Traduction d'un extrait du livre d'Harold Edwards au sujet de la fonction zeta de Riemann (Denise Vella-Chemla, novembre 2020)

1. Contexte historique de l'article

Ce livre est une étude de l'article de 8 pages qui a fait date de Bernhard Riemann “Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une certaine quantité,” [1]. et des développements ultérieurs de la théorie que cet article inaugura. Le premier chapitre est un examen et un élargissement de l'article lui-même, et les 11 chapitres restant sont consacrés au travail qui a été réalisé depuis 1859 sur les questions que Riemann a laissées sans réponse.

La théorie dont l'article de Riemann fait partie a eu ses débuts dans le théorème d'Euler, prouvé en 1737, que la somme des inverses des nombres premiers

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\dots \tag{1}$$

est une série divergente. Ce théorème va au-delà de l'ancien théorème d'Euclide énonçant qu'il y a une infinité de nombres premiers [E2] et montre que les nombres premiers sont plutôt *densément répartis* dans l'ensemble de tous les nombres entiers - plus densément que les carrés, par exemple, au sens où la somme des inverses des carrés converge.

Euler en fait va au-delà de l'énoncé initial de la divergence de (1) pour dire que puisque $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ diverge comme le logarithme et puisque la série (1) diverge comme [2] le logarithme de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$, la série (1) doit diverger comme le log du log, qu'Euler écrit [E4] ainsi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots=\log(\log\,\infty). \tag{2}$$

On ne sait pas de façon claire si Euler comprenait ce que cette équation signifiait - si par exemple, il la comprenait autrement que comme un moyen mnémotechnique - mais une interprétation évidente de cette équation serait

$$\sum_{p<x} 1/p \sim \log(\log\,x) \qquad (x \longrightarrow \infty), \tag{3}$$

où le côté gauche dénote la somme des $1/p$ pour tous les nombres premiers p inférieurs à x et où le signe $\sim$ signifie que l'erreur relative est arbitrairement petite pour x suffisamment grand, ou, ce qui est la même chose, que le rapport entre les deux côtés approche 1 lorsque $x \longrightarrow \infty$. Maintenant

$$\log(\log\,x)=\int_1^{\log\,x}\frac{du}{u}=\int_0^x\frac{dv}{v\log\,v}$$

ainsi (3) dit que l'intégrale de $1/v$ relativement à la mesure $dv/\log v$ diverge de la même manière que l'intégrale de $1/v$ relativement à la mesure qui assigne le poids 1 aux nombres premiers et le poids 0 aux autres points. En ce sens (3) peut être regardé en disant que la densité des nombres premiers est grossièrement $1/\log\,v$. Pourtant, il n'est pas évident qu'Euler pensait alors à la densité des nombres

1. Le titre allemand est *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Une traduction en anglais de cet article est fournie en appendice du livre de Harold Edwards *La fonction zeta de Riemann*.

2. Cela est vrai comme conséquence de la formule du produit d'Euler qui donne $\sum(1/n)=\prod(1-p^{-1})^{-1}$ (voir la section 1.2 [3]) ; par conséquent $\log\sum(1/n)=-\sum\log(1-p^{-1})=\sum(p^{-1}+\frac{1}{2}p^{-2}+\frac{1}{3}p^{-3}+\dots)=\sum(1/p)+$quelque chose qui converge.

premiers, et ses méthodes n'étaient pas adéquates pour prouver la formulation (3) de son énoncé (2).

Gauss stipule [4] dans une lettre [G2] écrite en 1849 qu'il avait observé aussi tôt qu'en 1792 ou 1793 que la densité des nombres premiers semble être en moyenne $1/\log x$ et il dit que chaque nouvelle table de nombres premiers qui a été publiée les années suivantes a eu tendance à confirmer sa confiance dans la précision de cette approximation. Pourtant, il ne mentionne pas la formule d'Euler (2) et il ne donne pas de base analytique pour l'approximation, qu'il présente seulement comme une observation empirique. Il donne, en particulier, la Table I.

TABLE I [5]

x	nombre de nbs premiers $< x$	$\int \frac{dn}{\log n}$	Différence
500 000	41 556	41 606.4	50.4
1 000 000	78 501	78 627.5	126.5
1 500 000	114 112	114 263.1	151.1
2 000 000	148 883	149 054.8	171.8
2 500 000	183 016	183 245.0	229.0
3 000 000	216 745	216 970.6	225.6

Gauss ne dit pas exactement ce qu'il veut dire par le symbole $\int (dn/\log n)$, mais les données fournies dans la Table II, empruntées à D.N. Lehmer [L9], indiqueraient qu'il voulait dire que n est une variable continue qu'on intègre de 2 à x, c'est-à-dire, $\int_2^x (dt/\log t)$. Noter que le comptage de Lehmer [6] des nombres premiers, qui peut sembler précis, diffère de l'information de Gauss et que la différence est en *faveur* de l'estimation de Gauss pour les grandes valeurs de x.

TABLE II [7]

x	nombre de nbs premiers $< x$	$\int_2^x \frac{dt}{\log t}$	Différence
500 000	41 538	41 606	68
1 000 000	78 498	78 628	130
1 500 000	114 155	114 263	108
2 000 000	148 933	149 055	122
2 500 000	183 072	183 245	173
3 000 000	216 816	216 971	155

Vers 1800, Legendre publie dans sa *Théorie des Nombres* [L11] une formule empirique pour le nombre de nombres premiers inférieurs à une valeur donnée qui correspond plus ou moins à la même assertion, notamment, que la densité des nombres premiers est $1/\log x$. Bien que Legendre ait fait quelques légères tentatives de prouver cette formule, ses arguments ne font rien de plus

4. Pour quelques éléments corroborant la déclaration de Gauss, voir la collection de ses travaux [G3].

5. de Gauss [G2].

6. Lehmer insiste sur le fait de compter 1 comme un nombre premier. Pour se conformer à l'usage commun, son comptage doit être réduit de 1 dans la Table II. (*note de la traductrice : les véritables valeurs pour $\pi(x)$ sont celles de la deuxième colonne de la table II*).

7. Données de Lehmer [L9].

qu'exprimer que si la densité des nombres premiers est supposée avoir la forme

$$1/(A_1x^{m_1} + A_2x^{m_2} + \ldots)$$

où $m_1 > m_2 > ...$, alors m_1 ne peut être positif [parce qu'alors la somme (1) convergerait] ; par conséquent, m_1 doit être "infiniment petit" et la densité doit être de la forme

$$1/(A \log x + B).$$

Il détermine alors A et B empiriquement. La formule de Legendre était bien connue dans le monde mathématique et a été très mentionnée par Abel [A2], Dirichlet [D3], et Chebyshev [C2] pendant la période 1800-1850.

Les premiers résultats significatifs dépassant ceux d'Euler furent obtenus par Chebyshev aux alentours de 1850. Chebyshev prouva que le terme d'erreur relative dans l'approximation

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \tag{4}$$

où $\pi(x)$ dénote le nombre de nombres premiers inférieurs à x, est inférieur à 11% pour tout x suffisamment grand ; c'est-à-dire qu'il a prouvé [8] que

$$(0.89) \int_2^x \frac{dt}{\log t} < \pi(x) < (1.11) \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

pour tout x suffisamment grand. Il a démontré, de plus, qu'aucune approximation de la forme de celle de Legendre

$$\pi(x) \sim x/(A \log x + B)$$

ne peut être meilleure que l'approximation (4) et que si le rapport de $\pi(x)$ à $\int_2^x (dt/\log t)$ approche une limite lorsque $x \longrightarrow \infty$, alors cette limite doit être 1. Il est clair que Chebyshev essayait de prouver que l'erreur relative dans l'approximation (4) s'approche de zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$, mais ce n'est qu'environ 50 années plus tard que ce théorème, qui est connu comme le "théorème des nombres premiers", a été démontré. Bien que le travail de Chebyshev ait été publié en France bien avant l'article de Riemann, Riemann ne fait pas référence à Chebyshev dans son article. Il fait référence à Dirichlet, pourtant, et Dirichlet, à qui le travail de Chebyshev était familier (voir le rapport de Chebyshev sur son voyage en Europe occidentale [C5, Vol. 5, p. 245 et p. 254-255]) aurait probablement parlé à Riemann du travail de Chebyshev. Les articles non publiés de Riemann contiennent plusieurs formules de Chebyshev, indiquant qu'il avait étudié le travail de Chebyshev, et contiennent au moins une référence directe à Chebyshev (voir Fig. 1).

La réelle contribution de l'article de Riemann de 1859 ne réside pas dans ses résultats mais dans ses méthodes. Le résultat principal est une formule [9] pour $\pi(x)$ comme somme d'une série infinie dans laquelle $\int_2^x (dt/\log t)$ est de loin le terme le plus grand. Pourtant, la preuve de Riemann de cette formule était inadéquate ; en particulier, il n'est même pas clair du tout, à partir des arguments de

8. Chebyshev n'énonça pas son résultat sous cette forme. Cette forme peut être obtenue de l'estimation du nombre de nombres premiers entre l et L (voir Chebyshev [C3, section 6]) en fixant l, en posant $L \longrightarrow \infty$, et en utilisant $\int_2^L (\log t)^{-1} dt \sim L/\log L$.

9. Voir la section 1.17 [10]. Noter que $Li(x) = \int_2^x (dt/\log t) +$ const.

Riemann que la série infinie pour $\pi(x)$ *converge*, et encore moins que son terme le plus grand la domine pour des grandes valeurs de x. D'un autre côté, les méthodes de Riemann, qui incluaient l'étude de la fonction $\zeta(s)$ comme fonction d'une variable complexe, l'étude des zéros complexes de $\zeta(s)$, l'inversion de Fourier, l'inversion de Möbius, et la représentation de fonctions comme $\pi(x)$ par des "formules explicites" telles que les séries infinies, tous ces éléments constituent des parties importantes du développement de la théorie qui a suivi.

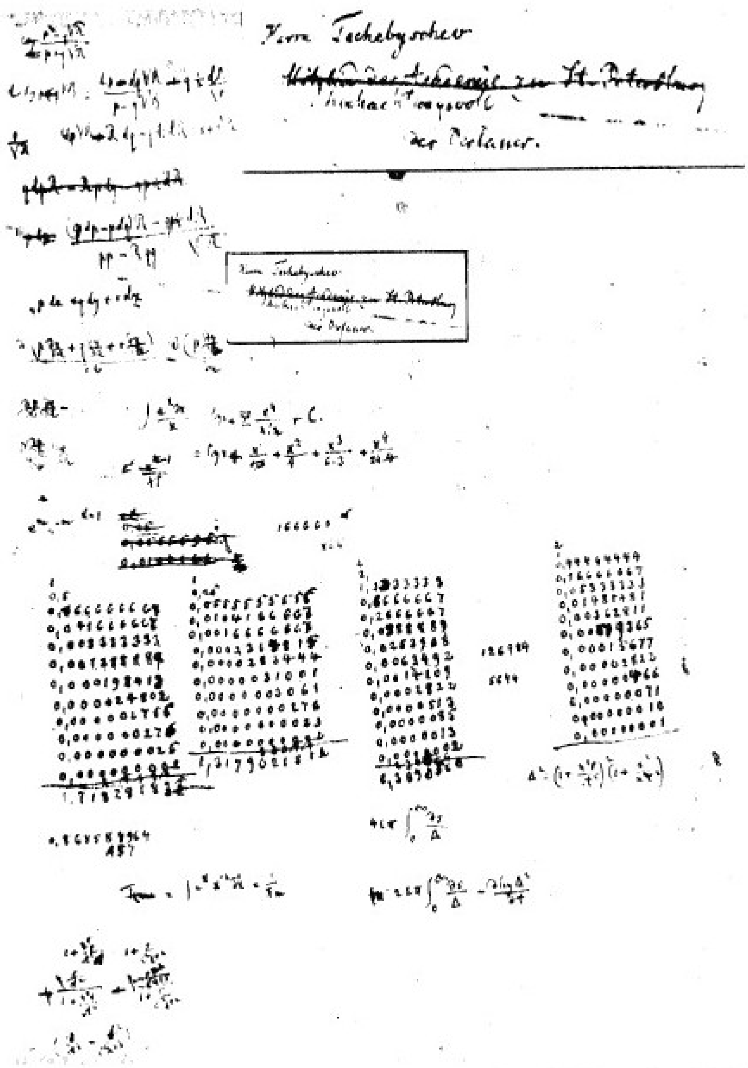

FIG. 1 : *Un papier brouillon utilisé pour tenir ensemble d'autres papiers perdus dans les papiers de Riemann. La note semble prouver que Riemann connaissait le travail de Chebyshev et avait l'intention de lui envoyer un exemplaire de son propre article. En toute vraisemblance, Riemann essayait de former avec son stylo des lettres romaines, plutôt que des lettres allemandes pour écrire une dédicace à Chebyshev.*
(Reproduit avec la permission du Niedersächsische Staats - et Universitätsbibliothek, Handschriftenabteilung, Göttingen.)

Les 30 premières années après que l'article de Riemann ait été publié, il n'y eut aucun progrès [11] à ce propos. C'est comme s'il avait fallu beaucoup de temps à la communauté mathématique pour digérer les idées de Riemann. Alors, en l'espace de moins d'une dizaine d'années, Hadamard, von

11. Une exception majeure à cette assertion est le théorème de Mertens [M5] en 1874 démontrant que (3) est vraie au sens fort que la différence entre les deux côtés approche une limite lorsque $x \longrightarrow \infty$, notamment, la constante

Mangoldt, et de la Vallée Poussin ont réussi à la fois à démontrer la formule principale de Riemann pour $\pi(x)$ et le théorème des nombres premiers (4), ainsi qu'un certain nombre de théorèmes connexes. Dans toutes ces preuves, les idées de Riemann étaient cruciales. Depuis ce temps, il n'y a eu ni pénurie de nouveaux problèmes ni pénurie de progrès en théorie des nombres, et la plupart de ces progrès ont été inspirés par les idées de Riemann.

