Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

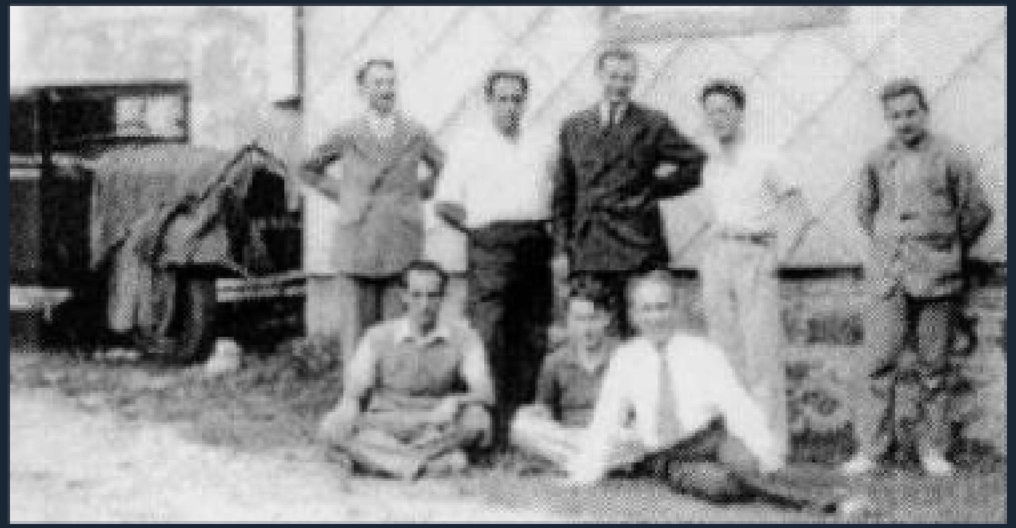
- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « maths modernes » : ce qu'est — et n'est pas — la théorie des ensembles.
- Une promenade de 140 ans en compagnie de grands génies des mathématiques...

André Lichnerowicz

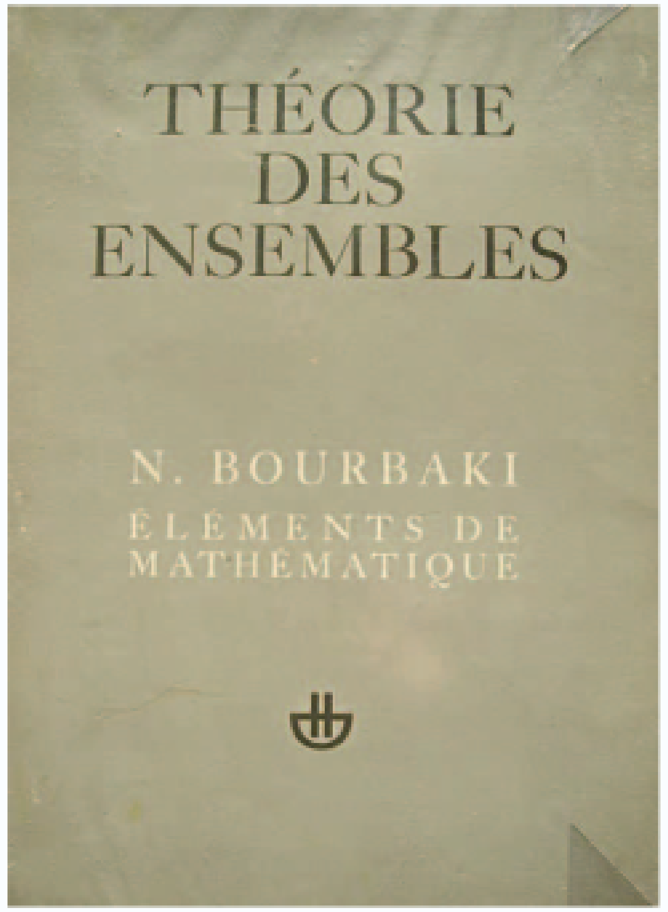
- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

  « *moderniser l'enseignement des mathématiques*
  à l'école primaire, au collège et au lycée,
  en insistant sur les structures mathématiques »

