mécanisme réalisant le mouvement perpétuel, on en vint à chercher les relations qui doivent avoir lieu entre les forces de la nature pour qu'un mouvement perpétuel soit impossible[3] ; ce problème inverse conduisit à la découverte du principe de la conservation de l'énergie, principe qui, de son côté, explique l'impossibilité du mouvement perpétuel au sens primitivement requis.

Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : *Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire : "Ignorabimus".*

Inépuisable est la multitude des problèmes de la Mathématique ; dès qu'une question est résolue, à sa place s'en présente une foule d'autres.

Dans ce qui suit je vais tenter, et cela comme preuve à l'appui de mes dires précédents, de proposer quelques problèmes déterminés pris dans diverses branches des Mathématiques, et dont l'étude pourrait concourir à l'avancement de la Science.

Jetons un regard sur les principes de l'Analyse et de la Géométrie. Les événements les plus suggestifs et les plus importants qui ont eu lieu dans ces domaines durant le dix-neuvième siècle sont, ce me semble, la conception arithmétique de la notion du continu que l'on trouve dans les travaux de Cauchy, Bolzano et Cantor, ainsi que la découverte de la Géométrie non euclidienne par Gauss, Bolyai, Lobalchefskij.

J'attirerai donc en premier lieu votre attention sur quelques problèmes appartenant à ces domaines.

Le texte ci-dessus est le début de l'exposé de David Hilbert au Congrès International des mathématiciens qui s'est tenu à Paris en 1900 ; à la suite de cette introduction est présentée par Hilbert la liste célèbre dite "des 23 problèmes mathématiques de 1900".

[3] *Comparez* HELMHOLTZ : *Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik*, Vortrag gehalten in Königsberg ; 1854.