Pour terminer, une discussion autour du contexte historique de l'article de Riemann ne serait pas complète sans mentionner l'hypothèse de Riemann. Au détour de l'article, Riemann dit qu'il considérait comme très vraisemblable que les zéros complexes de $\zeta(s)$ aient tous leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, mais qu'il était incapable de démontrer que c'était vrai.". Cette assertion que les zéros ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$ est maintenant connue comme l'"hypothèse de Riemann". L'expérience des successeurs de Riemann à propos de l'hypothèse de Riemann a été la même que celle de Riemann - ils considèrent aussi sa vérité comme vraisemblable et ils ont également été incapables de la démontrer. Hilbert a inclus le problème de prouver l'hypothèse de Riemann dans sa liste [H9] des problèmes non résolus les plus importants auxquels étaient confrontés les mathématiques en 1900, et la tentative de résoudre ce problème a occupé les plus grands efforts de nombreux mathématiciens parmi les meilleurs du vingtième siècle. Elle est maintenant indubitablement le problème le plus connu des mathématiques et elle continue d'attirer l'attention des meilleurs mathématiciens, non seulement parce qu'elle est restée si longuement non démontrée mais aussi parce que sa vulnérabilité est alléchante et parce que sa solution amènerait probablement la lumière sur de nouvelles techniques d'une grande importance.

2. La formule du produit d'Euler

Riemann prend comme point de départ la formule d'Euler :

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \tag{5}$$

Là, n parcourt l'ensemble des entiers positifs $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et p parcourt l'ensemble des nombres premiers $(p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$. Cette formule, maintenant connue comme la "formule du produit d'Euler", résulte du développement de chaque facteur du côté droit

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \frac{1}{(p^3)^s} + \ldots$$

et de l'observation que leur produit est une somme de termes de la forme

$$\frac{1}{(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r})^s},$$

où les $p_1, \ldots, p_r$, sont des nombres premiers distincts et $n_1, \ldots, n_r$, sont des entiers naturels, et alors en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique (tout entier peut être réécrit d'une

d'Euler plus $\sum_p [\log(1 - p^{-1}]$. Un autre énoncé peut-être plus naturel du théorème de Mertens est

$$\lim_{x\to\infty} \log x \prod_{p<x} (1 - p^{-1}) = e^{-\gamma},$$

où γ est la constante d'Euler. Voir, par exemple, Hardy et Wright [H7].

manière unique comme un produit de nombres premiers) de conclure que cette somme est simplement $\sum(1/n^s)$. Euler utilisait principalement cette identité formelle pour des valeurs entières de s (voir, par exemple, Euler [E5]).

Dirichlet aussi a basé son travail [12] dans ce domaine sur la formule du produit d'Euler. Puisque Dirichlet était l'un des professeurs de Riemann et puisque Riemann fait référence au travail de Dirichlet dans le premier paragraphe de son article, il est quasiment certain que l'utilisation par Riemann du produit eulérien a été influencée par Dirichlet. Dirichlet, contrairement à Euler, utilisait cette formule (5) avec s une variable réelle et également, contrairement à Euler, il démontra [13] rigoureusement que (5) est vraie pour tout réel $s > 1$.

On aurait naturellement attendu de Riemann, en tant que l'un des fondateurs de la théorie des fonctions d'une variable complexe, qu'il considère s comme une variable *complexe*. Il est facile de montrer que les deux côtés de la formule du produit d'Euler convergent pour s complexe dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1$, mais Riemann va plus loin et il montre que même si les deux côtés de (5) divergent pour d'autres valeurs de s, la fonction qu'ils définissent a du sens pour toute valeur de s excepté pour un pôle en $s = 1$. Cette extension du domaine de s nécessite quelques faits à propos de la fonction factorielle qui seront étudiés dans la prochaine section.

3. La fonction factorielle

Euler étend la fonction factorielle $n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$ des entiers naturels n à tous les nombres réels plus grands que -1 en observant que [14]

$$(6) \qquad n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(intégration par parties) et en observant que le côté droit converge pour les valeurs non entières de n, à la seule condition que $n > -1$. Gauss [G1] introduit la notation [15]

$$(7) \qquad \prod(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \qquad (s > -1)$$

pour l'intégrale d'Euler du côté droit de (6). Ainsi $\prod(s)$ est définie pour tout nombre réel s plus grand que -1, en fait pour tout nombre complexe s dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1$, et $\prod(s) = s!$ à chaque fois que s est un nombre naturel. Il y a une autre representation de $\prod(s)$ qui était aussi

12. Les contributions majeures de Dirichlet à la théorie ont été sa démonstration que si m et n sont premiers entre eux, alors la congruence $p \equiv m \ (mod\ n)$ a une infinité de soluttions qui sont des nombres premiers p. Il s'est aussi intéressé à des questions concernant la densité de la distribution des nombres premiers, mais il n'a pas connu de succès significatif à propos de ces questions.

13. Dirichlet [D3]. Puisque les termes p sont tous positifs, il n'y a rien de subtil ou difficile à propos de cette démonstration - c'est essentiellement un réordonnancement de série absolument convergente - mais cela a comme effet important de transformer (5) d'une identité formelle vraie pour des valeurs différentes de s en une formule analytique vraie pour tout réel $s > 1$.

14. Pourtant Euler écrivait l'intégrale en fonction de $y = e^{-x}$ ainsi $n! = \int_0^1 (\log 1/y)^x dy$ (voir Euler [E3]).

15. Malheureusement, Legendre ensuite introduisit la notation $\Gamma(s)$ pour $\prod(s-1)$. Les raisons de Legendre de considérer $(n-1)!$ plutôt que $n!$ sont obscures (peut-être pensait-il qu'il était plus naturel d'avoir un premier pôle qui advient en $s = 0$ plutôt qu'en $s = -1$) mais, quelle que soit la raison, sa notation prévalut en France et, vers la fin du dix-neuvième siècle, dans le reste du monde également. La notation originale de Gauss m'est toujours apparue plus naturelle et l'utilisation que Riemann en a fait me donne une occasion bienvenue de la réintroduire.

connue[16] d'Euler, notamment,

$$\prod(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1.2.\ldots N}{(s+1)(s+2)\ldots(s+N)}(N+1)^s. \tag{8}$$

Cette formule est valide pour tout s pour lequel (7) définit $\prod(s)$, c'est-à-dire, pour tout s dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > -1$. D'un autre côté, il n'est pas difficile de montrer [utiliser la formule (9) ci-dessous] que la limite (8) existe pour toutes les valeurs de s, réelles ou complexes, si la condition suffisante que le dénominateur soit non nul est vérifiée, c'est-à-dire si s est un entier non négatif. En bref, la formule (8) étend la définition de $\prod(s)$ à toutes les valeurs de s autres que $s = -1, -2, -3, \ldots$.

En plus du fait que les deux définitions (7) et (8) de $\prod(s)$ coïncident pour les réels $s > -1$, les faits suivants seront utilisés sans démonstration :

$$\prod(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-s}(n+1)^s}{s+n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}, \tag{9}$$

$$\prod(s) = s\prod(s-1), \tag{10}$$

$$\frac{\pi s}{\prod(s)\prod(-s)} = \sin \pi s, \tag{11}$$

$$\prod(s) = 2^s \prod\left(\frac{s}{2}\right)\prod\left(\frac{s-1}{2}\right)\pi^{-1/2}. \tag{12}$$

Pour des démonstrations de ces assertions, le lecteur est renvoyé à tout livre qui traite de la fonction factorielle ou "fonction Γ", par exemple, Edwards [E1, p. 421-425]. L'identité (9) est une simple reformulation de la formule (8). En l'utilisant, on peut démontrer que $\prod(s)$ *est une fonction analytique de la variable complexe s qui a des pôles simples en $s = -1, -2, -3, \ldots$. Elle n'a pas de zéro.* L'identité (10) est appelée l'"équation fonctionnelle de la fonction factorielle" ; avec $\prod(0) = 1$ [de (9)] elle permet d'obtenir immédiatement $\prod(n) = n!$. L'identité (11) est essentiellement la formule du produit pour le sinus ; quand $s = \frac{1}{2}$, elle se combine avec (10) pour fournir l'importante valeur $\prod(-\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$. L'identité (12) est connue comme la *relation de Legendre*. Elle est le cas $n = 2$ d'une identité plus générale

$$\frac{\prod(s)}{n^s\prod\left(\frac{s}{n}\right)\prod\left(\frac{s-1}{n}\right)\ldots\prod\left(\frac{s-n+1}{n}\right)} = \left[\frac{2\pi n}{(2\pi)^n}\right]^{1/2}$$

dont on n'aura pas besoin.

4. La fonction $\zeta(s)$

Il est intéressant de noter que Riemann ne parle pas de "prolongement analytique" de la fonction $\sum n^{-s}$ au-delà du demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1$, mais qu'il parle plutôt de trouver une formule pour elle qui "reste valide pour tout s." Cela indique qu'il voyait le problème plutôt en termes analogues à

16. Voir Euler [E3, E8].

l'extension de la fonction factorielle par la formule (8) de la section précédente, plutôt qu'à une extension morceau par morceau de la fonction à la manière dont le prolongement analytique est enseigné de nos jours. La vision du prolongement analytique par rapport à des suites de disques et de séries de puissances convergentes dans chaque disque de Weierstrass est assez antithétique de la philosophie de base de Riemann qui est qu'on devrait plutôt traiter les fonctions *globalement*, et non localement, par rapport aux séries de puissances.

Riemann dérive sa formule de $\sum n^{-s}$ qui "reste valide pour tout s" comme suit. La substitution de x par nx dans l'intégrale d'Euler pour $\prod(s-1)$ donne

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s} \qquad (s>0, n=1,2,3,...)$$

Riemann somme cela selon n et utilise $\sum_{n=1}^{\infty} r^{-s} = (r-1)^{-1}$ pour obtenir [17]

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \prod(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (s>1) \tag{13}$$

La convergence de l'intégrale impropre sur la gauche et la validité de l'échange de l'ordre de sommation et d'intégration ne sont pas difficiles à établir.

Ensuite il considère l'intégrale de contour

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$$

Les limites de l'intégration sont destinées à indiquer le chemin d'intégration qui commence en $+\infty$, va vers la gauche sous l'axe réel positif, entoure l'origine dans le sens positif (sens des aiguilles d'une montre), et retourne vers $+\infty$ au-dessus de l'axe réel. La définition de $(-x)^s$ est $(-x)^s = \exp[s\log(-x)]$, où la définition de $\log(-x)$ se conforme à la définition habituelle de $\log z$ pour z n'étant pas sur l'axe réel dans sa partie négative, comme la branche qui est réelle pour les réels positifs z ; ainsi $(-x)^s$ n'est pas défini sur l'axe réel positif et, en parlant strictement, le chemin d'intégration doit être pris légèrement au-dessus de l'axe réel lorsqu'il descend de $+\infty$ à 0 et légèrement en-dessous de l'axe réel lorsqu'il retourne de 0 à $+\infty$. Quand on écrit cette intégrale sous la forme

$$\int_{+\infty}^{\delta}\frac{(-x)^s dx}{(e^x-1)x} + \int_{|x|=\delta}\frac{(-x)^s dx}{(e^x-1)x} + \int_{\delta}^{+\infty}\frac{(-x)^s dx}{(e^x-1)x}$$

le terme du milieu est $2\pi i$ fois la valeur moyenne de $(-x)^s(e^x-1)^{-1}$ sur le cercle $|x|=\delta$ [parce que sur ce cercle $id\theta = (dx/x)$]. Par conséquent le terme du milieu approche de zéro lorsque $\delta \to 0$ quand $s>1$ [parce que $x(e^x-1)^{-1}$ n'est pas singulière près de $x=0$]. Les deux autres termes peuvent être combinés pour donner

$$\begin{aligned}\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^s}{(e^x-1)}.\frac{dx}{x} &= \lim\left\{\int_{+\infty}^{\delta}\frac{exp[s(\log x - i\pi)]dx}{(e^x-1)x} + \int_{\delta}^{\infty}\frac{exp[s(\log x - i\pi)]dx}{(e^x-1)x}\right\}\\ &= (e^{i\pi s}-e^{-i\pi s})\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}\end{aligned}$$

17. Cette formule, avec $s=2n$, apparaît dans un article [A1] d'Abel qui était inclus dans l'édition de 1839 de la collection des travaux d'Abel. Il semble très vraisemblable que Riemann ait pu avoir été au courant de cela. Une formule très similaire

$$\int_0^\infty (e^x-1)^{-1}e^{-x}x^\rho dx = \prod(\rho)\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1-\rho}$$

est le point de départ de l'article de 1848 de Chebyshev [C2].

qui se combine avec la formule précédente (13) pour donner

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x - 1)} \cdot \frac{dx}{x} = 2i \sin(\pi s) \prod(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ou, finalement, quand les deux côtés sont multipliés par $\prod(-s)s/2\pi is$ et l'identité (11) de la section précédente est utilisée,

$$\frac{\prod(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x - 1)} \cdot \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{14}$$

En d'autres mots, si $\zeta(s)$ est définie par la formule [18]

$$\zeta(s) = \frac{\prod(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x - 1)} \cdot \frac{dx}{x} \tag{15}$$

alors, pour des valeurs réelles de s supérieures à un, $\zeta(s)$ est égale à la fonction de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{16}$$

Pourtant, la formule (15) pour $\zeta(s)$ "reste valide pour tout s." En fait, puisque l'intégrale dans (15) converge clairement pour toutes les valeurs de s, réelles ou complexes (parce que e^x grossit plus vite que x^s lorsque $x \longrightarrow \infty$), et puisque la fonction qu'elle définit est analytique complexe (à cause du fait que la convergence est uniforme sur les domaines compacts), la fonction $\zeta(s)$ de (15) est définie et analytique en tout point, avec l'exception possible des points $s = 1, 2, 3, \ldots$, où $\prod(-s)$ a des pôles. Maintenant en $s = 2, 3, 4, \ldots$, la formule (16) montre que $\zeta(s)$ n'a pas de pôle [puisque l'intégrale dans (15) doit avoir un zéro qui élimine le pôle de $\prod(-s)$ en ces points, un fait qui découle également immédiatement du théorème de Cauchy), et en $s = 1$ la formule (16) montre que $\lim \zeta(s) = \infty$ lorsque $s \downarrow 1$, du fait que $\zeta(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ [puisque le pôle de $\prod(-s)$ est simple]. Par conséquent la *formule (15) définit une fonction $\zeta(s)$ qui est analytique en tout point du s-plan complexe excepté pour le pôle simple en $s = 1$*. Cette fonction coïncide avec $\sum n^{-s}$ pour les valeurs réelles de $s > 1$ et en fait, par prolongement analytique, partout sur le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1$.

