



Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « **maths modernes** » : ce qu'est — et n'est pas — la théorie des ensembles.
- Une promenade de 140 ans en compagnie de grands génies des mathématiques...



André Lichnerowicz

- **1967–1973** : Commission Lichnerowicz

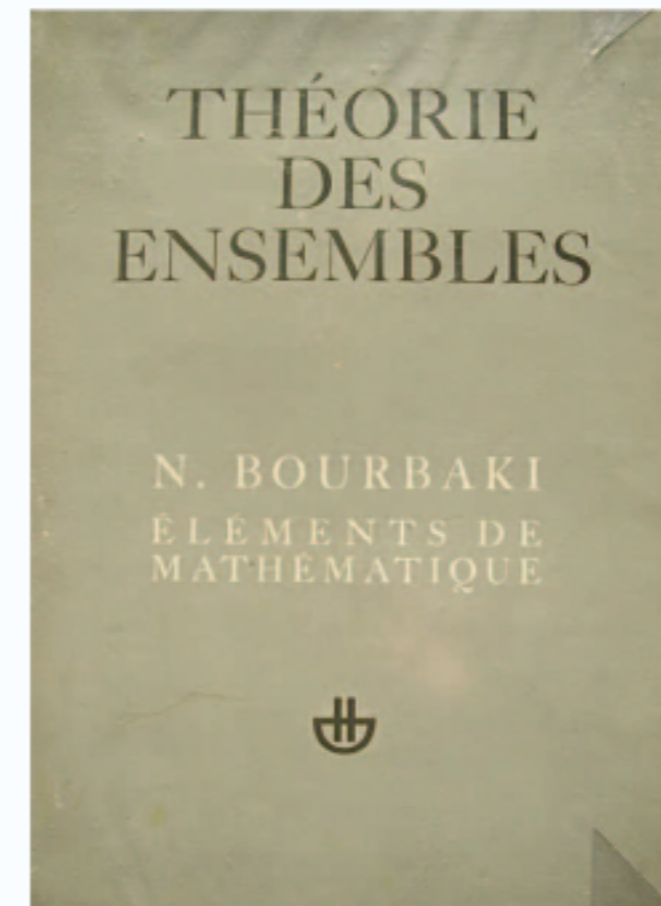
- Réforme pour

« moderniser l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, au collège et au lycée, en insistant sur les **structures** mathématiques »

- Fondée sur la **théorie des ensembles**, et le traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki



le groupe Bourbaki



- La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des **ensembles** et des **relations** !

TD3

parties d'un ensemble

1 A est un ensemble de noms d'arbres :
 $A = \{ \text{olivier, noyer, cerisier, châtaignier, peuplier, pommier, tilleul, sapin} \}$.

1° Complète les schémas de la figure 1, sachant que :

- E est l'ensemble des noms de A qui ont 7 lettres.
- F est l'ensemble des noms de A qui ont 5 lettres.

2° Complète les schémas de la figure 2, sachant que R est l'ensemble des noms de A qui se terminent par la lettre r.

2 1° P est un ensemble de prénoms :
 $P = \{ \text{Denis, Jules, Paul, Nicolas, Lili, Solange, Marc, François, Luc, Yves, Marie, Jean} \}$.

Appelons A l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre a. Complète :

Appelons E l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre e. Complète :

Appelons I l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre i. Complète : I = { _____ }

2° Complète les schémas des ensembles A, E, I et P (Fig. 3).

3° Barre les cases qui ne conviennent pas :

$A \subset P$	<input checked="" type="checkbox"/>	$I \subset P$	<input checked="" type="checkbox"/>
$A \subset E$	<input checked="" type="checkbox"/>	$P \subset P$	<input checked="" type="checkbox"/>

TD2

schéma d'un ensemble

1 R est un ensemble de reptiles vivant :

$R = \{ \text{crocodile, cobra, caméléon, tortue, vipère} \}$.

Il y a des erreurs : trouve-les et explique.

2 B est un ensemble d'élèves qui pratiquent le basket-ball ;
 H est un ensemble d'élèves qui pratiquent le hand-ball ;
 F est un ensemble d'élèves qui pratiquent le football.