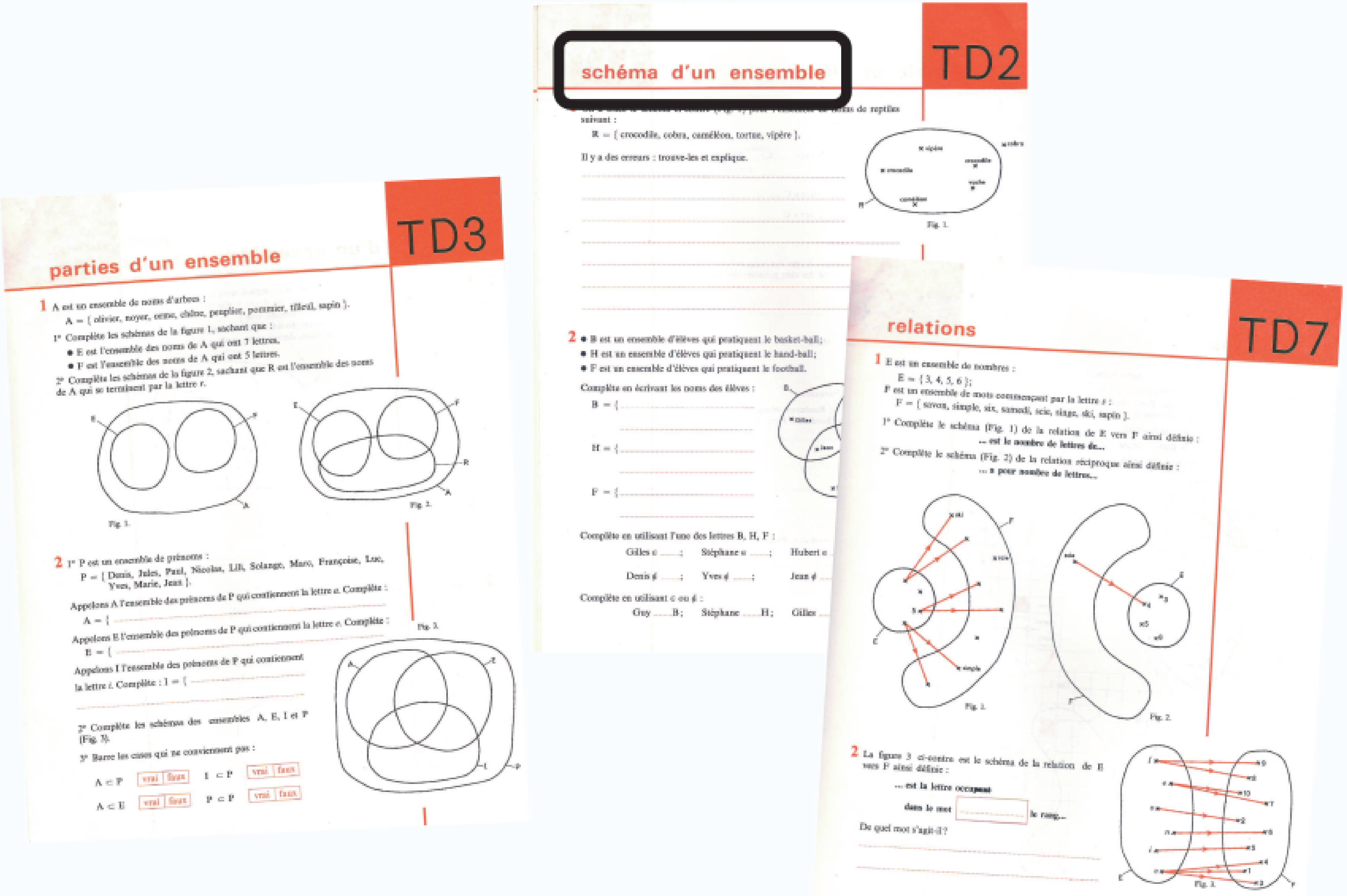
- **Fondée sur la théorie des ensembles,**
  et le traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki



le groupe Bourbaki



- **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des ensembles et des relations !**



- Personne ne savai ... les de résultats...

vier ; février ; ...décembre} qu'on appelle **univers**. Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0

Ecris les éléments de D. D = {avril ; juin ; septembre ; novembre}.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.

