La description de la réalité physique fournie par la mécanique quantique peut-elle être considérée comme complète ?

A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen
Institut pour les Études Avancées, Princeton, New Jersey
(Reçu le 25 mars 1935)

Dans une théorie complète, un élément correspond à chaque élément de la réalité. Une condition suffisante pour qu'une quantité physique soit réelle est la possibilité de la prédire avec certitude, sans perturber le système. En mécanique quantique, dans le cas de deux quantités physiques décrites par des opérateurs ne commutant pas, la connaissance de l'une exclut la connaissance de l'autre. Alors soit (1) la description de la réalité donnée par la fonction d'onde en mécanique quantique n'est pas complète, soit (2) ces deux quantités ne peuvent avoir une réalité simultanément. Considérer le problème de faire des prédictions concernant un système sur la base de mesures faites sur un autre système qui avait précédemment interagi avec lui amène au résultat que si (1) est fausse alors (2) est également fausse. On est ainsi amené à conclure que la description de la réalité donnée par une fonction d'onde n'est pas complète.

1.

Toute considération sérieuse d'une théorie physique doit prendre en compte la distinction entre la réalité objective, qui est indépendante de toute théorie, et les concepts physiques avec lesquels la théorie opère. Ces concepts sont destinés à correspondre à la réalité objective, et au moyen de ces concepts, nous nous représentons la réalité à nous-mêmes.

Pour juger du succès d'une théorie physique, nous pouvons nous poser deux questions : (1) "La théorie est-elle correcte ?" et (2) "La description fournie par la théorie est-elle complète ?". C'est seulement dans le cas où des réponses positives peuvent être données à ces deux questions à la fois que les concepts de la théorie peuvent être considérés comme satisfaisants. La correction de la théorie est jugée par le degré d'adéquation entre les conclusions de la théorie et l'expérience humaine. Cette expérience, qui seule nous permet de faire des inférences à propos de la réalité, prend en physique la forme de l'expérimentation et de la mesure. C'est la seconde question que nous souhaiterions considérer ici, en l'appliquant à la mécanique quantique.

Quelque soit le sens attribué au terme *complet*, l'exigence suivante pour une théorie complète semble nécessaire : *tout élément de la réalité physique doit avoir son élément correspondant dans la théorie physique*. Nous appellerons cela la condition de complétude. Il est ainsi aisé de répondre à la seconde question, dès que nous sommes capables de décider quels sont les éléments de la réalité physique.

Les éléments de la réalité physique ne peuvent pas être déterminés par des considérations philosophiques a priori, mais doivent être trouvés par le recours à des résultats d'expérimentations et des mesures. Une définition complète de la réalité est, pourtant, non nécessaire pour notre but. Nous serons satisfaits par le critère suivant, que nous trouvons raisonnable. *Si, sans perturber un système d'aucune manière, nous pouvons prédire avec certitude (i.e., avec une probabilité égale à 1) la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant*

Référence : Physical Review, Volume 47, p. 777, 15 mai 1935.
Traduction : Denise Vella-Chemla, Juillet 2021.

à cette quantité physique. Il nous semble que ce critère, quoique loin d'épuiser toutes les manières possibles de reconnaître une réalité physique, nous fournit au moins une telle manière d'en rendre compte, à chaque fois que les conditions posées sur lui ont lieu. Vu comme une condition de la réalité, non pas nécessaire mais seulement suffisante, ce critère est en accord avec les idées de la réalité, qu'il s'agisse d'idées classiques ou d'idées de la mécanique quantique.

Pour illustrer les idées, considérons la description en mécanique quantique du comportement d'une particule ayant un seul degré de liberté. Le concept fondamental de la théorie est le concept d'état, qui est supposé être complètement caractérisé par la fonction d'onde ψ, qui est une fonction des variables choisies pour décrire le comportement de la particule. Correspondant à chaque quantité observable A, il y a un opérateur, qui peut être désigné par la même lettre.

Si ψ est une fonction propre de l'opérateur A, c'est-à-dire si
(1) $$\psi' \equiv A\psi = a\psi,$$

où a est un nombre, alors la quantité physique A a avec certitude la valeur a à chaque fois que la particule est dans l'état donné par ψ. En accord avec notre critère de la réalité, pour une particule dans un état donné pour lequel Eq. (1) est vérifiée, il y a un élément de la réalité physique correspondant à la quantité physique A. Posons par exemple,
(2) $$\psi = e^{(2\pi\, i/h)p_0 x},$$

où h est la constante de Planck, p_0 est un nombre constant, et x est la variable indépendante.

Puisque l'opérateur correspondant au moment de la particule est
(3) $$p = (h/2\pi\, i)\partial/\partial x,$$

on obtient
(4) $$\psi' = p\psi = (h/2\pi\, i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi.$$

Ainsi, dans l'état donné par Eq. (2), le moment a certainement la valeur p_0. Cela fait ainsi sens de dire que le moment de la particule dans l'état donné par Eq. (2) est réel.