Complète en écrivant les noms des élèves :

B = { _____ }
 H = { _____ }
 F = { _____ }

Complète en utilisant l'une des lettres B, H, F :

Gilles e _____ ; Stéphane u _____ ; Hubert e _____
 Denis é _____ ; Yves é _____ ; Jean é _____

Complète en utilisant c ou ç :

Guy _____ B ; Stéphane _____ H ; Gilles _____

TD7

relations

1 E est un ensemble de nombres :
 $E = \{ 3, 4, 5, 6 \}$;
 F est un ensemble de mots commençant par la lettre s :
 $F = \{ \text{savon, simple, six, samedi, seix, sixte, ski, sapin} \}$.

1° Complète le schéma (Fig. 1) de la relation de E vers F ainsi définie :
 ... est le nombre de lettres de...

2° Complète le schéma (Fig. 2) de la relation réciproque ainsi définie :
 ... s pour nombre de lettres...

2 La figure 3 ci-contre est le schéma de la relation de E vers F ainsi définie :
 ... est la lettre occupant
 dans le mot _____ le rang...
 De quel mot s'agit-il?

● Personne ne savait

...des tables de résultats...

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner par 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bâton de craie rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie verte qu'il a dans la main un ensemble de bâtons de craie.
 — Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont dans une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, sur une table entourés d'une ficelle ? (oui).
 — Chacun des bâtons est un élément de l'ensemble.
 — Souvent on désigne un ensemble par une lettre, par exemple A et chacun des éléments par une lettre, par exemple b pour le morceau de craie blanche, r pour le morceau de craie rouge, j pour le morceau de craie jaune, v pour le morceau de craie verte. On écrit :
 $A = \{ b ; r ; j ; v \}$
 L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b n'est pas un élément de A.
 Soit $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$. 3 est-il un élément de B ?
 Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine : { lundi ; ... }. Samedi est-il un élément de cet ensemble ?
 Ecris l'ensemble D des noms des mois de l'année : { janvier ; ... }. Samedi est-il un élément de cet ensemble ?

II Ensembles égaux

M^{me} Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie, par e, f, v.
 Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de M^{me} Dulac ?
 Quels sont les éléments de l'ensemble N des enfants de M^{me} Dulac ?
 Les ensembles M et N sont-ils formés des mêmes éléments ?
 Les ensembles M et N sont égaux.
 — On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
 Les ensembles $B = \{ 10 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $G = \{ 4 ; 2 ; 10 ; 3 \}$ sont égaux. Dis pourquoi.
 On donne $H = \{ 10 ; 5 ; 2 ; 3 \}$. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire $B = H$?
 P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire $P = \{ a ; b \}$ ou bien $P = \{ b ; a \}$.
 P est une paire.

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { janvier ; février ; ...décembre } qu'on appelle univers. Comment

marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E					janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E					0	0	0
avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre	
1	0	1	0	0	1	0	
novembre		décembre					
1		0					

Ecris les éléments de D. $D = \{ \text{avril ; juin ; septembre ; novembre} \}$.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E					janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E					1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.

Ecris : $F = \{ \text{janvier ; ...} \}$.

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

Reprenons $C = \{ \text{lundi} \dots \}$. On représente l'ensemble C au moyen d'un diagramme. La forme de la courbe fermée n'a pas d'importance.

Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.

Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

On ! Boris est un habitant de Moscou, René un habitant de Paris, John de Londres et Valerio de Rome. On a le droit de dire que l'ensemble qu'ils forment, de dessiner le diagramme correspondant sans les convoquer tous à l'école pour les entourer d'une ficelle.
 On a aussi le droit de parler de l'ensemble dont les éléments sont les noms des rois mérovingiens, Clovis, Charlemagne qui n'ont pourtant pas vécu à la même époque.

problèmes

1. L'ensemble A = { 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 }. Comment peut-on appeler cet ensemble ?
 L'ensemble B des voyelles de notre alphabet.
 On a le droit de dire que les noms brochet, carpe, grenouille sont des éléments de l'ensemble de noms de poissons ?
 L'ensemble C de mots qui commencent par s, un ensemble D de mots qui terminent par un u.
 L'ensemble E des rois qui ont régné en France entre les années 1600 et 1700.
 Sur ton dictionnaire ce qu'on appelle une « merveille du monde » liste les éléments de cet ensemble ?
 Sur un atlas quels sont les éléments de l'ensemble des Etats qui ont une frontière commune avec la France.
 Cite les éléments d'un ensemble on n'a pas le droit de citer deux fois le même élément. Jean a écrit $F = \{ \text{Louis XIV ; Louis XV ; le roi Soleil} \}$. Est-ce correct ?