La fonction $\zeta(s)$ est appelée fonction zeta de Riemann.

5. Valeurs de $\zeta(s)$

La fonction $x(e^x - 1)^{-1}$ est analytique près de $x = 0$; de ce fait, elle peut être développée en une série de puissances

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \tag{17}$$

valide à proximité de zéro [en fait, valide dans le disque $|x| < 2\pi$ qu'on étend aux singularités les plus proches $x = \pm 2\pi i$ de $x(e^x - 1)^{-1}$]. Les coefficients B_n du développement sont par définition

18. La formule est mal notée par les éditeurs des travaux de Riemann dans les notes ; ils mettent le facteur du mauvais côté de l'équation.

les *nombres de Bernoulli*, quelques-uns des premiers d'entre eux sont facilement déterminés comme étant égaux à

$$\begin{array}{ll} B_0 = 1, & B_1 = -\frac{1}{2}, \\ B_2 = \frac{1}{6}, & B_3 = 0, \\ B_4 = -\frac{1}{30}, & B_5 = 0 \\ B_6 = \frac{1}{42}, & B_7 = 0 \\ B_8 = -\frac{1}{30}, & B_9 = 0 \end{array}$$

Les nombres de Bernoulli impairs B_{2n+1} sont tous nuls [19] après les premiers, et les nombres de Bernoulli pairs B_{2n}, peuvent être successivement déterminés, mais il n'y a pas de formule de calcul simple pour eux. (Voir Euler [E6] pour une liste des valeurs de $(-1)^{n-1}B_{2n}$, jusqu'à B_{30}.).

Quand $s = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, le développement (17) peut être utilisé dans l'équation définissant $\zeta(s)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{-n}}{e^x - 1} . \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int_{|x|=\delta} \left(\sum_m \frac{B_m x^m}{m!} \right) \frac{(-x)^{-n}}{x} . \frac{dx}{x} \\ &= \sum_n \prod(n) \frac{B_m}{m!} (-1)^n . \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{m-n-1} d\theta \\ &= n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Riemann ne donne pas cette formule pour $\zeta(-n)$, mais il énonce la conséquence particulière $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \ldots = 0$. Il avait sûrement connaissance, pourtant, non seulement des valeurs [21]

$$\zeta(0) = -1/2, \qquad \zeta(-1) = -1/12, \qquad \zeta(-3) = 1/120, \text{ etc.},$$

qu'elle implique, mais également des valeurs

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \qquad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2.(2n)!} \tag{18}$$

qui avaient été trouvées par Euler [E6]. Il n'y a pas de moyen facile de déduire cette formule célèbre d'Euler de la formule intégrale de Riemann pour $\zeta(s)$ [(15) de la section 1.4 [22]] et cela peut

19. Cela peut être directement démontré en notant que $(-t)(e^{-t}-1)^{-1} + (-t/2) = (-te^t + t - t)(1-e^t)^{-1} - (t/2) = t(e^t-1)^{-1} + (t/2)$, c'est-à-dire que, $t(e^t-1)^{-1} + (t/2)$ est une fonction paire. Pour des preuves alternatives, voir les notes de la section 1.6 [20] et la formule (10) de la section 6.2.

21. Les éditeurs des travaux complets de Riemann donnent la valeur erronée $\zeta(0) = \frac{1}{2}$.

22. ici 4.

bien avoir été à nouveau ce problème de déduire (18) qui a amené Riemann à la découverte [23] de l'équation fonctionnelle de la fonction zeta qui fait l'objet de la section suivante.

6. Première démonstration de l'équation fonctionnelle

Pour les valeurs négatives réelles de s, Riemann évalue l'intégrale

$$\zeta(s) = \frac{\prod(-s)}{2\pi\, i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{19}$$

comme suit. Dénotons par D le domaine dans le plan complexe (ou s-plan) qui est constitué de tous les points autres que ceux qui sont à une distance ϵ de l'axe réel positif ou à une distance ϵ de l'une des singularités $x = \pm 2\pi in$ de l'intégrande de (19). Soit ∂D la frontière de D orientée selon le sens habituel. Alors, en ignorant pour le moment le fait que D n'est pas compact, le théorème de Cauchy donne

$$\frac{\prod(-s)}{2\pi\, i} \int_{\partial D} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} = 0 \tag{20}$$

Maintenant, un des composants de cette intégrale est l'intégrale (19) dont on inverse l'orientation, tandis que les autres sont les intégrales sur les cercles $|x \pm 2\pi in| = \epsilon$ orientés dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi, quand les cercles sont orientés dans le sens habituel des aiguilles d'une montre, (20) devient

$$-\zeta(s) - \sum \frac{\prod(-s)}{2\pi\, i} \int_{|x \pm 2\pi in| = \epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{21}$$

Les intégrales sur les cercles peuvent être évaluées en posant $x = 2\pi in + y$ pour $|y| = \epsilon$ pour trouver

$$\begin{aligned} \frac{\prod(-s)}{2\pi\, i} \int_{|y|=\epsilon} \frac{(-2\pi in - y)^s}{e^{2\pi in + y} - 1} \frac{dy}{2\pi in + y} &= \frac{\prod(-s)}{2\pi\, i} \int_{|y|=\epsilon} (-2\pi in - y)^{s-1} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \cdot \frac{dy}{y} \\ &= -\prod(-s)(-2\pi in)^{s-1} \end{aligned}$$

par la formule de l'intégrale de Cauchy. En calculant la somme sur tous les entiers n autres que $n = 0$ et en utilisant (21), on obtient alors

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod(-s)[(-2\pi in)^{s-1} + (2\pi in)^{s-1}] \\ &= \prod(-s)(2\pi)^{s-1}[i^{s-1} + (-i)^{s-1}] \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la simplification

$$\begin{aligned} i^{s-1} + (-i)^{s-1} &= \frac{1}{i}[e^{s \log i} - e^{s \log(-i)}] \\ &= \frac{1}{i}[e^{s\pi i/2} - e^{-s\pi i/2}] = 2 \sin \frac{s\pi}{2}, \end{aligned}$$

23. On trouve effectivement l'équation fonctionnelle dans les travaux d'Euler [E7] sous une forme légèrement différente, et il est complètement possible que Riemann l'ait trouvée là. (Voir également Hardy [H5, p. 23-26].) Dans tous les cas, Euler n'avait rien d'autre qu'une preuve empirique (!) de l'équation fonctionnelle et Riemann, à l'inverse de son rôle habituel, a fourni la première preuve rigoureuse d'une assertion qui avait été énoncée, mais non adéquatement démontrée, par quelqu'un d'autre.

on obtient la formule souhaitée

$$\zeta(s) = \prod(-s)(2\pi)^{s-1}2\sin(s\pi/2)\zeta(1-s). \tag{22}$$

La relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$ est connue comme l'*équation fonctionnelle de la fonction zeta.*

Pour prouver rigoureusement que (22) est vérifiée pour $s < 0$, il suffit de modifier l'argument ci-dessus en appelant D_n l'intersection de D avec le disque $|s| \leq (2n+1)\pi$ et de faire tendre $n \longrightarrow \infty$; alors l'intégrale (20) se décompose en deux parties, l'une étant une intégrale sur le cercle $|s| = (2n+1)\pi$ en effaçant les points à distance moindre d'ϵ de l'axe réel positif, et l'autre étant une intégrale dont la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$ est le côté gauche de (21). La première de ces deux parties s'approche de zéro parce que la longueur du chemin d'intégration est inférieure à $2\pi(2n+1)\pi$, parce que le facteur $(e^x - 1)^{-1}$ est borné sur le cercle $|s| = (2n+1)\pi$, et parce que le module de $(-x)^s/x$ sur le cercle est $|x|^{s-1} \leq [(2n+1)\pi]^{-s-1}$ pour $s \leq -\delta < 0$. Par conséquent, la seconde partie, qui par le théorème de Cauchy est l'opposée de la première partie, approche aussi de zéro, ce qui implique (21) et par conséquant (22).

Ceci complète la preuve de l'équation fonctionnelle (22) dans le cas $s < 0$. Pourtant, les deux côtés de (22) sont des fonctions analytiques de s, ainsi il suffit de démontrer (22) pour toutes les valeurs de s [excepté pour $s = 0, 1, 2, \ldots$, où [24] un ou plus des termes de (22) ont des pôles].

Pour $s = 1 - 2n$, l'équation fonctionnelle plus l'égalité

$$\zeta(-(2n-1)) = (-1)^{2n-1}\frac{B_{2n}}{2n}$$

de la section précédente donne

$$(-1)^{2n-1}\frac{B_{2n}}{2n} = \prod(2n-1)(2\pi)^{-2n}2(-1)^s\zeta(2n)$$

et par conséquent, la formule célèbre d'Euler pour $\zeta(2n)$ [(18) de la section 1.5 [25]].

Riemann utilise deux des identités de base de la fonction factorielle [(11) et (12) de la section 1.3 [26]] pour réécrire l'équation fonctionnelle (22) sous la forme

$$\zeta(s) = \pi^{-1/2}2^{-s}\prod\left(-\frac{s}{2}\right)\prod\left(-\frac{s+1}{2}\right)2^s\pi^{s-1}\frac{\pi s/2}{\prod\left(\frac{s}{2}\right)\prod\left(-\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s)$$

et par conséquent sous la forme

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \prod\left(\frac{1-s}{2}-1\right)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s). \tag{23}$$

En d'autres termes, alors, *la fonction sur le côté gauche de (23) est inchangée par la substitution* $s = 1 - s$.

24. Quand $s = 2n+1$, le fait que $\zeta(s)$ n'ait pas de pôle en $2n+1$ implique, puisque $\prod$ a un pôle en $-2n-1$ et puisque $\sin(s\pi/2)$ n'a pas de zéro en $2n+1$, cela implique, donc, que $\zeta(-2n) = 0$ et par conséquent, par la formule pour $\zeta(-2n)$ de la section précédente, cela implique que les nombres impairs de Bernoulli $B_3, B_5, B_7, \ldots$ sont tous nuls.

25. ici 5.

26. ici 3.

Riemann semble considérer cette assertion symétrique (23) comme l'assertion naturelle de l'équation fonctionnelle, parce qu'il donne [27] une preuve alternative qui montre cette symétrie d'une manière plus satisfaisante. Cette seconde preuve est fournie dans la prochaine section.

7. Seconde démonstration de l'équation fonctionnelle

Riemann observe d'abord que le changement de variable $x = n^2\pi x$ dans l'intégrale d'Euler pour $\prod(s/2-1)$ donne

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right) = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{s/2}\frac{dx}{x} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

Calculer la somme selon n donne

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{s/2}.\frac{dx}{x} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1) \tag{24}$$

où [28] $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} exp(-n^2\pi x)$. La forme symétrique de l'équation fonctionnelle est l'assertion selon laquelle la fonction (24) est inchangée par la substitution $s = 1 - s$. Pour prouver directement que l'intégrale du côté droit de (24) est inchangée par la substitution, Riemann utilise l'*équation fonctionnelle de la fonction theta* sous une forme empruntée à Jacobi [29], notamment, sous la forme

$$\frac{1+2\psi(x)}{1+2\psi(1/x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{25}$$

[Puisque $\psi(x)$ approche de zéro très rapidement lorsque $x \longrightarrow \infty$, cela montre en particulier que $\psi(x)$ est comme $\frac{1}{2}(x^{-1/2}-1)$ pour x proche de zéro et par conséquent, que l'intégrale du côté droit de (24) est convergente pour $s > 1$. Une fois que ceci a été établi, la validité de (24) pour $s > 1$ peut être prouvée par un argument élémentaire en utilisant la convergence absolue pour justifier l'échange entre sommation et intégration.] En utilisant (25), Riemann reformule l'intégrale du côté droit de (24) en

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi(x)x^{s/2}\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2}.\frac{dx}{x} - \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-s/2}.\frac{dx}{x} \\
&= \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2}.\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \left[x^{1/2}\psi(x) + \frac{x^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right]x^{-s/2}\frac{dx}{x} \\
&= \int_1^\infty \psi(x)[x^{s/2}+x^{(1-s)/2}]\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty [x^{-(s-1)/2} - x^{-s/2}]\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Maintenant $\int_1^\infty x^{-s}(dx/x) = 1/a$ pour $a > 0$ et donc la seconde intégrale est

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-1)2} - \frac{1}{s/2}\right] = \frac{1}{s(s-1)}$$

27. Puisque la seconde démonstration rend la première preuve complètement non nécessaire, on peut se demander pourquoi Riemann a tout de même inclus la première preuve. Peut-être la première preuve montre-t-elle l'argument par lequel il a découvert initialement l'équation fonctionnelle ou peut-être montre-t-elle certaines propriétés qui ont été importantes dans la compréhension de ζ par Riemann.