D'un autre côté, si Eq. (1) n'est pas vérifiée, nous ne pouvons plus parler de la quantité physique A ayant une valeur particulière. C'est le cas, par exemple, avec la coordonnée de la particule. L'opérateur lui correspondant, disons q, est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante. Ainsi,
(5) $$q\psi = x\psi \neq a\psi.$$

En accord avec la mécanique quantique, nous pouvons seulement dire que la probabilité relative qu'une mesure de la coordonnée donnera un résultat compris entre a et b est
(6) $$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a.$$

Puisque la probabilité est indépendante de a, mais dépend seulement de la différence $b - a$, nous voyons que toutes les valeurs de la coordonnée sont également probables.

Une valeur définie de la coordonnée, pour une particule dans l'état donné par Eq. (2), est ainsi non prédictible, mais peut être obtenue seulement par une mesure directe. Une telle mesure, pourtant, perturbe la particule et ainsi altère son état. Après que la coordonnée soit déterminée, la particule ne sera plus dans l'état donné par Eq. (2). La conclusion habituelle de cela en mécanique quantique est que *quand le moment d'une particule est connu, sa coordonnée n'a pas de réalité physique.*

Plus généralement, on montre en mécanique quantique que, si les opérateurs correspondant à deux quantités physiques, disons A et B, ne commutent pas, c'est-à-dire, si $AB \neq BA$, alors la connaissance précise d'une des deux exclut une telle connaissance de l'autre. De plus, toute tentative de déterminer la seconde expérimentalement altèrera l'état du système de telle façon que la connaissance de la première sera détruite.

Il découle de cela que soit (1) *la description de la réalité par la mécanique quantique fournie par la fonction d'onde n'est pas complète* soit (2) *quand les opérateurs correspondant aux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent avoir de réalité simultanément.* Car si les deux avaient une réalité simultanément - et ainsi des valeurs définies - ces valeurs entreraient dans la description complète, selon la condition de complétude. Si alors la fonction d'onde fournissait une telle description complète de la réalité, elle contiendrait ces valeurs ; elles seraient donc prédictibles. Cela n'étant pas le cas, ne subsistent que les alternatives énoncées.

En mécanique quantique, on suppose habituellement que la fonction d'onde contient une description complète de la réalité physique du système (5) dans l'état auquel il correspond. Au premier regard, cette supposition est complètement raisonnable, car la série infinie (7) étant réduite à un seul terme, l'information que l'on peut obtenir d'une fonction d'onde semble correspondre exactement à ce qui peut être mesuré sans altérer l'état du système. Nous montrerons, pourtant, que cette supposition, avec le critère de réalité fourni ci-dessus, amène à une contradiction.

2.

Dans ce but, supposons que nous ayons deux systèmes, I et II, qui peuvent interagir de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = T$, après quoi nous supposons qu'il n'y a plus d'interaction entre les deux parties. Nous supposons de plus que les états des deux systèmes avant $t = 0$ étaient connus. Nous pouvons alors calculer à l'aide de l'équation de Schrödinger l'état du système combiné I+II à n'importe quel instant ultérieur ; en particulier, pour tout $t > T$. Désignons par Ψ la fonction d'onde correspondante. Nous ne pouvons pas, pourtant, calculer l'état dans lequel l'un des deux systèmes est laissé après l'interaction. Ceci, selon la mécanique quantique, ne peut être fait qu'à l'aide de mesures supplémentaires par un procédé connu sous le nom de *réduction du paquet d'onde.* Considérons les grandes lignes de ce procédé.

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs propres d'une certaine quantité physique A appartenant au système I et $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \ldots$ les fonctions propres correspondantes, où les x_1 sont les variables utilisées pour décrire le premier système. Alors Ψ, considérée comme une fonction des x_1, peut être exprimée comme

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{7}$$

où les x_2 sont les variables utilisées pour décrire le second système. Ici, les $\psi_n(x_2)$ doivent être seulement regardées comme les coefficients de l'expansion de Ψ en une série de fonctions orthogonales $u_n(x_1)$. Supposons maintenant que la quantité A soit mesurée et qu'elle s'avère avoir la valeur a_k. On conclut alors qu'après la mesure, le premier système est laissé dans l'état fourni par la fonction d'onde $u_k(x_1)$, et que le second système est laissé dans l'état fourni par la fonction d'onde $\psi_k(x_2)$. Ceci est le procédé de réduction du paquet d'onde ; le paquet d'onde donné par la série infinie (7) est réduit à un unique terme $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

L'ensemble des fonctions $u_n(x_1)$ est déterminé par le choix de la quantité physique A. Si, au lieu de cela, nous avions choisi une autre quantité, disons B, ayant les valeurs propres $b_1, b_2, b_3, \ldots$ et les fonctions propres $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots$, nous aurions dû obtenir, à la place de Eq. (7), l'expansion

(8) $$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2)v_s(x_1),$$

où les φ_s sont les nouveaux coefficients. Si maintenant la quantité B est mesurée et s'avère avoir la valeur b_r, nous concluons qu'après la mesure, le premier système est laissé dans l'état donné par $v_r(x_1)$ et le second système est laissé dans l'état donné par $\varphi_r(x_2)$.