2. Les ensembles A = { m ; p ; r ; l ; k } et B = { p ; l ; k ; r ; m } sont-ils égaux ?
 10. Les ensembles C = { 1 ; 7 ; 3 ; 6 } et D = { 6 ; 7 ; 3 ; 1 ; 5 } sont-ils égaux ?
 11. L'ensemble E = { 13 ; 20 ; 12 ; 16 } que F = { 20 ; 16 ; x ; 12 } est égal à E. Trouve x.

12. L'ensemble A = { 25 ; 36 ; 59 ; 41 ; 17 ; 10 }. Quel est l'ensemble B des éléments de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 1 ? Quel est l'ensemble C des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 2 ?

III et V 13. Les éléments d'un ensemble B sont choisis parmi ceux d'un univers A :
 éléments de A


	x	y	z	t	u	v
pour B, numéros des éléments de A	1	0	0	1	1	1
Quels sont les éléments de B ?		+x	+y			
Ecris sur une feuille, comme sur la ligne :		+t	+u	+z	+w	
Mets en évidence les ensembles A et B.		+v				

14. Les éléments d'un ensemble D sont choisis parmi ceux d'un univers C on sait que $C = \{ \diamond ; \Delta ; \square ; \boxplus \}$ et que $D = \{ \boxplus ; \Delta \}$. Complète le tableau : éléments de C


pour D numéros des éléments de C			

Sur un même dessin, obtiens un schéma représentant les ensembles C et D.


Symboles - Égalités


 3 Le signe 3 est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.


Le symbole Δ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

 3 + 2 $3 + 2 = 5$

5 3 + 2 et 5 désignent le même nombre.


 = rouge On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

 a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.
B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

 6 est le symbole qui désigne ce coureur.

A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

 n On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

$n = 4$

3

Complète l'égalité :

non  = ...

• 8. Complète les égalités

non  = ...

non  = ...

• 10.  carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus ?

• 11.  Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi? Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

• 12. Essaie de dessiner deux symboles pour désigner chacune des propriétés : mince, épais.

• 13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

 Dessine une 3^e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.

• 1. Dessine...
• 2. Quelle est...
• 3. Ce symbole concerne...
• 4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?
• 5.  = rond
• 6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.
• 7.  Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.



« Si vous ne voulez pas perdre la face, parents, ce livre est fait pour vous, car vous devez d'abord comprendre la véritable nature des mathématiques modernes. »



- Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA

Peanuts by Charles Schulz



- Après 1980 : **abandon** progressif des « maths modernes » dans l'enseignement
(1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)
- Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais

Comment en est-on arrivé à ce gâchis ?
Et, à propos, la théorie des ensembles, **qu'est-ce que c'est ?**

Numéroter les éléments d'un ensemble

- De quoi parle Cantor ?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

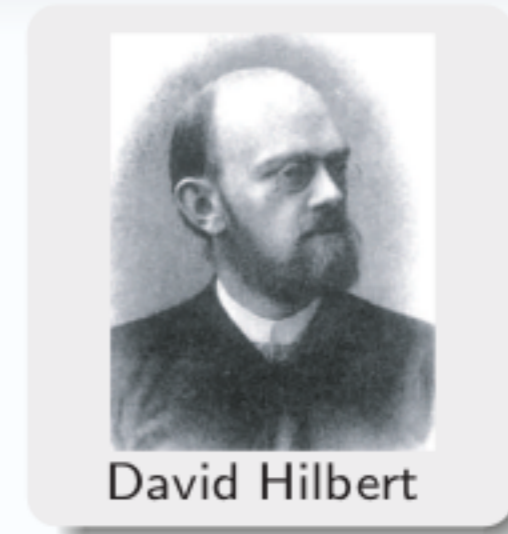
- On peut numéroter les entiers relatifs :