28. Cette fonction $\psi(x)$ n'a absolument rien à voir avec la fonction $\psi(x)$ qui apparaît dans le Chapitre 3.

29. Riemann fait référence à la section 65 du traité de Jacobi "Fundmenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum". Bien que la formule nécessaire ne soit pas explicitement fournie là, Jacobi ailleurs [J1] montre comment la formule souhaitée découle de la formule (6) de la section 65. Jacobi attribue la formule à Poisson. Pour une démonstration de la formule, voir la section 10.4.

pour $s > 1$. Par conséquent, pour $s > 1$, la formule

$$(26) \qquad \prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)[x^{s/2}+x^{(1-s)/2}]\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}$$

est vérifiée. Mais, parce que $\psi(x)$ décroît plus rapidement que toute puissance de x lorsque $x \longrightarrow \infty$, l'intégrale dans cette formule converge pour tout [30] s. Puisque les deux côtés sont analytiques, la même équation est vérifiée pour tout s. Parce que le côté droit est trivialement inchangé par la substitution $s = 1 - s$, l'équation fonctionnelle de la fonction zeta est démontrée.

8. La fonction $\xi(s)$

La fonction $\prod((s/2)-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$, qui apparaît dans la forme symétrique de l'équation fonctionnelle, a des pôles en $s = 0$ et $s = 1$. [Cela découle immédiatement de (26) de la section précédente.] Riemann la multiplie par $s(s-1)/2$ et définit [31]

$$(27) \qquad \xi(s) = \prod(s/2)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s).$$

Alors $\xi(s)$ est une fonction entière - c'est-à-dire une fonction analytique de s qui est définie pour toutes les valeurs de s - et l'équation fonctionnelle de la fonction zeta est équivalente à $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Riemann dérive alors la représentation suivante de $\xi(s)$. L'équation (26) de la section précédente donne

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \psi(s)(x^{s/2}+x^{(1-s)/2})\frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left\{\psi(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2}+\frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]\right\}dx \\
&\qquad + \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \psi'(x)\left[\frac{x^{s/2}}{s/2}+\frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right]dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2}\psi(1)\left[\frac{2}{s}+\frac{2}{1-s}\right] + \int_1^\infty \psi'(x)[(1-s)x^{s/2}+sx^{(1-s)/2}]dx \\
&= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^\infty x^{3/2}\psi'(x)[(1-s)x^{[(s-1)/2]-1}+sx^{-(s/2)-1}]dx \\
&= \frac{1}{2} + \psi(1) + \int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\psi'(x)(-2x^{(s-1)/2}-2x^{-s/2})]dx \\
&\qquad - \int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\psi'(x)][(-2x^{(s-1)/2}-2x^{-s/2})]dx
\end{aligned}$$

30. Noter que cela fournit, de plus, une autre formule pour $\zeta(s)$ qui est "valide pour tout s" autre que $s = 0, 1$; c'est-à-dire que cela donne une preuve alternative du fait que $\zeta(s)$ peut être prolongée analytiquement.

31. Riemann utilise effectivement la lettre ξ pour dénoter la fonction que l'on note désormais habituellement Ξ, c'est-à-dire, la fonction $\Xi(t) = \xi(\frac{1}{2}+it)$, où ξ est définie comme ci-dessus. Je suivrai Landau, et presque tous les rédacteurs qui vinrent ensuite, en rejetant le changement de variable de Riemann $s = \frac{1}{2}+it$ dans la formule (27) comme introduisant potentiellement de la confusion. En fait, il y a des raisons de croire que Riemann éprouvait de la confusion par rapport à cette formule [voir les remarques concernant $\xi(0)$ dans la section 1.16 [32]].

$$= \frac{1}{2} + \psi(1) - \psi\,'(1)[-2-2]$$
$$+ \int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\psi\,'(x)](2x^{(s-1)/2} + 2x^{-s/2})dx.$$

Maintenant la différentiation de

$$2\psi(x) + 1 = x^{-1/2}[2\psi(1/x) + 1]$$

donne aisément

$$\tfrac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) = 0,$$

et utiliser cela permet de mettre la formule sous la forme finale suivante

$$\xi(s) = 4\int_1^\infty \frac{d[x^{3/2}\psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cosh\left[\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\log\, x\right] dx \tag{28}$$

ou, comme l'écrit Riemann,

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = 4\int_1^\infty \frac{d[x^{3/2}\psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cos\left(\frac{t}{2}\log x\right) dx.$$

Si $\cosh[\frac{1}{2}(s - \frac{1}{2})\log x]$ est développé comme habituellement en série de puissance par

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \sum y^{2n}/(2n)!,$$

la formule (28) montre que

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^\infty a_{2n}\left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n} \tag{29}$$

où

$$a_{2n} = 4\int_1^\infty \frac{d[x^{3/2}\psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \frac{\left(\frac{1}{2}\log\, x\right)^{2n}}{(2n)!} dx.$$

Riemann énonce que cette représentation en série de $\xi(s)$ qui est une fonction paire de $s - \frac{1}{2}$ "converge très rapidement," mais il ne donne pas d'estimation explicite et il ne dit pas quel rôle cette série joue dans les assertions qu'il fait ensuite.

Les deux paragraphes qui découlent de la formule (28) pour $\xi(s)$ constituent la portion la plus difficile de l'article de Riemann. Leur but est essentiellement de démontrer que $\xi(s)$ peut être développée en un produit infini

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \tag{30}$$

où ρ parcourt [33] les racines de l'équation $\xi(\rho) = 0$. Maintenant, n'importe quel *polynôme* $p(s)$ peut être développé comme un produit fini $p(s) = p(0)\prod_\rho[1 - (s/\rho)]$, où ρ parcourt les racines de l'équation $p(\rho) = 0$ [excepté que la formule du produit pour $p(s)$ est légèrement différente si $p(0) = 0$] ; par conséquent, la formule du produit (30) énonce que $\xi(s)$ est *comme un polynôme*

33. Ici, et dans de nombreuses formules dans le reste de ce livre dans lesquelles interviennent des sommes ou des produits sur les racines ρ, on comprend les racines multiples - s'il y en a - comme étant comptées avec multiplicités.

de degré infini. (De façon similaire, Euler pensait à $\sin x$ comme à un “polynôme de degré infini” quand il conjectura, et finalement démontra, la formule

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (x/n)^2].).$$

D'un autre côté, l'assertion que la série (29) converge “très rapidement” est aussi une assertion que $\xi(s)$ est comme un polynôme de degré infini - un nombre fini de termes donne une très bonne approximation dans n'importe quelle partie finie du plan. Ainsi, il y a une relation entre la série (29) et la formule produit (30) - en fait, c'est précisément la décroissance rapide des coefficients a_n dont Hadamard (en 1893) a prouvé qu'elle était nécessaire et suffisante pour la validité de la formule du produit mais les étapes de l'argument par lequel Riemann est parvenu de l'une à l'autre sont obscurs, c'est le moins que l'on puisse dire.

La prochaine section contient une discussion au sujet de la distribution des racines ρ de $\xi(\rho) = 0$, et la section suivante reviendra à la discussion concernant la formule produit pour $\xi(s)$.

9. Les racines ρ de ξ

Pour prouver la convergence du produit $\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}[1 - (s/\rho)]$, Riemann avait besoin, bien sûr, de rechercher la distribution des racines ρ of $\xi(\rho) = 0$. Il commença par observer que la formule du produit d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{\rho} (1 - p^{-s})^{-1} \qquad (\text{Re s} > 1)$$

montre immédiatement que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$ (parce qu'un produit infini convergent ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul). Puisque $\xi(s) = \prod(s/2)s - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ et puisque les facteurs autres que $\zeta(s)$ ont un seul zéro simple en $s = 1$, il s'ensuit qu'aucune des racines ρ de $\xi(\rho) = 0$ ne se trouve dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$. Puisque $1 - \rho$ est une racine si et seulement si ρ en est une, cela implique qu'aucune des racines ne peut être dans le demi-plan $\operatorname{Re} s < 0$ non plus, et par conséquent que *toutes les racines ρ de $\xi(\rho) = 0$ sont dans la bande* $0 \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$.

Il continue en disant que le nombre de racines ρ dont la partie imaginaire est entre 0 et T est approximativement égal à

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \tag{31}$$

et que l'erreur relative [34] dans cette approximation est d'un ordre de grandeur de $1/T$. Sa “preuve” de cela est simplement que le nombre de racines dans cette région est égale à l'intégrale de $\xi'(s)ds/2\pi i\xi(s)$ autour de la frontière du rectangle ($0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im} s \leq T$ et que cette intégrale est égale à (31) avec une erreur relative égale à T^{-1}. Malheureusement, il ne donne aucun indice ou quoi que ce soit de la méthode qu'il a utilisée pour estimer l'intégrale. Il était lui-même un maître en évaluation et estimation d'intégrales définies (voir, par exemple, les sections 1.14 [35] ou 7.4) et il est possible qu'il ait supposé que ses lecteurs seraient capables de retrouver ses propres estimations de cette intégrale, mais dans un tel cas, il se trompait ; c'est seulement en 1905 que von

34. Titchmarsh, dans une malheureuse erreur qu'il ne corrigea pas pendant les 21 années entre la publication de ses deux livres sur la fonction zeta, ne réussit pas à réaliser que Riemann voulait parler de l'erreur *relative* et croyait que Riemann avait fait une erreur à cet endroit-là. Voir Titchmarsh [T8, p. 213].

35. ici 14.

Mangoldt a réussi à démontrer que l'estimation de Riemann était correcte (voir la section 6.7).

L'assertion suivante de Riemann est encore plus déconcertante. Il énonce que le nombre de racines *sur la droite* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ est aussi "environ" (31). Il ne donne pas de précision sur le sens selon lequel cette approximation est vraie, mais on suppose généralement qu'il voulait dire que l'erreur relative dans l'approximation du nombre de zéros de $\xi(\frac{1}{2} + it)$ pour $0 \leq t \leq T$ par (31) approche zéro lorsque $T \longrightarrow \infty$. Il ne fournit aucune indication de preuve du tout, et personne depuis Riemann n'a été capable de prouver (ou réfuter) cette assertion. Il a été démontré en 1914 que $\xi(\frac{1}{2} + it)$ a une infinité de racines réelles (Hardy [H3]), en 1921 que le nombre de racines réelles entre 0 et T est au moins KT pour une constante positive K et pour un T suffisamment grand (Hardy et Littlewood [H6]), en 1942 que ce nombre est en fait au moins $KT \log T$ pour un certain nombre positif K et toutes les grandes valeurs de T (Selberg, [S1], et en 1914 que le nombre de racines complexes t de $\xi(\frac{1}{2} + it) = 0$ dans le domaine $\{0 \leq \operatorname{Re} t \leq T, -\epsilon \leq \operatorname{Im} t \leq \epsilon)$ est égal, pour tout $\epsilon > 0$, à (31) avec une erreur relative qui approche zéro lorsque $T \longrightarrow \infty$ (Bohr et Landau, [B8]). Pourtant, ces résultats partiels sont encore loin de l'assertion originale de Riemann. Nous pouvons simplement deviner ce qui se cache derrière cette assertion (voir Siegel [S4 p. 67], Titchmarsh [T8, p. 213-214], ou la section 7.8 de ce livre), mais nous savons que cela a amené Riemann à conjecturer une assertion encore plus forte, notamment que toutes les racines sont sur la droite des nombres pour lesquels $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Ceci est bien sûr la célèbre "hypothèse de Riemann." Il dit qu'il considère comme "très vraisemblable" que toutes les racines soient sur la droite des nombres s tels que $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, mais dit qu'il n'a pas été capable de le démontrer (ce qui semble impliquer qu'incidemment, il avait le sentiment qu'il avait des preuves rigoureuses des deux autres assertions précédentes). Puisque cela n'était pas nécessaire à son but principal, qui est la preuve de la formule sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, il laisse simplement ce sujet là - où il est resté depuis - et se dirige vers la formule du produit pour $\xi(s)$.

10. La représentation par un produit de $\xi(s)$

Un thème récurrent dans le travail de Riemann est la *caractérisation globale des fonctions analytiques par leurs singularités*[36]. Puisque la fonction $\log \xi(s)$ a des singularités logarithmiques aux racines ρ de $\xi(s)$ et aucune autre singularité, elle a les mêmes singularités que la somme formelle

(32) $$\sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

Par conséquent, si cette somme converge et si la fonctino qu'elle définit dans un certain sens se comporte aussi bien à proximité de l'∞ que le fait la fonction $\log \xi(s)$, alors il devrait s'ensuivre de cela que la somme (32) diffère de $\log \xi(s)$ par au plus une constante additive ; poser $s = 0$ fournit la valeur $\log \xi(0)$ pour cette constante et ainsi l'exponentiation donne

(33) $$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

36. Voir, par exemple, la leçon inaugurale, spécialement l'article 20 (Œuvres, p. 37-39) ou la partie 3 de l'introduction à l'article "Théorie des fonctions d'Abel", qui est intitulée "Détermination d'une fonction d'une variable complexe par les valeurs limites et les singularités [R1]." Voir aussi l'introduction de Riemann à l'article XI de la collection de ses travaux, quand il écrit "... notre méthode, qui est basée sur la détermination des fonctions au moyen de leurs singularités" (*Unstetigkeiten und Unendlichwerden*)... [R1]." Finalement, voir Ahlfors [A3], la section à la fin intitulée "le point de vue de Riemann."

comme désiré. C'est essentiellement la preuve de la formule du produit (33) que Riemann esquisse.

Il y a deux problèmes associés avec la somme (32). Le premier est la détermination des parties imaginaires des logarithmes qu'elle contient. Riemann passe par-dessus ce point sans commentaire et en effet, ce n'est pas un problème très sérieux. Pour tout s fixé, l'ambiguïté de la partie imaginaire de $\log[1-(s/\rho)]$ disparaît pour de grandes valeurs de ρ ; par conséquent, la somme (32) est définie excepté pour un multiple (fini) de $2\pi i$ qui disparaît quand on exponentie (33). De plus, on peut ignorer toutes les parties imaginaires ensemble ; les parties réelles des termes de (32) sont définies sans ambiguïté et leur somme est une fonction harmonique qui diffère de $\mathrm{Re}(\log\xi(s))$ par une fonction harmonique sans singularités, et si on peut montrer que cette fonction différence est constante, il s'ensuivra que son conjugué harmonique sera constant aussi.