Nous voyons donc que comme conséquence des différentes mesures faites sur le premier système, le second système peut être laissé dans des états avec deux fonctions d'onde différentes. D'un autre côté, puisqu'à l'instant de la mesure, les deux systèmes n'interagissent plus, aucun changement réel ne peut avoir lieu dans le second système, comme conséquence de quoi que ce soit qui serait fait sur le premier système. C'est, bien sûr, seulement l'énoncé de ce que l'on entend par absence d'interaction entre les deux systèmes. Ainsi, *il est possible d'assigner deux fonctions d'onde différentes* (dans notre exemple ψ_k et φ_r) *à la même réalité* (le second système après l'interaction avec le premier).

Maintenant, il peut se produire que les deux fonctions d'onde, ψ_k et φ_r, sont des fonctions propres de deux opérateurs non commutatifs correspondant aux mêmes quantités physiques P et Q, respectivement. Que ceci puisse vraiment être le cas peut être mieux montré par un exemple. Supposons que les deux systèmes sont deux particules, et que

(9) $$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi\, i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p}dp,$$

où x_0 est une certaine constante. Appelons A le moment de la première particule ; alors, comme nous l'avons vu dans Eq. (4), ses fonctions propres seront

(10) $$u_p(x_1) = e^{(2\pi\, i/h)px_1}$$

correspondant à la valeur propre p. Puisque nous avons ici le cas d'un spectre continu, Eq. (7) s'écrira maintenant

(11) $$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2)u_p(x_1)dp,$$

où

(12) $$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}.$$

Cette ψ_p pourtant est la fonction propre de l'opérateur

(13) $$P = (h/2\pi\, i)\partial/\partial x_2,$$

correspondant à la valeur propre $-p$ du moment de la seconde particule. D'un autre côté, si B est la coordonnée de la première particule, elle a pour fonctions propres

(14) $$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x),$$

correspondant à la valeur propre x, où $\delta(x_1 - x)$ est la fonction bien connue *delta* de Dirac. Eq. (8) dans ce cas devient

(15) $$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2)v_x(x_1)dx,$$

où

(16) $$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi\, i/h)(x-x_2+x_0)p}dp = h\delta(x - x_2 + x_0).$$

Cette φ_x pourtant, est la fonction propre de l'opérateur

(17) $$Q = x_2$$

correspondant à la valeur propre $x + x_0$ de la coordonnée de la seconde particule. Puisque

(18) $$PQ - QP = h/2\pi\, i,$$

nous avons montré qu'il est en général possible que ψ_k et φ_r soient les fonctions propres de deux opérateurs ne commutant pas, correspondant à des quantités physiques.

Revenant maintenant au cas général des Eqs. (7) et (8), supposons que ψ_k et φ_r sont par exemple les fonctions propres de deux opérateurs ne commutant pas P et Q, correspondant aux valeurs propres p_k et q_r, respectivement. Ainsi, en mesurant soit A soit B nous sommes en mesure de prédire avec certitude, et sans aucunement perturber le second système, soit la valeur de la quantité P (qui est p_k) soit la valeur de la quantité Q (qui est q_r). En accord avec notre critère de réalité, dans le premier cas, nous devons considérer la quantité P comme étant un élément de réalité, dans le second cas, la quantité Q comme étant un élément de réalité. Mais, comme nous l'avons vu, à la fois les fonctions d'onde ψ_k et φ_r appartiennent à la même réalité.

Précédemment, nous avons prouvé que soit (1) la description en mécanique quantique de la réalité donnée par la fonction d'onde n'est pas complète, soit (2) quand les opérateurs correspondant à deux quantités physiques ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent pas être réelles simultanément. En commençant alors avec la supposition que la fonction d'onde ne donne pas une description complète de la réalité physique, nous sommes parvenus à la conclusion que deux quantités physiques, avec des opérateurs ne commutant pas, peuvent être réelles simultanément. Par conséquent, la négation de (1) amène à la négation de la seule alternative (2). Nous sommes ainsi forcés de conclure que la description en mécanique quantique de la réalité physique donnée par les fonctions d'onde n'est pas complète.

On pourrait objecter à cette conclusion que notre critère de la réalité n'est pas suffisamment restrictif. En effet, on n'arriverait pas à notre conclusion si on insistait sur le fait que deux ou plus quantités physiques peuvent être vues comme des éléments simultanés de réalité *seulement lorsqu'ils peuvent être simultanément mesurés ou prédits.* Avec ce point de vue, puisque soit l'une soit l'autre, mais non les deux simultanément, des quantités P et Q peuvent être prédites, elles ne sont pas simultanément réelles. Cela a pour conséquence que la réalité de P et Q dépend du processus de mesure effectué sur le premier système, qui ne perturbe le second système d'aucune manière. On devrait s'attendre à ce qu'aucune définition raisonnable de la réalité ne permette cela.

Alors que nous avons ainsi montré que la fonction d'onde ne fournit pas une description complète de la réalité physique, nous laissons ouverte la question de savoir si une telle description existe ou pas. Nous croyons, pourtant, qu'une telle théorie est possible.