Ecris : F = {janvier ;...}.

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

D'autres exercices bizarres...

Symboles - Égalités

Le signe **3** est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.

Le symbole Δ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

3 + 2

5

3 + 2 = 5

3 + 2 et 5 désignent le même nombre.

= rouge

On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

B

a

a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.

B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

6 est le symbole qui désigne ce coureur.

A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

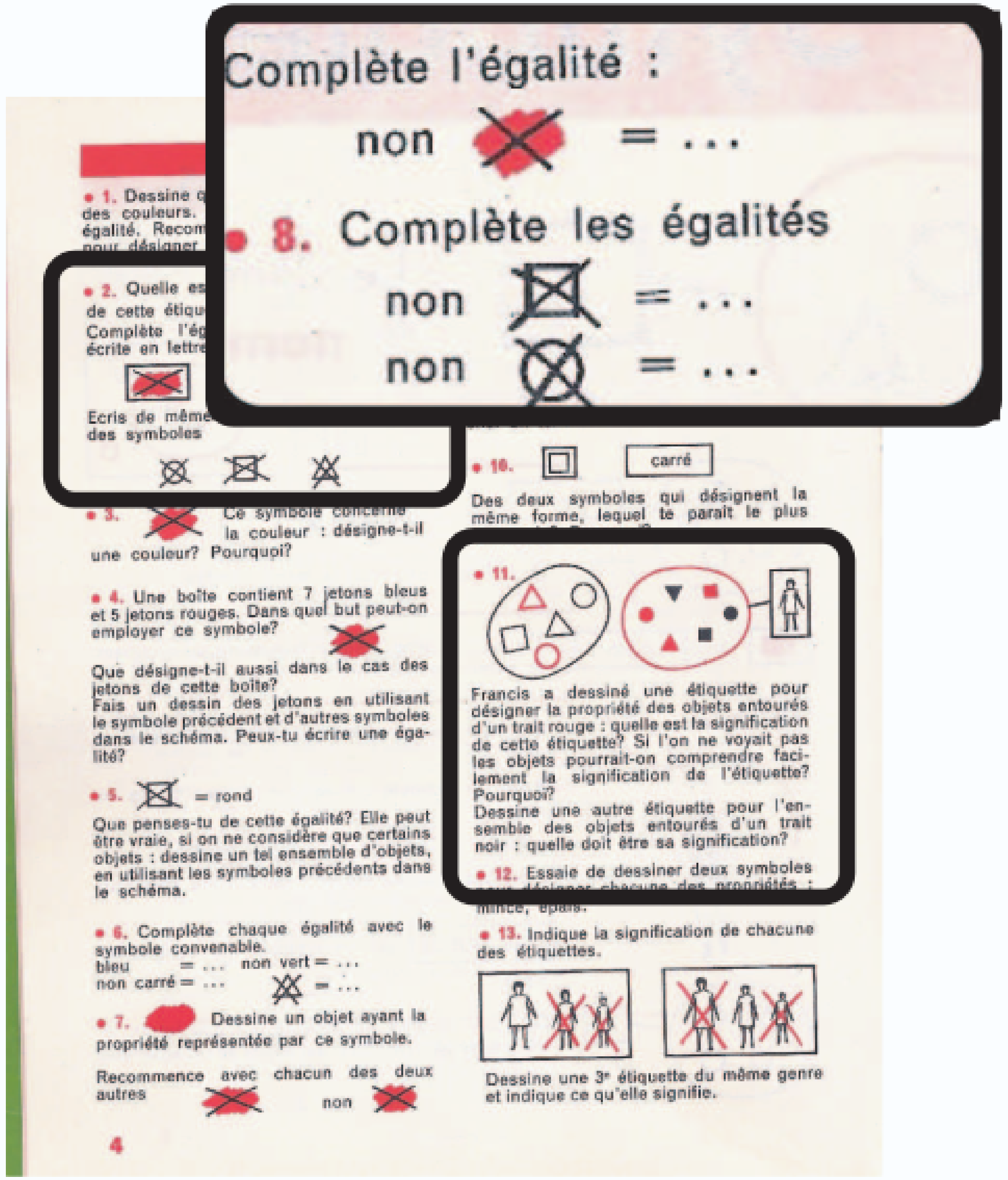
Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

n

On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

n = 4

3



• 1. Dessine q
des couleurs.
égalité. Recom
pour désigner

• 2. Quelle es
de cette étiqu
Complète l'ég
écrite en lettre

Ecris de même
des symboles

• 3. Ce symbole concerne la couleur : désigne-t-il une couleur? Pourquoi?