Le second probème associé à la somme (32) est celui de sa convergence. C'est en fait une somme conditionnellement convergente, et l'*ordre* de la série doit être spécifié pour que la somme soit bien déterminée. Pour le dire grossièrement, l'ordre naturel des termes serait l'ordre croissant des $|\rho|$, ou peut-être l'ordre décroissant des $|\rho-\frac{1}{2}|$ mais spécifiquement, cela suffit seulement à stipuler que chaque terme est apparié avec son "jumeau" $\rho \leftrightarrow 1-\rho$,

$$\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\log\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right)\right], \tag{34}$$

parce que cette somme converge absolument. La preuve de l'absolue convergence de (34) se fait grossièrement comme suit.

Pour prouver l'absolue convergence de

$$\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\log\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right)\right]=\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\log\left[1-\frac{s(1-s)}{\rho(1-\rho)}\right],$$

il suffit de prouver l'absolue convergence de

$$\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\frac{1}{\rho(1-\rho)}. \tag{35}$$

(En d'autres termes, pour prouver l'absolue convergence d'un produit $\prod(1+a_t)$, il suffit de prouver l'absolue convergence de la somme $\sum a_t$,) Mais l'estimation de la distribution des racines ρ donnée dans la section précédente indique que leur densité est grossièrement

$$d\left(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}dT.$$

Par conséquent

$$\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\frac{1}{\rho(1-\rho)}\sim\int^{\infty}\frac{1}{T^2}\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}dT<\infty,$$

ou, en résumé, les termes sont comme T^{-2} et leur densité est comme $\log T$ et donc leur somme converge. Comme cela sera vu au chapitre 2, la seule difficulté sérieuse pour obtenir cette preuve rigoureuse de l'absolue convergence de (34) est la preuve que la densité verticale des racines ρ est dans un certain sens une constante fois $\log(T/2\pi)$. Riemann énonce seulement ce fait sans preuve.

Riemann continue alors en disant que la fonction définie par (34) grandit seulement aussi vite que $s\log s$ pour de grandes valeurs de s ; par conséquent, parce qu'elle diffère de $\log \xi(s)$ par une fonction paire de $s-\frac{1}{2}$ [et parce que $\log \xi(s)$ aussi grandit comme $s\log s$ pour des grandes valeurs de s], cette différence doit être constante parce qu'elle ne peut contenir de termes en $(s-\frac{1}{2})^2(s-\frac{1}{2})^4, \ldots$. On montrera au chapitre 2 que les étapes de cette argumentation peuvent toutes être réalisées plus ou moins comme Riemann l'indique, mais il doit être admis que l'esquisse de Riemann est si abrégée que cela peut la rendre inutile si le but est de construire une preuve de (33).

La première preuve de la représentation par produit (33) de $\xi(s)$ a été publiée par Hadamard [H1] en 1893.

11. Le lien reliant $\zeta(s)$ et les nombres premiers

L'essence de la relation entre $\zeta(s)$ et les nombres premiers est la formule du produit d'Euler

(36) $$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

dans laquelle le produit sur la droite est calculé pour tous les nombres premiers p. Prendre le log des deux côtés et utiliser la série $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ permet de mettre cela sous la forme

$$\log \zeta(s) = \sum_p \left[\sum_n (1/n)p^{-ns}\right] \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

Puisque la double série sur la droite est absolument convergente pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, l'ordre de sommation n'importe pas et la somme peut simplement s'écrire

(37) $$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_n (1/n)p^{-ns} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

Il sera pratique dans ce qui suit d'écrire cette somme comme une intégrale de Stieltjes

(38) $$\log \zeta(s) = \int_0^\infty x^{-s} dJ(x) \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

où $J(x)$ est [37] la fonction qui commence à 0 pour $x = 0$ et s'accroît par saut de 1 à chaque nombre premier p, par un saut de $\frac{1}{2}$ à chaque carré de nombre premier p^2, par un saut d'$\frac{1}{3}$ à chaque cube de nombre premier, etc. Comme cela est habituel dans la théorie des intégrales de Stieltjes, la valeur de $J(x)$ à chaque saut est définie comme étant à exacte distance entre sa nouvelle et son ancienne valeur. Ainsi $J(x)$ est égal à zéro pour $0 \le x < 2$, est égal à $\frac{1}{2}$ pour $x = 2$, vaut 1 pour $2 < x < 3$, vaut $1\frac{1}{2}$ pour $x = 3$,vaut 2 pour $3 < x < 4$, vaut $2\frac{1}{4}$ pour $x = 4$, vaut $2\frac{1}{2}$ pour $4 < x < 5$, vaut 3 pour $x = 5$, vaut $3\frac{1}{2}$ pour $5 < x < 7$, etc. Une formule pour $J(x)$ est

$$J(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \le x} \frac{1}{n}\right].$$

Riemann n'avait pas, bien sûr, le vocabulaire de l'intégration de Stieltjes à sa disposition et il énonça (38) d'une manière un peu différente

(39) $$\log \zeta(s) = s\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx \qquad (\mathrm{Re\ s} > 1)$$

37. Riemann dénote cette fonction $f(x)$, et la plupart des autres rédacteurs la dénotent $\prod(x)$. Puisque $f(x)$ est maintenant utilisé pour dénoter une fonction générique et puisque $\prod(x)$ dans ce livre dénote la fonction factorielle, j'ai pris la liberté d'introduire une nouvelle notation $J(x)$ pour cette fonction.

que l'on peut obtenir à partir de (38) par une intégration par parties. [Lorsque $x \downarrow 0$, clairement $x^{-s}J(x) = 0$ parce que $J(x) \equiv 0$ pour $x < 2$. D'un autre côté, $J(x) < x$ pour tout x, ainsi $x^{-s}J(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ pour $\operatorname{Re} s > 1$.] L'intégrale dans (39) peut être considérée comme étant une intégrale ordinaire de Riemann et la formule elle-même peut être dérivée sans utiliser l'intégration de Stieltjes en posant

$$p^{-ns} = s\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}dx \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

dans (37), qui est ce que Riemann dérive de (39).

Les formules (37)-(39) devraient toutes être pensées comme étant des variations mineures de la formule du produit d'Euler (36) qui est l'idée de base reliant $\zeta(s)$ et les nombres premiers.

12. L'inversion de Fourier

Riemann était un maître de l'analyse de Fourier et son travail pour le développement de cette théorie doit certainement être compté parmi ses plus grandes contributions aux mathématiques. Il n'est pas surprenant, alors, qu'il applique immédiatement l'inversion de Fourier à la formule

$$\text{(40)} \qquad \frac{\log\,\zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

pour conclure

$$\text{(41)} \qquad J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log\,\zeta(s)x^s\frac{ds}{s} \qquad (a > 1).$$

Alors en utilisant une formule alternative pour $\log\zeta(s)$, il obtient une formule alternative pour $J(x)$ qui est le résultat principal de l'article.

[L'intégrale impropre dans (41) est seulement convergente de façon conditionnelle et un "ordre pour la sommation" doit être spécifié. Ici on comprend que l'intégrale dans (41) signifie la limite lorsque $T \longrightarrow \infty$ de l'intégrale sous le segment de ligne vertical de $a - iT$ à $a + iT$. Plus généralement, les intégrales convergentes de façon conditionnelle et les séries sont très habituelles en analyse de Fourier, et on comprend toujours que de telles intégrales sont sommées dans l'"ordre naturel" ; par exemple,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \text{signifie} \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{iyx}dy \quad \text{signifie} \quad \lim_{T\to\infty} f(y)e^{iyx}dy,$$

etc. Ceci est analogue à la convention que les fonctions discontinues comme $J(x)$ sont supposées prendre la valeur médiane $J(x) = \frac{1}{2}[J(x-\epsilon) + J(x+\epsilon)]$ en tout saut x, que les intégrales divergentes telles que $\operatorname{Li}(x)$ (voir plus loin la section 1.14[38]) sont supposées prendre la valeur principale de Cauchy, et que le produit $\prod(1-(s/\rho)]$ est ordonné de telle façon à apparier ρ avec $1-\rho$, ou, plus loin encore, ordonné selon $|\operatorname{Im}\rho|$.]

38. ici 14.

En dérivant (41) de (40), Riemann utilise le “théorème de Fourier”, par lequel il veut dire [39] la formule d’inversion de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)e^{i(x-\lambda)\mu}d\lambda\right]d\mu \tag{42}$$

Dit autrement, le “théorème de Fourier” est l’assertion telle que pour écrire une fonction donnée $\phi(x)$ comme une superposition d’exponentielles

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\mu)e^{i\mu x}d\mu$$

il est nécessaire et suffisant (sous certaines conditions adéquates) que les “coefficients” $\Phi(\mu)$ de l’expansion soient définis par

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)e^{-i\lambda\mu}d\lambda$$

Cet énoncé du théorème de Fourier amène l’analogie avec les séries de Fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \iff a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)e^{-in\lambda}d\lambda,$$

et en fait, le théorème (42) des intégrales de Fourier découle formellement d’un passage à la limite dans le théorème pour les séries de Fourier.

Pour dériver (41) de (40), posons $s = a + i\mu$, où a est une constante $a > 1$ et μ est une variable réelle, posons $\lambda = \log x$, et posons $\phi(x) = 2\pi J(e^x)e^{-ax}$. Alors (40) devient

$$\begin{aligned}\frac{\log\,\zeta(a+i\mu)}{a+i\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} J(e^{\lambda})e^{-(a+i\mu)\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)e^{-i\mu\lambda}d\lambda \qquad (a>1)\end{aligned}$$

et quand cette fonction est prise comme étant $\Phi(\mu)$, le théorème de Fourier donne

$$\begin{aligned}2\pi J(e^x)e^{-ax} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\,\zeta(a+i\mu)}{a+i\mu}e^{i\mu x}d\mu \\ J(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\zeta(a+i\mu)}{a+i\mu}y^{a+i\mu}d\mu,\end{aligned}$$

de quoi (41) découle immédiatement.

Riemann ignore complètement la question de l’applicabilité du théorème de Fourier à la fonction $J(e^x)e^{-ax}$ et énonce simplement que (41) est valide en “toute généralité”. Pourtant, $J(e^x)e^{-ax}$ est une fonction qui se comporte très bien - elle a des sauts simples qui se comportent bien, elle vaut identiquement 0 pour tout $x < 0$, et elle va vers 0 plus vite que $e^{-(s-1)x}$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ et les théorèmes les plus simples [40] sur les intégrales de Fourier suffisent à prouver rigoureusement l’assertion de Riemann selon laquelle (41) est valide en toute généralité.

39. Voir Riemann [R2, p. 86].

40. Voir, par exemple, Taylor [T2]. La forme particulière de l’inversion de Fourier que Riemann utilise ici - qui est essentiellement l’analyse de Fourier sur le groupe multiplicatif des réels positifs plutôt que sur le groupe additif de tous les nombres réels - est souvent appelé l’inversion de Mellin. Le travail de Riemann précède celui de Mellin de 40 années.

13. Méthode pour déduire la formule pour $J(x)$

Les deux formules pour $\xi(s)$, notamment,

$$\xi(s) = \prod\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s) \quad \text{ et } \quad \xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

se combinent pour donner

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \log\xi(s) - \log\prod\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1)\\ &= \log\xi(0) + \sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) - \log\prod\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1).\end{aligned}$$

La formule de Riemann pour $J(x)$, qui est le principal résultat de son article, est obtenue essentiellement en substituant cette formule pour $\log\zeta(s)$ dans la formule

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\log\zeta(s)x^s\frac{ds}{s} \qquad (a>1)$$

de la section précédente et en intégrant ensemble les termes qui se correspondent. Pourtant, parce qu'une substitution directe amène à des intégrales divergentes [le terme $(s/2)\log\pi$, par exemple, amène à une intégrale qui est une constante fois $(i)^{-1}\int x^s ds = e^a\int e^{iu\log x}du$ qui oscille et ne converge pas même sous condition], Riemann effectue d'abord une intégration par parties pour obtenir

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i}.\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\log\zeta(s)}{s}\right]x^s ds \qquad (a>1) \tag{43}$$

avant de substituer dans l'expression ci-dessus l'autre expression de $\log\zeta(s)$. La validité de l'intégration par parties par laquelle (43) est obtenue dépend simplement du fait de montrer que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log\zeta(a\pm iT)}{a\pm iT}x^{a\pm iT} = 0, \tag{44}$$

qui découle facilement de l'inégalité

$$|\log\zeta(a\pm iT)| = \left|\sum_n\sum_p(1/n)p^{-n(a\pm iT)}\right| \le \sum_n\sum_p(1/n)p^{-na} = \log\zeta(a) = \text{const} \tag{45}$$

parce que cela montre que le numérateur dans (44) est borné alors que le dénominateur tend vers l'infini.

La substitution de

$$\log\zeta(s) = \log\xi(0) + \sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) - \log\prod\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1)$$

dans (43) exprime $J(x)$ comme une somme de cinq termes (l'intégrale d'une somme finie est toujours la somme d'intégrales sous la condition que ces dernières convergent) et la dérivation de la formule de Riemann pour $J(x)$ dépend maintenant de l'évaluation de ces cinq intégrales définies.

On devrait noter que pour tout s fixé, il y a une ambiguïté dans la définition de $\log[1-(s/\rho)]$ pour ces racines ρ qui ne sont pas grandes comparativement à s. Dans le but d'éliminer cette ambiguïté quand $\mathrm{Re}\, s > 1$, soit $\log[1-(s/\rho)]$ défini comme étant $\log(s-\rho) - \log(-\rho)$; cela est significatif parce qu'aucun des[41] ρ n'est réel et supérieur ou égal à 0. De cette manière, $\log[1-(s/\rho)]$ est défini de façon non ambiguë par $\mathrm{Re}\, s > 1$ et, en particulier, sur le chemin d'intégration $\mathrm{Re}\, s = a > 1$.