... $-3 \begin{matrix} 6 \\ \bullet \end{matrix}$ $-2 \begin{matrix} 4 \\ \bullet \end{matrix}$ $-1 \begin{matrix} 2 \\ \bullet \end{matrix}$ $0 \begin{matrix} 0 \\ \bullet \end{matrix}$ $1 \begin{matrix} 1 \\ \bullet \end{matrix}$ $2 \begin{matrix} 3 \\ \bullet \end{matrix}$ $3 \begin{matrix} 5 \\ \bullet \end{matrix}$ $4 \begin{matrix} 7 \\ \bullet \end{matrix}$...

- On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :

$0 \begin{matrix} \bullet \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$1 \begin{matrix} \bullet \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$	$3 \begin{matrix} \bullet \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$	$6 \begin{matrix} \bullet \\ 4 \\ 1 \end{matrix}$	$10 \begin{matrix} \bullet \\ 5 \\ 1 \end{matrix}$...
$2 \begin{matrix} \bullet \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$	$4 \begin{matrix} \bullet \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$	$7 \begin{matrix} \bullet \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$	$11 \begin{matrix} \bullet \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$...
$5 \begin{matrix} \bullet \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$	$8 \begin{matrix} \bullet \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$	$12 \begin{matrix} \bullet \\ 3 \\ 3 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}$...
$9 \begin{matrix} \bullet \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$...
$\bullet \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$	$\bullet \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$...

- Début XXe siècle : « **crise des fondements** » :
les mathématiques sont-elles contradictoires ?
- **Programme de Hilbert** : avec des bases axiomatiques
suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer
que les mathématiques sont sans contradiction.



- Une piste (?) : on peut **représenter** par
des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter** le nombre 0 par l'ensemble vide \emptyset ,
- **représenter** le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- **représenter** le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- **représenter** le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.,

...et ces ensembles **se comportent comme** les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- **représenter** un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- **représenter** une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$, etc.

- **Toutes** les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !

↔ Pour montrer que les mathématiques sont sans contradiction,
il suffit de montrer que la théorie des ensembles est sans contradiction.



- Années 30 : chiche !
- **Nicolas Bourbaki**, traité complet de mathématiques **basé sur** la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

les nombres **sont** des ensembles, les fonctions **sont** des ensembles,... etc.

- Bien sûr, cela marche très bien (aucun risque technique...)
...et ce succès inspire les pédagogues :
- Puisque tout est ensemble,
il faut mettre les ensembles **à la base de l'enseignement** :
« Le Professeur Dieudonné lance le cri de guerre de la
nouvelle croisade : "À bas Euclide !" »

...*Et vive la réforme des « maths modernes » !*



Jean Dieudonné

- Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas **compris** l'importance des résultats de Gödel ?
(et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- Parce que ces résultats étaient (et restent) **difficiles**,
Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- Parce que la **mode** était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs **non** !

Une convention technique commode (« tout est ensemble »)
n'est pas la vérité révélée d'une **nouvelle religion**.



- De surcroît : problème de formation des enseignants (et pour cause...)

~> L'**échec** et le **rejet** étaient (probablement) **inévitables**.

- De quoi parle l'article de Cantor?

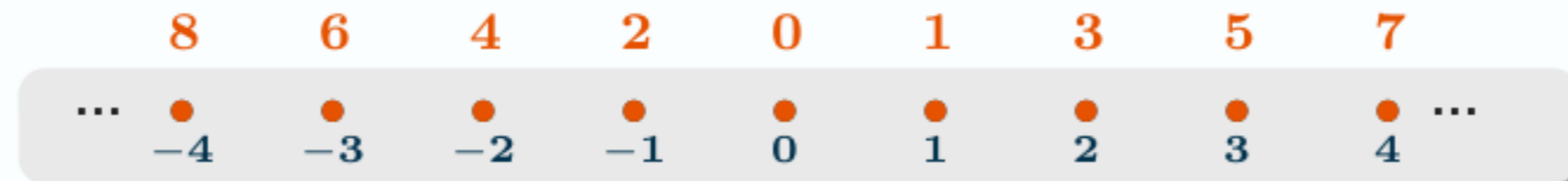
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