• 4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?

Que désigne-t-il aussi dans le cas des jetons de cette boîte?
Fais un dessin des jetons en utilisant le symbole précédent et d'autres symboles dans le schéma. Peux-tu écrire une égalité?

• 5. = rond

Que penses-tu de cette égalité? Elle peut être vraie, si on ne considère que certains objets : dessine un tel ensemble d'objets, en utilisant les symboles précédents dans le schéma.

• 6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.
bleu = ... non vert = ...
non carré = ... = ...

• 7. Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.

Recommence avec chacun des deux autres non

4

Complète l'égalité :

non = ...

• 8. Complète les égalités

non = ...

non = ...

• 10. carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus

• 11.

Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi?
Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

• 12. Essaie de dessiner deux symboles
mince, épais.

• 13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

Dessine une 3e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.

Le casse-tête des parents

« Si vous ne voulez pas perdre la face, parents, ce livre est fait pour vous, car vous devez d'abord comprendre la véritable nature des mathématiques modernes. »

- Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA

- Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais

Comment en est-on arrivé à ce gâchis ?
Et, à propos, la théorie des ensembles, qu'est-ce que c'est ?

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 : $\frac{1}{1}$	1 : $\frac{2}{1}$	3 : $\frac{3}{1}$	6 : $\frac{4}{1}$	10 : $\frac{5}{1}$	…
2 : $\frac{1}{2}$	4 : $\frac{2}{2}$	7 : $\frac{3}{2}$	11 : $\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5 : $\frac{1}{3}$	8 : $\frac{2}{3}$	12 : $\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
9 : $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?


David Hilbert

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.


John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :
- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :
- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{Dom}(f)\}$, etc.

- Toutes les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que les mathématiques sont sans contradiction,
il suffit de montrer que la théorie des ensembles est sans contradiction.

- **Années 30 : chiche !**
- **Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.**
- **Un travail colossal et admirable**

- **Une option hardie : puisqu'on a le choix** (on repart du début) **et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons** **Tout est ensemble !**
  les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- **Bien sûr, cela marche très bien** (aucun risque technique...)
  ...et ce succès inspire les pédagogues :
- **Puisque tout est ensemble, il faut mettre les ensembles à la base de l'enseignement :**

« *Le Professeur Dieudonné lance le cri de guerre de la nouvelle croisade : "À bas Euclide !"* »

...Et vive la réforme des « maths modernes » !


Jean Dieudonné

• Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?

(et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)

Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

• Parce que ces résultats étaient (et restent) difficiles,
Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

• Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !

Une convention technique commode (« tout est ensemble »)
n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

• De surcroît : problème de formation des enseignants (et pour cause...)

$\rightsquigarrow$ L'échec et le rejet étaient (probablement) inévitables.

Numéroter les éléments d'un ensemble

- De quoi parle l'article de Cantor?

> **De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).**

- Exemple 1 : les entiers pairs

0		1		2		3		4	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	…

trop facile !

- Exemple 2 : les entiers relatifs

	8	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

astucieux…

Numéroter les éléments d'un ensemble (bis)

- **Exemple 3 : les nombres rationnels positifs**

0 — $1/1$	1 — $2/1$	3 — $3/1$	6 — $4/1$	10 — $5/1$	…
2 — $1/2$	4 — $2/2$	7 — $3/2$	11 — $4/2$	$5/2$	…
5 — $1/3$	8 — $2/3$	12 — $3/3$	$4/3$	$5/3$	…
9 — $1/4$	13 — $2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$	…
14 — $1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5$	…
⋮					

très astucieux ; autre solution : donner à $\dfrac{p}{q}$ le numéro $2^p(2q+1)$.