14. Les termes principaux de $J(x)$

On verra ci-dessous que le terme principal dans la formule pour $J(x)$ est le terme correspondant au terme $-\log(s-1)$ de l'expansion de $\log \zeta(s)$. Ce terme est égal à

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\log(s-1)}{s}\right]x^s ds \qquad (a>1).$$

Riemann montre que pour $x > 1$, la valeur de cette intégrale définie est l'intégrale logarithmique

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0}\left[\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\right];$$

c'est-à-dire que c'est la valeur principale de Cauchy de l'intégrale divergente $\int_0^x (dt/\log t)$. Son argument est le suivant :

Fixons $x > 1$ et considérons la fonction de β définie par

$$F(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[(s/\beta)-1]}{s}\right\}x^s ds$$

de telle façon que le nombre souhaité soit $F(1)$. La définition de $F(\beta)$ peut être prolongée à tous les nombres réels ou complexes β autres que les nombres réels $\beta \leq 0$ en prenant $a > \mathrm{Re}\,\beta$ et en définissant $\log[(s/\beta)-1]$ comme étant $\log(s-\beta) - \log\beta$, où, comme d'habitude, $\log z$ est défini pour tout z autre que réel $z \leq 0$ par la condition qu'il est réel pour un réel $z > 0$. L'intégrale $F(\beta)$ converge absolument parce que

$$\left|\frac{d}{ds}\frac{\log[(s/\beta)-1]}{s}\right| \leq \frac{|\log[(s/\beta)-1]|}{|s|^2} + \frac{1}{|s(s-\beta)|}$$

est intégrable alors que x^s oscille sur la ligne d'intégration. Parce que

$$\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{\log[(s/\beta)-1]}{s}\right\} = \frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

la différentiation sous le signe de l'intégrale et l'intégration par parties donnent

$$\begin{aligned} F'(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(\beta-s)\beta}\right]x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{(\beta-s)\beta}ds. \end{aligned}$$

41. Voir la section 2.3, ou observer que la série $1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+5^{-s}-\ldots$ converge vers un nombre positif pour $s > 0$ et que ce nombre est

$$\zeta(s) - 2.2^{-s}(1+2^{-s}+3^{-s}+\ldots) = (1-2^{1-s})\zeta(s).$$

Cette dernière intégrale peut être évaluée en appliquant une inversion de Fourier à la formule

$$\frac{1}{s-\beta} = \int_1^\infty x^{-s}x^{\beta-1}dx \qquad [\mathrm{Re}(s-\beta)>0],$$

$$\frac{1}{a+i\mu-\beta} = \int_0^\infty e^{-i\lambda\mu}e^{\lambda(\beta-a)}d\lambda \qquad [a>\mathrm{Re}\,\beta],$$

pour obtenir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+i\mu-\beta}e^{i\mu x}d\mu = \begin{cases} 2\pi e^{x(\beta-a)} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

d'où il découle que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{s-\beta}y^s ds = \begin{cases} y^\beta & \text{si } y>1 \\ 0 & \text{si } y<1 \end{cases}$$

à condition que $a > \mathrm{Re}\,\beta$. Puisqu'on a supposé $x > 1$, cela donne $F'(\beta) = x^\beta/\beta$.

Maintenant appelons C^+ le contour dans le plan complexe (t-plan) qui consiste en le segment de droite de 0 à $1-\epsilon$ (où ϵ est un petit nombre positif), suivi du semi-cercle dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}\,t \geq 0$ de $1-\epsilon$ à $1+\epsilon$, suivi par le segment de droite de $1+\epsilon$ à x, et posons

$$G(\beta) = \int_{C^+}\frac{t^{\beta-1}}{\log\, t}dt.$$

Alors

$$G'[\beta) = \int_{C^+} t^{\beta-1}dt = \left[\frac{t^\beta}{\beta}\right]_0^x = F'(\beta)$$

Maintenant, $G(\beta)$ est définie et analytique pour $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ (si $\mathrm{Re}\,\beta < 0$, alors l'intégrale qui définit G diverge en $t = 0$) comme $F(\beta)$; puisqu'elles diffèrent par une constante (qui peut dépendre de x) tout au long de $\mathrm{Re}\,\beta > 0$. Riemann énonce que cette constante peut être évaluée en maintenant $\mathrm{Re}\,\beta$ fixé et en laissant $\mathrm{Im}\,\beta \longrightarrow +\infty$ à la fois dans $F(\beta)$ et dans $G(\beta)$, mais il n'effectue pas cette évaluation.

Pour évaluer la limite de $G(\beta)$, posons $\beta = \sigma + i\tau$, où σ est fixé et $\tau \longrightarrow \infty$. Le changement de variable $t = e^u, u = \log t$ met $G(\beta)$ sous la forme

$$\int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\log\, x}\frac{e^{\beta\, u}}{u}du + \int_{i\delta+\log\, x}^{\log\, x}\frac{e^{\beta\, u}}{u}du,$$

où le chemin d'intégration a été légèrement modifié en utilisant le théorème de Cauchy. Les changements de variable $u = i\delta + v$ dans la première intégrale et $u = \log x + iw$ dans la seconde ont mis ceci sous la forme

$$G(\beta) = e^{i\delta\sigma}e^{-\delta\tau}\int_{-\infty}^{\log\, x}\frac{e^{\sigma\, v}}{i\delta+v}e^{i\tau\, v}dv - ix^\beta\int_0^\delta\frac{e^{-\tau\, w}e^{\sigma i\, w}}{\log x + iw}dw.$$

Les deux intégrales dans cette expression approchent zéro lorsque $\tau \longrightarrow \infty$, la première parce que $e^{-\delta\tau} \longrightarrow 0$ et la seconde parce que $e^{-\tau w} \longrightarrow 0$ excepté en $w = 0$. Par conséquent, *la limite de* $G(\beta)$ *lorsque* $\tau \longrightarrow \infty$ *est zéro.* (Noter, pourtant, que cet argument ne serait pas valide si C^+ était changé pour suivre le semi-cercle inférieur parce qu'alors $e^{-\delta\tau}$ serait remplacé par $e^{\delta\tau}$ et $e^{-\tau w}$ serait remplacé par $e^{\tau w}$.)

Pour évaluer la limite de $F(\beta)$ posons

$$H(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log\, x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1-(s/\beta)]}{s}\right\}x^s dx$$

où $a > \mathrm{Re}\,\beta$ et où $\log[1-(s/\beta)]$ est défini pour tous les nombres complexes β autres que les nombres réels $\beta \geq 0$ comme étant $\log(s-\beta) - \log(-\beta)$. La différence $H(\beta) - F(\beta)$ est définie pour tous les nombres complexes β autres que sur l'axe réel, et dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}\,\beta > 0$ elle est égale à

$$\begin{aligned} H(\beta) - F(\beta) \quad &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log\, x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\log\,\beta - \log(-\beta)}{s}\right]x^s dx, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log\, x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{i\pi}{s}\right]x^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{i\pi}{s}x^s ds = -i\pi \end{aligned}$$

par le cas $\beta = 0$ de (47). Ainsi $F(\beta) = H(\beta) + i\pi$ tout au long du demi-plan supérieur et cela suffira à évaluer la limite de $H(\beta)$ lorsque $\tau \longrightarrow \infty$ $(\beta = \sigma + i\tau)$. Maintenant $1-(s/\beta) \longrightarrow 1$; par conséquent, son log tend vers zéro et il semble plausible alors que $H(\beta)$ tende aussi vers zéro. Cela peut être prouvé en calculant la différentiation

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1-(s/\beta)]}{s}\right\} \quad &= -\frac{\log[1-(s/\beta)]}{s^2} + \frac{1}{s(s-\beta)} \\ &= -\frac{\log[1-(s/\beta)]}{s^2} + \frac{1}{\beta(s-\beta)} - \frac{1}{\beta\, s}, \end{aligned}$$

en multipliant par $x^s ds/2\pi i$, et en intégrant de $a - i\infty$ à $a + i\infty$ (au sens usuel, notamment, la limite lorsque $T \longrightarrow \infty$ de l'intégrale de $a - iT$ à $a + iT$). À cause du s^2 au dénominateur de la première intégrale, il n'est pas difficile de montrer, en utilisant le théorème de la convergence de la limite de Lebesgue (voir Edwards [E1]), que la limite de cette intégrale lorsque $\tau \longrightarrow \infty$ est l'intégrale de la limite, c'est-à-dire zéro. Les deux intégrales restantes peuvent être évaluées en utilisant (47) pour trouver qu'elles sont $x^\beta/\beta - x^0/\beta = (x^\beta - 1)/\beta$. Puisque le numérateur est borné et puisque $|\beta| \longrightarrow \infty$, cela tend vers zéro ; puisque $H(\beta)$ tend vers zéro alors $F(\beta)$ tend vers $i\pi$. Par conséquent $F(\beta) = G(\beta) + i\pi$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,\beta > 0$. Ainsi le résultat recherché $F(1)$ est

$$F(1) = \int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\log\, t} + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\frac{(t-1)}{\log\, t}.\frac{dt}{t-1} + \int_{1+\epsilon}^{x}\frac{dt}{\log\, t} + i\pi,$$

où la seconde intégrale est sur le semi-cercle dans le demi-plan supérieur ; lorsque $\epsilon \downarrow 0$, le quotient $(t-1)/\log t$ tend vers 1 le long de ce semi-cercle, et par conséquent, l'intégrale tend vers $\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dt/(t-1) = -i\pi$. Ainsi la limite lorsque $\epsilon \downarrow 0$ de la formule ci-dessus est

$$F(1) = \mathrm{Li}(x)$$

ce qui devait être montré.

15. Le terme dans lequel interviennent les racines ρ

Considérons maintenant le terme dans la formule de $J(x)$ provenant du terme $\sum \log[1-(s/\rho)]$ dans la formule de $\log \zeta(s)$, notamment,

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{s}{ds}\left\{\frac{\sum \log[1-(s/\rho)]}{s}\right\}x^s ds. \tag{46}$$

Si l'opération de sommation sur ρ peut être intervertie avec la différentiation et l'intégration, *alors* cela est égal à $-\sum H(\rho)$, où $H(\rho)$ est définie comme dans la section précédente. Maintenant il a été montré que $H(\rho)=G(\rho)$ pour ρ dans le premier quadrant ($\operatorname{Re}\rho>0, \operatorname{Im}\rho>0$) et exactement de la même manière, il peut être montré que pour ρ dans le quatrième quadrant ($\operatorname{Re}\rho>0, \operatorname{Im}\rho<0$), la valeur de $H(\rho)$ est égal à l'intégrale $G(\rho)$ excepté que l'intégrale doit être à l'extérieur du contour C^- qui va à l'extérieur du semi-cercle inférieur de $1-\epsilon$ à $1+\epsilon$ plutôt qu'à l'extérieur de semi-cercle supérieur comme le fait C^+. Ainsi, en appariant les termes de la somme selon ρ au sens habituel, l'intégrale (48) pourrait être

$$-\sum_{\operatorname{Im}\rho>0}\left(\int_{C^+}\frac{t^{\rho-1}}{\log t}dt+\int_{C^-}\frac{t^{-\rho}}{\log t}dt\right) \tag{47}$$

si elle pouvait être évaluée terme à terme. Maintenant si β est réel et positif, alors le changement de variable $u=t^\beta$, qui implique $\log t=\log u/\beta, dt/t=du/u\beta$, donne

$$\int_{C^+}\frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt=\int_0^{x^\beta}\frac{du}{\log u}=\operatorname{Li}(x^\beta)-i\pi,$$

où la seconde intégrale est sur un chemin qui passe au-dessus de la singularité en $u=1$. Puisque l'intégrale sur la gauche converge partout dans le demi-plan $\operatorname{Re}\beta>0$, cette formule donne le prolongement analytique de $\operatorname{Li}(x)$ pour ce demi-plan (quand x est, comme toujours, un nombre fixé $x>1$). De la même façon

$$\int_{C^-}\frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt=\operatorname{Li}(x^\beta)+i\pi,$$

et (49) devient

$$-\sum_{\operatorname{Im}\rho>0}[\operatorname{Li}(x^\rho)+\operatorname{Li}(x^{1-\rho})]. \tag{48}$$

Ainsi, si l'évaluation terme à terme est valide, l'intégrale souhaitée (46) est égale à (48).

Riemann énonce que l'évaluation terme à terme est valide et que (48) est en effet la valeur souhaitée (46) mais que cette série (48) est seulement conditionnellement convergente - même si les termes $\rho, 1-\rho$ sont appariés - et qu'elle doit être sommée dans l'ordre des $\operatorname{Im}\rho$ croissant [42]. Il concède que la validité de l'évalutation terme à terme de (46) nécessite “une discussion plus exacte de la fonction ξ”, mais dit que cela est facile et passe à un autre point.

42. Il est intéressant de noter que Riemann écrit $\rho=\frac{1}{2}+i\alpha$ et dit d'abord que la somme (46) s'effectue sur toutes les valeurs positives de α ordonnées par leur grandeur avant d'ajouter entre parenthèses qu'elle est effectuée sur tous les α tels que $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ selon un ordre de grandeur. Ainsi la possibilité est admise que l'hypothèse de Riemann soit fausse, même si cela est fait entre parenthèses.

Une autre petite remarque à propos de la somme (48) est nécessaire. Les calculs ci-dessus supposent $\operatorname{Re}\rho > 0$, mais il n'a pas été montré que cela était vrai pour toutes les racines ρ. Même si Hadamard prouva ultérieurement qu'il n'y a pas de racines ρ sur la droite $\operatorname{Re}\rho = 0$ (voir la section 4.2), Riemann n'a pas exclus cette possibilité et il n'y a donc pas de justification au fait qu'il ignore ce point comme il le fait.

16. Les termes restant

Un des trois termes restant dans la formule de $J(x)$, notamment le terme provenant de $(s/2)\log\pi$, disparaît lorsqu'il est divisé par s et différentié relativement à s. Le terme provenant de la constante $\log\xi(0)$ est

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log\xi(0)}{s}\right)x^s ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\log\xi(0)}{s}x^s ds = \log\xi(0)$$

en utilisant l'une des premières formules de la section 1.14 [43] dans le cas $\beta = 0$. Maintenant $\xi(0) = \prod(0)\pi^{-s}(0-1)\zeta(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}$ so $\log\xi(0) = -\log 2$ est la valeur numérique de ce terme.