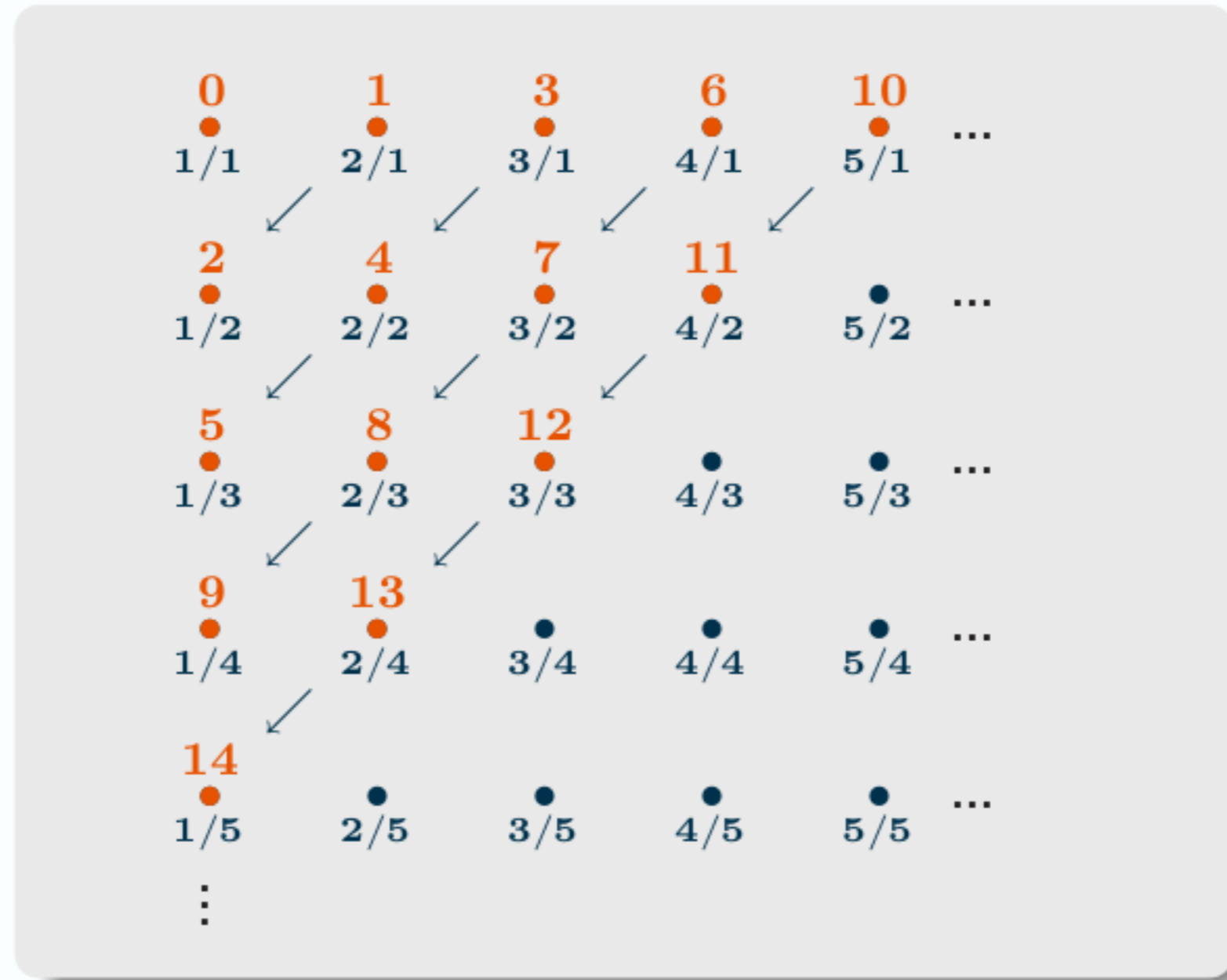
trop facile !

- Exemple 2 : les entiers relatifs



astucieux...

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



très astucieux ; autre solution : donner à $\frac{p}{q}$ le numéro $2^p(2q + 1)$.