> Riemann écrit $\log\xi(0)$ à la place de $-\log 2$, mais puisqu'il utilise pour dénoter une fonction différente - notamment, la fonction $\xi(\frac{1}{2}+it)$ de t - son $\xi(0)$ dénote $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$ et ainsi sa formule est erronée. Il est difficile de deviner quelle a été la source de cette erreur évidente, si ce n'est de dire qu'elle doit provenir d'une confusion entre la formule du produit
>
> $$\xi(s) = \xi(0)\prod_\rho[1-(s/\rho)]$$
>
> sous la forme qui lui est donnée ci-dessus et de la formule du produit
>
> $$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \xi(0)\prod\left(1-\frac{\frac{1}{2}+it}{\frac{1}{2}+i\alpha}\right)\\ &= \xi(0)\prod\left(\frac{i\alpha-it}{\frac{1}{2}+i\alpha}\right)\\ &= \xi(0)\prod\left(\frac{i\alpha}{\frac{1}{2}+i\alpha}\right)\prod\left(1-\frac{it}{i\alpha}\right)\\ &= \xi(0)\prod\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+i\alpha}\right)\prod\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)\\ &= \xi(\frac{1}{2}\prod_{\operatorname{Re}\alpha>0}\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)\end{aligned}$$

43. ici 14.

sous la forme que lui donne Riemann, et d'une confusion concomitante de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1-(s/\rho)]}{s}\right\}x^s ds$$

qu'il évalue, avec l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1-(s-\frac{1}{2})/i\alpha]}{s}\right\}x^s ds$$

qui en diffère par une constante. Quelle que soit la source de l'erreur, Riemann commet la même erreur dans la lettre citée par les éditeurs dans les notes en fin d'article dans la collection de travaux, et les articles non publiés [R1a] incluent un calcul de $\log \xi(\frac{1}{2})$ avec plusieurs décimales après la virgule, de telle façon que cela ne peut définitivement pas être une erreur typographique comme les éditeurs de la collection des travaux le supposent. L'erreur a été remarquée par Genocchi [G4] alors que Riemann était encore en vie.

Cela ne laisse qu'un seul terme

(49) $$\frac{1}{2\pi\, i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\log\prod(s/2)}{s}\right]x^s ds$$

à évaluer. Maintenant, par la formule (9) de la section 1.3 [44]

$$\log\prod\left(\frac{s}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)+\frac{s}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

En utilisant cette formule dans (49) et en supposant qu'une intégration terme à terme est valide, on met (49) sous la forme

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi\, i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1+(s/2n)]}{s}\right\}x^s ds=-\sum_{n=1}^{\infty}H(-2n),$$

où H est défini comme dans la section 1.14 [45]. Les formules précédentes pour $H(\beta)$ s'appliquent seulement dans le demi-plan $\operatorname{Re}\beta>0$. Pour obtenir une formule pour H lorsque $\operatorname{Re}\beta<0$, on pose

$$E(\beta)=-\int_x^{\infty}\frac{t^{\beta-1}}{\log t}dt.$$

Alors $E(\beta)$ converge lorsque $\operatorname{Re}\beta<0$ et satisfait

$$E'(\beta)=-\int_x^{\infty}t^{\beta-1}dt=\frac{x^{\beta}}{\beta}=F'(\beta)=H'(\beta)$$

ainsi $E(\beta)$ diffère de $H(\beta)$ par une constante partout là où $\operatorname{Re}\beta<0$. Puisqu'à la fois E et H tendent vers zéro lorsque $\beta\longrightarrow-\infty$, la constante est nulle et $E\equiv H$. Ainsi (49) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{t^{-2n-1}}{\log t}dt=\int_x^{\infty}\frac{1}{t\log t}\left(\sum t^{-2n}\right)dt=\int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

44. ici 3.
45. ici 14.

à condition que l'intégration terme à terme soit valide. La preuve que l'intégration terme à terme est valide, que Riemann (tacitement) laisse au lecteur, peut être obtenue ainsi.

Notons d'abord que la série

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\log \prod(s/2)}{s}\right] = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1+(s/2n)]}{s}\right\}$$

converge uniformément dans tous les disques $|s| \leq K$, (Pour les grandes valeurs de n, le développement en série $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ peut être utilisé, et les sommandes du côté droit ne contiennent que des termes en $n^{-2}, n^{-3}, \ldots$. Cela justifie la différentiation terme à terme et justifie également l'intégration terme à terme sur tout intervalle fini

$$(50) \quad \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{d}{ds}\left[\frac{\log \prod(s/2)}{s}\right]x^s\,ds = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{d}{ds}\left\{\frac{\log[1+(s/2n)]}{s}\right\}x^s\,ds.$$

Pour estimer le n-ième terme de la somme sur le bon ensemble[46] $v = (s-a)/2n, b = a/2n, c = T/2n$, donc $s = 2n(v+b)$ et le n-ième terme est moins

$$\frac{1}{2\pi\, i}\frac{1}{\log x}\int_{-ic}^{ic}\frac{d}{2n\,dv}\left[\frac{\log(1+v+b)}{2n(v+b)}\right]x^{2nv+a}2n\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\, i}\frac{x^a}{2n\log x}\int_{-ic}^{ic}\frac{d}{dv}\left[\frac{\log(1+v+b)}{v+b}\right]x^{2nv}dv.$$

Intégrer par parties met cela sous la forme

$$\frac{1}{2\pi\, i}\frac{x^a}{2n\log x}.\frac{1}{2n\log x}\left(\frac{d}{dv}\left[\frac{\log(1+v+b)}{v+b}\right]x^{2nv}\Big]_{v=-ic}^{v=ic} - \int_{-ic}^{ic}\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{\log(1+v+b)}{v+b}\right]x^{2nv}dv\right).$$

Maintenant lorsque b est un nombre réel tel que $0 \leq b \leq a$, la fonction

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{\log(1+v+b)}{v+b}\right] = \frac{1}{(v+b)(v+b+1)} - \frac{\log(1+v+b)}{(v+b)^2}$$

est bornée sur l'axe imaginaire, et sa dérivée est absolument intégrable sur $(-i\infty, i\infty)$, d'où il découle que le module du n-ième terme de la série du côté droit de (50) est au plus une constante fois n^{-2} *pour tout* T. Ainsi, la série converge uniformément dans T et on peut passer à la limite $T \longrightarrow \infty$ terme à terme, comme on devait le montrer.

Cela complète l'évaluation des termes dans la formule pour $J(x)$. Les combiner donne le résultat final

$$(51) \qquad J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\operatorname{Im}\rho>0}[\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})] + \int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log\xi(0) \qquad (x > 1)$$

qui est la formule de Riemann [excepté que, comme cela a été noté plus haut, $\log\,\xi(0)$ égale $\log(\frac{1}{2})$ et non $\log\,\xi(\frac{1}{2})$ comme cela devrait être le cas selon les notations de Riemann]. Cette formule analytique pour $J(x)$ est le résultat principal de l'article.

46. ou bien l'ensemble de droite ? le right set

17. La formule pour $\pi(x)$

Bien sûr, le but de Riemann était d'obtenir une formule non pas pour $J(x)$ mais pour la fonction $\pi(x)$, c'est-à-dire pour le nombre de nombres premiers inférieurs à une valeur donnée x. Puisque le nombre de nombres premiers au carré qui sont inférieurs à x est trivialement égal au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x^{1/2}$, c'est-à-dire égal à $\pi(x^{1/2})$, et puisque de la même manière le nombre des puissances n-ièmes p^n du nombre premier p qui sont inférieures à x est $\pi(x^{1/n})$, il s'ensuit de cela que J et π sont liés par la formule

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \ldots \tag{52}$$

La série dans cette formule est finie pour tout x donné parce que $x^{1/n} < 2$ pour n suffisamment grand, ce qui implique $\pi(x^{1/n}) = 0$. Riemann inverse cette relation au moyen de la formule d'inversion de Möbius [47] (voir la section 10.9) de façon à obtenir

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(x^{1/2}) - \frac{1}{3}J(x^{1/3}) - \frac{1}{5}J(x^{1/5}) + \frac{1}{6}J(x^{1/6}) + \ldots + \frac{\mu(n)}{n}J(x^{1/n}) + \ldots \tag{53}$$

où $\mu(n)$ est égal à 0 si n est divisible par un carré de nombre premier, 1 si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers, et -1 si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts. La série (53) est une série finie pour tout x fixé et quand elle est combinée à la formule analytique de $J(x)$

$$J(x) = \mathrm{Li(x)} - \sum_\rho \mathrm{Li}(x^\rho) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} \qquad (x > 1), \tag{54}$$

cela donne une formule analytique pour $\pi(x)$ comme souhaité.

La formule pour $\pi(x)$ qui résulte du fait de substituer (54) dans la série (finie) (53) contient trois sortes de termes, notamment, ceux qui ne croissent pas lorsque x croît [ceux provenant des deux derniers termes de (54)], ceux qui croissent lorsque x croît mais dont le signe oscille [les termes provenant de $\mathrm{Li}(x^\rho)$ que Riemann appelle “périodiques”], et ceux qui croissent régulièrement lorsque x croît [les termes provenant de $\mathrm{Li}(x)$]. Si toutes les sortes de termes sauf la dernière sont ignorées, les termes dans la formule de $\pi(x)$ sont juste

$$\mathrm{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) - \tfrac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3}) - \tfrac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5}) + \tfrac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6}) - \tfrac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{1/7}) + \ldots.$$

Maintenant *empiriquement*, on découvre que c'est une bonne approximation de $\pi(x)$. En fait, le premier terme seul est principalement l'approximation de Gauss

$$\pi(x) \sim \int_2^\infty \frac{dt}{\log t} = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(2)$$

47. Très simplement, cette inversion est effectuée en opérant successivement pour tout nombre premier $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ l'opération de remplacer les fonctions $f(x)$ de chaque côté de l'équation avec les fonctions $f(x) - (1/p)f(x^{1/p})$. Cela donne successivement

$$\begin{aligned} J(x) - \tfrac{1}{2}J(x^{1/2}) \quad &= \pi(x) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5}) + \ldots, \\ J(x) - \tfrac{1}{2}J(x^{1/2}) - \tfrac{1}{3}\pi(x^{1/3} + \tfrac{1}{6}\pi(x^{1/6}) \quad &= \pi(x) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5}) + \tfrac{1}{7}\pi(x^{1/7}) + \ldots \end{aligned}$$

etc., où à chaque étape, la somme sur la gauche consiste en les termes du côté droit de (53) pour lesquels les facteurs de n ne contiennent que les nombres premiers déjà couverts et la somme sur la droite consiste en ces termes du côté droit de (53) pour lesquels les facteurs de n ne contiennent *aucun* des nombres premiers déjà couverts. Une fois que p est suffisamment grand, ces derniers sont tous nuls, excepté pour $\pi(x)$.

[Li(2)=1.04. . .] et les deux premiers termes indiquent que

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2})$$

ce qui donne, par exemple,

$$\pi(10^6) \sim 78.628 - \tfrac{1}{2} \times 0.178 = 78.539$$

qui [48] est une meilleure approximation que celle de Gauss et qui devient encore meilleure si le troisième terme est utilisé. La mesure de la façon dont l'approximation suggérée par Riemann

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{1/n}) \tag{55}$$

est meilleure que $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ est étonnamment illustrée par l'une des tables de Lehmer [L9], dont un extrait est fourni dans la Table III.

TABLE III [49]

x	erreur de Riemann	erreur de Gauss
1 000 000	30	130
2 000 000	-9	122
3 000 000	0	155
4 000 000	33	206
5 000 000	-64	125
6 000 000	24	228
7 000 000	-38	179
8 000 000	-6	223
9 000 000	-53	187
10 000 000	88	339

Bien sûr, Riemann n'avait pas de telles données empiriques extensives à sa disposition, mais il semble bien au courant du fait que (55) est une meilleure approximation, ainsi qu'une approximation plus naturelle, de $\pi(x)$.

Riemann était aussi au courant, pourtant des défauts de l'approximation fournie par la formule (55) et de son analyse de cela. Bien qu'il ait réussi à donner une formule analytique exacte pour l'erreur

$$\pi(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{1/n}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho/n}) + \text{ termes inférieurs}$$

(où N est assez grand pour que $x^{1/N+1)} < 2$), il n'a pas d'estimation pour toutes les tailles de ces termes “périodiques” $\sum\sum \mathrm{Li}(x^{\rho/n})$. Vraiment, le fait empirique qu'ils soient aussi petits que Lehmer les a trouvés être est quelque chose de surprenant au vu du fait que la série $\sum[\mathrm{Li}(x^{\rho}) + \mathrm{Li}x^{1-\rho}]$ est seulement convergente de façon conditionnelle - puisque la petitesse de sa somme pour tout x dépend de l'élimination de tous les signes parmi les termes - et au vu du fait que les termes individuels $Li(x^{\rho})$ grossissent comme $|x^{\rho}/\log x^{\rho}| = x^{\mathrm{Re}\,\rho}/|\rho| \log x$ (voir la section 5.5) de telle façon que de nombreux d'entre eux grossissent au moins aussi vite que $x^{1/2}/\log x \sim 2\,\mathrm{Li}(x^{1/2}) > \mathrm{Li}(x^{1/3})$

48. problème de typographie dans le livre : $78.628 - \frac{1}{2}.178 = 78.539$.
49. De Lehmer [L9].

et l'on devrait s'attendre à ce qu'ils soient aussi significatifs pour des grandes valeurs de x que le terme $\frac{1}{2}\mathrm{Li}(x)$ et plus significatifs que n'importe lequel des termes suivants de (55). Sur ces sujets, Riemann se restreint à l'assertion qu'il serait intéressant dans des comptages ultérieurs des nombres premiers d'étudier l'effet de ces termes "périodiques" particuliers sur leur distribution.

Pour le dire rapidement, bien que les formules (53) et (54) se combinent pour donner une formule analytique pour $\pi(x)$, la validité de la nouvelle approximation (55) pour $\pi(x)$ à laquelle cela mène est basée, comme celle de l'ancienne approximation $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$, seulement sur une évidence empirique.

18. La densité dJ

Une formulation simple du résultat principal

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_\rho \mathrm{Li}(x^\rho) - \log\, 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log\, t} \tag{56}$$

peut être obtenue par différentiation pour trouver

$$dJ = \left[\frac{1}{\log\, x} - \sum_{\mathrm{Re}\,\alpha>0} \frac{2\cos(\alpha\log\, x)}{x^{1/2}\log\, x} - \frac{1}{x(x^2-1)\log x}\right] dx \qquad (x>1), \tag{57}$$

où α couvre toutes les valeurs telles que $\rho = \frac{1}{2} + i\alpha$ - en d'autres termes $\alpha = -i(\rho - \frac{1}{2})$, où ρ couvre les racines - de telle façon que

$$x^{\rho-1} + x^{-\rho} - x^{-1/2}[x^{i\alpha} + x^{-i\alpha}] = 2x^{-1/2}\cos(\alpha\log\, x).$$

[L'hypothèse de Riemann est que les α sont tous réels. En écrivant la formule (57) sous cette forme, Riemann est clairement en train de penser que les α sont réels parce que sinon, la forme naturelle aurait été $x^{\rho-1} + x^{\beta-1} = 2x^{\beta-1}\cos(\gamma\log x)$, où $\rho = \beta + i\gamma$.]

Par la définition de J, la mesure dJ est dx fois la densité des nombres premiers plus $\frac{1}{2}$ fois la densité des carrés de nombres premiers, plus $\frac{1}{3}$ fois la densité des cubes de nombres premiers, plus, etc. Ainsi $1/\log x$ devrait être considéré comme étant une approximation non seulement de la densité des nombres premiers comme l'avait suggéré Gauss mais plutôt de dJ, c'est-à-dire de la densité des nombres premiers *plus* $\frac{1}{2}$ la densité des carrés de premiers, plus, etc.

Étant donnés deux grands nombres $a < b$, l'approximation obtenue en prenant un nombre fini des α

$$J(b) - J(a) \sim \int_a^b \frac{dt}{\log\, t} - 2\sum \int_a^b \frac{\cos(\alpha\log\, t)dt}{t^{1/2}\log\, t} \tag{58}$$

devrait être une joliment bonne approximation parce que le terme omis $\int dx/x(x^2-1)\log\, x$ est complètement négligeable et parce que les intégrales impliquant des α de grande valeur oscille très rapidement pour les x grands et par conséquent ne devrait apporter que de faibles contributions. En fait, la formule de base (56) implique immédiatement que l'erreur dans (58) approche le terme omis négligeable lorsque de plus en plus d'α sont inclus dans la somme.

C'est dans le but de chercher le nombre d'α qui sont significatifs dans (58) que Riemann semble chercher empiriquement l'influence des termes “périodiques” sur la distribution des nombres premiers. À ma connaissance, aucune telle recherche n'a été menée.

19. Questions que Riemann a laissées non résolues

Riemann lui-même, dans une lettre citée dans les notes qui suivent l'article dans la collection de ses travaux, souligne deux assertions de l'article comme n'ayant pas été totalement démontrées, qui sont l'assertion que l'équation $\xi(\frac{1}{2}+i\alpha)=0$ a approximativement $(T/2\pi)\log(T/2\pi)$ racines α *réelles* dans le domaine $0<\alpha<T$ et l'assertion que l'intégrale de la section 1.15 [50] peut être évaluée terme à terme [51]. Il n'exprime aucun doute à propos de la véracité de ces assertions, pourtant, et il dit qu'elles découlent d'une nouvelle représentation de la fonction ξ qu'il n'a pas encore suffisamment simplifiée pour la publier. Pourtant, comme cela a été vu dans la section 1.15 [52], la première de ces deux assertions, au moins si l'on comprend qu'elle signifie que l'erreur relative dans l'approximation tend vers zéro lorsque $T\longrightarrow\infty$, n'a jamais été prouvée. La seconde a été démontrée en 1895 par von Mangoldt, mais par une méthode complètement différente de celle suggérée par Riemann, notamment en prouvant d'abord que la formule de Riemann pour $J(x)$ est valide et en concluant de cela que la valeur en appariant les termes de l'intégrale dans la section 1.15 [53] doit être correcte.

Riemann croyait de façon évidente qu'il avait donné une preuve de la formule du produit pour $\xi(s)$, mais, au moins à la lecture proposée ci-dessus de l'article, on ne peut considérer sa preuve comme étant complète, et, en particulier, on doit interroger l'estimation du nombre de racines ρ dans le domaine $\{0\leq \operatorname{Im}\rho\leq T\}$ sur laquelle la preuve s'appuie. Ce n'est pas avant 1893 qu'Hadamard a démontré la formule du produit, et c'est en 1905 que von Mangoldt a prouvé l'estimation du nombre de racines dans le domaine $\{0<\operatorname{Im}\rho<T\}$.

Alors, la question originale de la validité de l'approximation $\pi(x)\sim\int_2^x(dt/\log t)$ restait complètement non résolue par l'article de Riemann. On peut montrer que l'erreur relative de cette approximation tend vers zéro lorsque $x\longrightarrow\infty$ et seulement si cela est vrai de l'erreur relative dans l'approximation de $J(x)\sim\mathrm{Li}(x)$, ainsi la question originale est équivalente à la question de savoir si $\sum\mathrm{Li}(x^\rho)/\mathrm{Li}(x)\longrightarrow 0$, mais cela n'amène malheureusement pas le problème plus près d'une solution. C'est seulement en 1896 qu'Hadamard et, indépendamment, de la Vallée Poussin, ont prouvé le théorème des nombres premiers à cause du fait que l'erreur relative dans $\pi(x)\sim\int_2^x(dt/\log t)$

50. ici 15.

51. Voici l'extrait de l'article de Riemann : *“,la fonction $\xi(t)$ peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de t se trouve comprise entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$. Le nombre de racines de $\xi(t)=0$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T est environ égal à*

$$\frac{T}{2\pi}log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

car l'intégrale $\int d\,log\,\xi(t)$ prise le long d'un contour décrit dans le sens positif, comprenant à son intérieur l'ensemble des valeurs de t dont les parties imaginaires sont comprises entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$ et les parties réelles entre 0 et T est égale (abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre de grandeur que la grandeur $\frac{1}{T}$) à $\left(Tlog\,\frac{T}{2\pi}-T\right)i$; or cette intégrale est égale au nombre de racines de $\xi(t)=0$ situées dans ce domaine, multiplié par $2\pi i$. On trouve, en effet, entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles”.

52. ici 15.

53. ici 15.

tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Finalement, l'article pose une question plus grande que toutes les questions auxquelles il a répondu, la question de la vérité de l'hypothèse de Riemann. Le reste de ce livre sera consacré à l'histoire qui s'ensuivit à propos de six questions. En résumé, ces questions sont les suivantes :

(a) L'estimation de Riemann du nombre de racines ρ sur le segment de droite de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}+iT$ est-elle correcte lorsque $T \longrightarrow \infty$? (Réponse inconnue.)
(b) L'évaluation terme à terme de l'intégrale de la section 1.15 [54] est-elle valide ? (Oui, von Mangoldt, 1895.)
(c) La formule du produit pour $\xi(s)$ est-elle valide ? (Oui, Hadamard, 1893.)
(d) L'estimation de Riemann du nombre de racines ρ dans la bande $\{0 \leq \operatorname{Im}\rho \leq T\}$ est-elle correcte ? (Oui, von Mangoldt, 1905.)
(e) Le théorème des nombres premiers est-il vrai ? [Oui, Hadamard et de la Vallée Poussin (indépendamment), 1896.)
(f) L'hypothèse de Riemann est-elle vraie ? (Réponse inconnue.)

Bibliographie

[A1] Abel, N. H., Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, *Mag. Naturvidenskaberne* 2 (1823) (également *Œuvres* 1, pp. 11-27).

[A2] Abel, N. H. Letter to Holmboe dated 4 August 1823. In *Niels Henck Abel, Memorial*, publié à l'occasion du Centenaire de sa naissance.

[A3] Ahlfors, L . V., Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1953.

[B8] Bohr, H., and Landau, E., Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung... *Rend. Circ. Mat. Palermo* 37, 265-272 (1914) (également *Collection des travaux* de Bohr, Vol I, B13).

[C2] Chebyshev, P. L., Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *J. Math. Pures Appl.* ([1] 17 (1852), (publié pour la première fois en 1848. Disponible en français et russe dans les éditions de la collection des travaux).

[C3] Chebyshev, P. L., Mémoire sur les nombres premiers. *J. Math. Pures Appl.* [1] 17 (1852) (publié pour la première fois en 1850. Disponible en français et russe dans les éditions de la collection des travaux).

[C5] Chebyshev, P. L., Polnoe Sobranie Sochineniy., Presses de l'Académie des sciences de l'URSS, Moscou et Leningrad, 1947.

[D3] Dirichlet, P. G. Lejeune, Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres. *J. Reine Angew. Math.* 18, 257-274 (1838) également dans les *Travaux complets*, vol. 1, p. 359-374.

54. ici 15.

[E1] Edwards, H. M., Advanced Calculus. Houghton, Boston, Massachusetts, 1969.

[E2] Euclid, Elements, Book 9, Prop. 20.

[E3] Euler, L., De progressionibus transcendentibus.... *Comm. Acad. Sel. Petropolitanae* 5, 36-57 (1730) (également dans *Opera* (1), Vol. 14, p. 1-24).

[E4] Euler, L., Variae observationes circa series infinitas, *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae* 9, 222-236 (1737). (*Opera* (1), Vol. 14, p. 216-244).

[E5] Euler, L., Introductio in Analysin Infinitorum, Chapter 15. Bousquet et Socios, Lausanne, 1748, (*Opera* (1), Vol. 8).

[E6] Euler, L., Institutiones Calculi Differentialis, Pt. 2, Chapitres 5 et 6. *Acad. Imp. Sci. Petropolitanae*, St. Petersburg, 1755, (*Opera* (1), Vol. 10).

[E7] Euler, L., Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. *Mém. Acad. Sci. Berlin* 17, 83-106 (1761). (*Opera* (1), Vol. 15, p. 70-90.).

[E8] Euler L., Survey of Euler's work on the factorial function (German) *Introduction to Euler's Opera* (1), Vol. 19, 1932.

[G1] Gauss, C. F., Circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

Comm. Soc. Reg. Sci. Gottingensis 2 (1813) (également dans les *Werke* Vol, II, p. 125-160.).

[G2] Gauss, C. F., Letter to Enke dated 24 December 1849. *Werk*, Vol. II, p. 444-447. *Königlichen Gesellschaft der Wissenschafien zu Göttingen.*

[G3] Gauss, C. F. , Werke, Vol. X_1, p. 11. *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*

[G4] Genocchi, A., Formule per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite (Résumé de l'article de Riemann). *Ann. Mat. Pura App.* [1] 3, 52-59 (1860).

[H1] Hadamard, 1, Etude sur les Propriétés des Fonctiona Entdres et en Particulier une Fonction Consider par Riemann. *J. Math. Pures Appl.* [6] 9, 171-215 (1893) (également dans les *Œuvres*).

[H3] Hardy, G. H., Sur les zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris* 158, 1012-1014 (1914) (également dans la collection de tous les articles).

[H5] Hardy, G. H., Divergent Series, Oxford Univ. Press, London and New York, 1956 (première édition, 1949).

[H6] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., The zeros of Riemann's zeta function on the critical line, *Math. Z.*, 10, 283-317 (1921) (également dans la collection des travaux de Hardy).

[H7] Hardy, G. H., and Wright, E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford Univ. Press, London and New York, 1938.

[H9] Hilbert, D. Problèmes futurs des mathématiques, *C. R. 2nd Congr. Int. Math., Paris*, 1902, p. 85.

[J1] Jacobi, C. G. J., Suite des notices sur les fonctions elliptiques. *J. Reine Angew. Math*, 3, 303-310 (1828) (également dans les *Travaux*, Vol. 1, p. 255-263).

[L1] Lakatos, I., Proofs and refutations (I-IV). *British J. Philo. Sci.* (1963).

[L9] Lehmer, D. H., List of prime numbers from 1 to 10 006 721, *Publ. No, 165. Carnegie Inst. of Washington, Washington, D.C.* 1913. (Reprinted, Hafner, New York, 1956).

[M5] Mertens, F., Ein Beitrag zur Analytischen Zablentheorie, *J. Reine Angew. Math.*, 78, p. 46-62 (1874).

[R1] Riemann, B., Gesammelte Werke. Teubner, Leipzig, 1892. (Réimprimé par Dover Books, New York, 1953).

[R1a] Riemann, B., Unpublished Papers, Handschriftenabteilung Niedersächische Staats-und Universitätsbibliothek, Göttingen.

[R2] Riemann, B., Partielle Differentialgleichungen (Textes de conférences édités et préparés pour publication par K. Hattendorf) Vieweg, Braunschweig, 1876.

[S1] Selberg, A., On the zeros of Riemann's zeta-function. *Skr. Norske Vid.-Akad.* Oslo No. 10(1942).

[S4] Siegel, C. L., Über Riemanns Nachlaßzur anaytischen Zahlentheorie. *Quellen Studien zur Geschichte der Math. Astron. und Phys. Abt. B : Studien* 2, 45-80 (1932) (également dans *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 1. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966).

[T2] Taylor, A. E., Advanced Calculus. Ginn (Blaisdell), Boston, Massachusetts, 1955.

[T8] Titchmarsh, E. C„ The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford Univ.Press, London and New York, 1951.